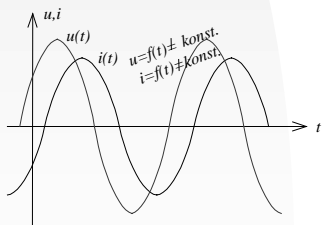


# Izmjenični krugovi

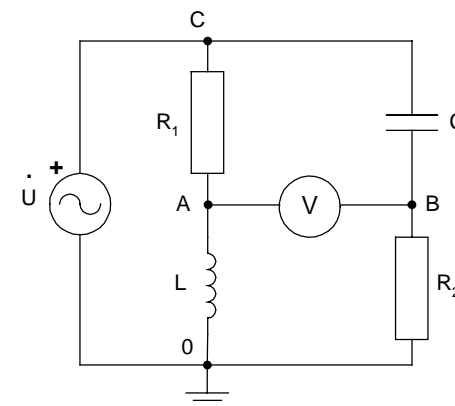
- Vektorski dijagram.
- Topografski dijagram.
- Snaga u izmjeničnim strujnim krugovima.
- Prividna, jalova i radna snaga.



## 1. zadatak

U strujnom krugu prema slici odredite napon i struju izvora, ako idealan voltmetar pokazuje 60 [V]. Nacrtajte vektorski i topografski dijagram.

- $R_1 = R_2 = 5 [\Omega]$
- $X_L = 10 [\Omega]$
- $X_C = 10 [\Omega]$

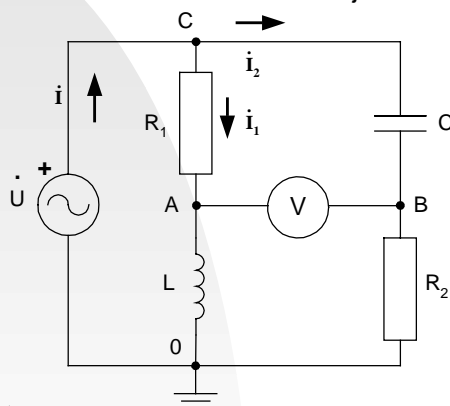


[Početna stranica](#)



## Rješenje zadatka

- U mreži teku struje naznačenog smjera:



Pretpostavimo fazni pomak napona  $U_{AB}$ :

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_V = 60 \angle 0^\circ [\text{V}]$$

Napon  $U_{AB}$  može se izračunati kao:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{\phi}_A - \dot{\phi}_B = \dot{I}_1 \cdot jX_L - \dot{I}_2 \cdot R_2$$

Struje u granama iznose:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{R_1 + jX_L}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{R_2 - jX_C}$$

- Uvrštenjem struja u izraz za napon  $U_{AB}$  dobiva se:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{I}_1 \cdot jX_L - \dot{I}_2 \cdot R_2 = \frac{\dot{U}}{R_1 + jX_L} \cdot jX_L - \frac{\dot{U}}{R_2 - jX_C} \cdot R_2$$

[Početna stranica](#)



- Pomoću izraza za napon  $U_{AB}$  moguće je izračunati napon izvora :

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U} \cdot \left( \frac{jX_L}{R_1 + jX_L} - \frac{R_2}{R_2 - jX_C} \right)$$

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\left( \frac{jX_L}{R_1 + jX_L} - \frac{R_2}{R_2 - jX_C} \right)} = \frac{60}{\frac{j10}{5 + j10} - \frac{5}{5 - j10}}$$

$$\dot{U} = \frac{60}{\frac{j10}{5 + j10} - \frac{5}{5 - j10}} = \frac{60}{\frac{5 + j10}{125} - \frac{25 + j50}{125}} = \frac{60}{\frac{100 + j50 - 25 - j50}{125}} = \frac{60}{\frac{75}{125}} = \frac{60}{0.6} = 100 \angle 0^\circ [\text{V}]$$

- Pomoću struja u granama moguće je izračunati struju izvora:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{R_1 + jX_L} = \frac{100}{5 + j10} \cdot \frac{5 - j10}{5 - j10} = 4 - j8 [\text{A}]$$

[Početna stranica](#)



$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{R_2 - jX_C} = \frac{100}{5 - j10} \cdot \frac{5 + j10}{5 + j10} = 4 + j8 [\text{A}]$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 4 - j8 + 4 + j8 = 8 \angle 0^\circ [\text{A}]$$

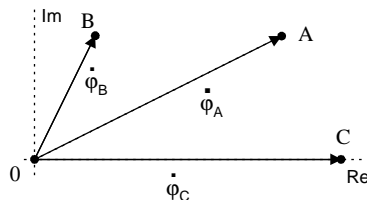
- Za topografski dijagram potrebno je odrediti potencijale svih točaka u mreži:

$$\dot{\phi}_0 = 0 \angle 0^\circ [\text{V}]$$

$$\dot{\phi}_A = \dot{I}_1 \cdot jX_L = 8.94 \angle -63.4^\circ \cdot 10 \angle 90^\circ = 89.4 \angle 26.6^\circ [\text{V}]$$

$$\dot{\phi}_B = \dot{I}_2 \cdot R_2 = 8.94 \angle 63.4^\circ \cdot 5 \angle 0^\circ = 44.7 \angle 63.4^\circ [\text{V}]$$

$$\dot{\phi}_C = \dot{U}_{C0} = 100 \angle 0^\circ [\text{V}]$$


[Početna stranica](#)

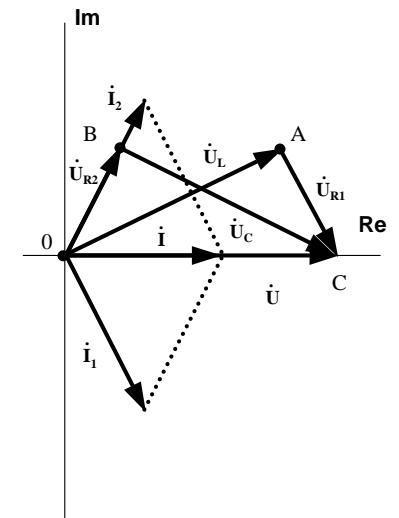

- Određivanje vektorskog dijagrama:

Vektor napona izvora je poznat te njega prvog ucrtavamo u vektorski dijagram.

Struja u prvoj grani ( $I_1$ ) kasni za naponom izvora, a struja u drugoj grani ( $I_2$ ) prethodi naponu izvora. Ukupna struja u krugu jednaka je vektorskom zbroju struja u granama.

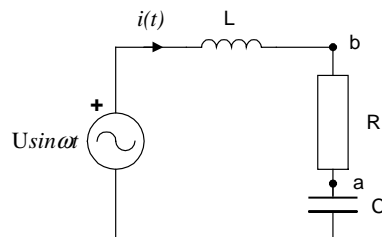
Napon na zavojnici L prethodi struji  $I_1$ , a napon na otporu  $R_1$  je u fazi s istom strujom. Napon na izvoru jednak je zbroju padova napona na L i  $R_1$ .

Napon na otporu  $R_2$  je u fazi sa strujom  $I_2$ , a napon na kondenzatoru C kasni za istom strujom. Napon na izvoru jednak je zbroju padova napona na  $R_2$  i C.


[Početna stranica](#)


## 2. zadatak

Nacrtati vektor koji prikazuje napon  $U_{ab}$ .  $X_L > X_C$ .


[Početna stranica](#)


## Rješenje zadatka

- Za odrediti vektor napona  $U_{ab}$  potrebno je djelomično nacrtati vektorski dijagram.

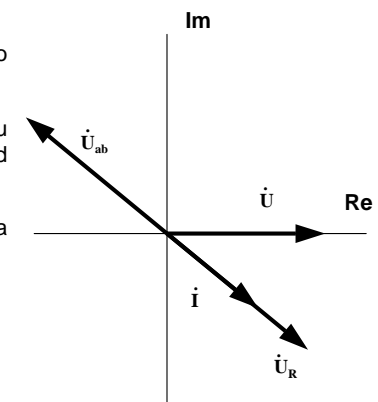
Vektor napona izvora je zadan kao napon pod  $0^\circ$ .

Budući da je  $X_L > X_C$ , struja u krugu kasni za naponom za kut manji od  $90^\circ$ .

Napon na otporu je u fazi sa strujom.

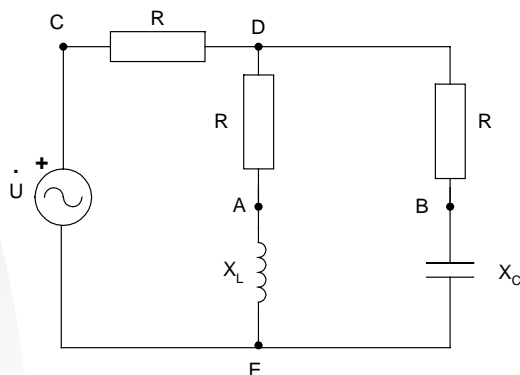
Napon  $U_{ab}$  je definiran kao:

$$\dot{U}_{ab} = -\dot{U}_R$$


[Početna stranica](#)


### 3. zadatak

U kakvom su faznom odnosu naponi  $U_{CD}$  i  $U_{AE}$  ako je  $X_L = X_C = R$ .



[Početna stranica](#)



### Rješenje zadatka

- Da bi se odredio fazni pomak napona potrebno je nacrtati vektorski dijagram:

Pretpostavimo da je napon  $U_{DE}$  pod  $0^\circ$ .

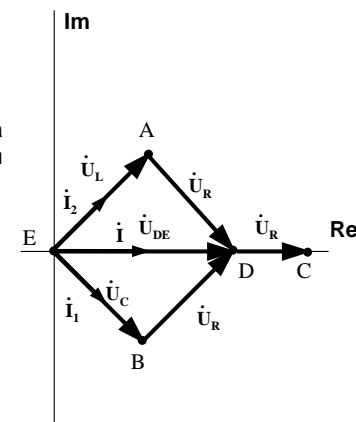
Struja u prvoj grani kasni za naponom  $U_{DE}$  za  $45^\circ$ , dok struja u drugoj grani prethodi naponu  $U_{DE}$  za  $45^\circ$  budući da je  $X_L = X_C = R$ .

Napon  $U_{DE}$  jednak je zbroju napona na zavojnici i otporu, odnosno padu napona na kondenzatoru i otporu.

Ukupna struja jednaka je zbroju struja u granama.

Napon izvora jednak je zbroju napona  $U_{DE}$  i napona na otporu  $R$  koji je u fazi sa strujom  $I$ .

Iz vektorskog dijagrama slijedi da napon  $U_{AE}$  prethodi naponu  $U_{CD}$  za  $45^\circ$ .

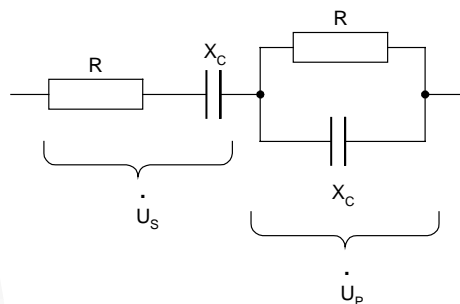


[Početna stranica](#)



### 4. zadatak

Odredite omjer napona  $U_S/U_P$ .  $R = X_C$ .



[Početna stranica](#)



### Rješenje zadatka

- Izrazi za napone su sljedeći:

$$\dot{U}_S = \dot{I} \cdot (R - jX_C)$$

$$\dot{U}_P = \dot{I} \cdot (R \parallel (-jX_C))$$

- Omjer napona se svodi na omjer impedancija budući da ista struja teče kroz obje impedancije:

$$\frac{\dot{U}_S}{\dot{U}_P} = \frac{\dot{I} \cdot (R - jX_C)}{\dot{I} \cdot (R \parallel (-jX_C))} = \frac{R - jX_C}{R \parallel (-jX_C)}$$

- Ukoliko se uvrsti  $R = X_C$ :

$$\frac{\dot{U}_S}{\dot{U}_P} = \frac{R - jR}{\frac{R \cdot (-jR)}{R - jR}} = \frac{(R - jR)^2}{R \cdot (-jR)} \cdot \frac{j}{j} = j \cdot (1 - 2j - 1) = 2 \angle 0^\circ$$

- Omjer efektivnih vrijednosti:  $\frac{U_S}{U_P} = 2$

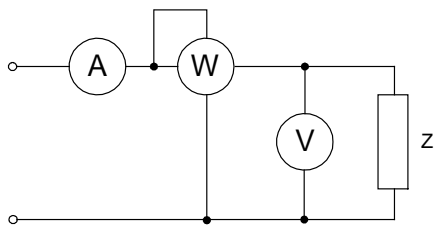
[Početna stranica](#)



## 5. zadatak

Izračunati impedanciju i  $\cos \varphi$  jednofaznog trošila ako instrumenti spojeni prema slici pokazuju:

- $I_{\text{ampermetra}} = 10 \text{ [A]}$
- $U_{\text{voltmetra}} = 400 \text{ [V]}$
- $P_{\text{watmetra}} = 3 \text{ [kW]}$



[Početna stranica](#)



## Uvodni pojmovi

- Što se tiče snage u izmjeničnim strujnim krugovima - tu se koriste sljedeći pojmovi:

- **Prividna snaga** - snaga koju izvor predaje trošilu. Predstavlja umnožak efektivnih vrijednosti napona i struje.

$$S = U \cdot I \text{ [VA]}$$

- **Radna (djelatna) snaga** - snaga koja se na trošilu disipira u toplinu, odnosno snaga koja predstavlja *iskoristivi* dio prividne snage. Kut  $\varphi$  predstavlja pomak u fazi između napona i struje.

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \text{ [W]}$$

$\cos(\varphi)$  se naziva i faktorom snage!

- **Jalova (reaktivna) snaga** - snaga koju trošilo vraća nazad izvoru i koja je posljedica reaktivne komponente trošila (kapacitivnost ili induktivnost).

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \text{ [VAr]}$$

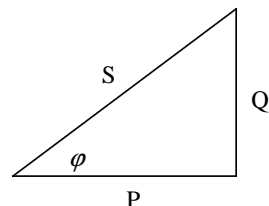


[Početna stranica](#)



## Uvodni pojmovi

- Navedene se tri veličine mogu predložiti u obliku trokuta snaga:



- Iako prividna i jalova snaga nemaju direktnu primjenu u proračunu korisne energije, ipak svaka od njih nosi važan podatak koji se koristi u proračunu električnih uređaja. Na primjer:

- Izvor napajanja - generator - mora biti u stanju dati traženu struju (uz konstantan napon), neovisno o faktoru snage.
- Budući da se jalova snaga može kompenzirati vrlo je bitno imati podatak o njenoj vrijednosti.

[Početna stranica](#)



## Rješenje zadatka

- Snaga koju mjeri watmetar u ovoj mreži jednaka je radnoj snazi:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

- Iz ovog izraza moguće je odrediti  $\cos \varphi$ :

$$\cos \varphi = \frac{P}{U \cdot I} = \frac{3000}{400 \cdot 10} = 0.75$$

- Iznos impedancije može se odrediti iz poznatog napona i struje na impedanciji:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{400}{10} = 40 \text{ [}\Omega\text{]}$$

- Impedancija osim iznosa određena je faznim kutem, tj.

$$\cos \varphi = 0.75 \Rightarrow \varphi = \pm 41.4^\circ$$

$$\dot{Z} = 40 \angle \pm 41.4^\circ \text{ [}\Omega\text{]}$$



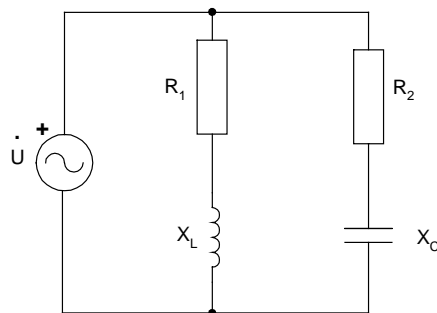
[Početna stranica](#)



## 5. zadatak

U strujnom krugu prema slici odredite struje u krugu, radnu snagu izvora i snage na otporima  $R_1$  i  $R_2$ .

- $R_1 = 10 \text{ } [\Omega]$
- $R_2 = 15 \text{ } [\Omega]$
- $X_L = 20 \text{ } [\Omega]$
- $X_C = 15 \text{ } [\Omega]$
- $U = 200 \text{ } [\text{V}]$
- $\varphi_U = 0^\circ$



[Početna stranica](#)



## Rješenje zadatka

- Snaga izvora određuje se na sljedeći način:

$$P = \operatorname{Re}\{\dot{U} \cdot \dot{I}^*\}$$

- Da bi se odredila snaga izvora potrebno je odrediti struju I:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

- Za određivanje struje I potrebno je odrediti struje u granama:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{R_1 + jX_L} = \frac{200}{10 + j20} \cdot \frac{10 - j20}{10 - j20} = 4 - j8 = 8.94 \angle -63.4^\circ \text{ [A]}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{R_2 - jX_C} = \frac{200}{15 - j15} \cdot \frac{15 + j15}{15 + j15} = 6.67 + j6.67 = 9.43 \angle 45^\circ \text{ [A]}$$

- Uvrštenjem izračunatih vrijednosti dobije se:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 4 - j8 + 6.67 + j6.67 = 10.67 - j1.33 = 10.8 \angle -7.1^\circ \text{ [A]}$$

- Konjugirano kompleksne vrijednosti struje I:

$$\dot{I} = 10.7 - j1.3 \text{ [A]} \Rightarrow \dot{I}^* = 10.7 + j1.3 \text{ [A]}$$

[Početna stranica](#)



- Snaga izvora:

$$P = \operatorname{Re}\{\dot{U} \cdot \dot{I}^*\} = \operatorname{Re}\{(200 + j0) \cdot (10.67 + j1.33)\} = 200 \cdot 10.67 + j0 \cdot j1.33$$

$$P \approx 2140 \text{ [W]}$$

- Snage na otporima  $R_1$  i  $R_2$ :

$$P_{R1} = I_1^2 \cdot R_1 = 8.94^2 \cdot 10 \approx 800 \text{ [W]}$$

$$P_{R2} = I_2^2 \cdot R_2 = 9.42^2 \cdot 15 \approx 1335 \text{ [W]}$$

- Snage na otporima mogu se odrediti i na drugi način:

$$\dot{U}_{R1} = \dot{I}_1 \cdot R_1 = (4 - j8) \cdot 10 = 40 - j80 \text{ [V]}$$

$$P_{R1} = \operatorname{Re}\{\dot{U}_{R1} \cdot \dot{I}_1^*\} = \operatorname{Re}\{(40 - j80) \cdot (4 + j8)\} = 40 \cdot 4 + 80 \cdot 8 = 800 \text{ [W]}$$

$$\dot{U}_{R2} = \dot{I}_2 \cdot R_2 = (6.67 + j6.67) \cdot 15 = 100 + j100 \text{ [V]}$$

$$P_{R2} = \operatorname{Re}\{\dot{U}_{R2} \cdot \dot{I}_2^*\} = \operatorname{Re}\{(100 + j100) \cdot (6.67 + j6.67)\} = 100 \cdot 6.67 + 100 \cdot 6.67 = 1335 \text{ [W]}$$

- Vidljivo je da se radna snaga koju daje izvor troši na radnim otporima  $R_1$  i  $R_2$ .

$$P = P_{R1} + P_{R2} = 800 + 1335 \approx 2135 \text{ [W]}$$

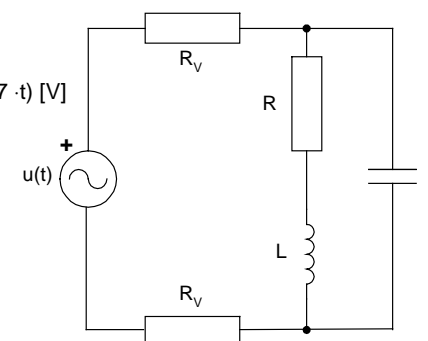
[Početna stranica](#)



## 6. zadatak

Za strujni krug prema slici treba odrediti struju, jalovu, djelatnu i prividnu snagu koju daje izvor, te gubitke u vodičima  $R_V$ . Zadano:

- $R_V = 2 \text{ } [\Omega]$
- $C = 26.525 \text{ } [\mu\text{F}]$
- $L = 26.525 \text{ } [\text{mH}]$
- $R = 20 \text{ } [\Omega]$
- $u(t) = 311 \cdot \sin(377 \cdot t) \text{ [V]}$



[Početna stranica](#)



## Rješenje zadatka

- Struja  $I$  određuje se iz Ohmovog zakona:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}$$

$$U = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{311}{\sqrt{2}} = 220 [\text{V}] \Rightarrow \dot{U} = 220 \angle 0^\circ [\text{V}]$$

$$Z = R_V + (R + jX_L) \parallel (-jX_C) + R_V$$

- Za određivanje impedancije  $Z$  potrebno je odrediti  $X_C$  i  $X_L$ :

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{377 \cdot 26.525 \cdot 10^{-6}} = 100 [\Omega]$$

$$X_L = \omega \cdot L = 377 \cdot 26.525 \cdot 10^{-3} = 10 [\Omega]$$

- Ukupna impedancija iznosi:

$$Z = 2 \cdot 2 + \frac{(20 + j10) \cdot (-j100)}{20 + j10 - j100} = 27.5 + j5.9 = 28 \angle 12^\circ [\Omega]$$

- Struja  $I$  onda iznosi:

$$\dot{I} = \frac{220 \angle 0^\circ}{28 \angle 12^\circ} = 7.9 \angle -12^\circ [\text{A}] \Rightarrow i(t) = 11 \cdot \sin(377 \cdot t - 12^\circ) [\text{A}]$$

[Početna stranica](#)



- Gubici u vodovima iznose:

$$P_V = 2 \cdot I^2 \cdot R_V = 2 \cdot 7.9^2 \cdot 2 = 250 [\text{W}]$$

- Prividna snaga,  $S$ :

$$S = U \cdot I = 220 \cdot 7.9 = 1738 [\text{VA}]$$

- Radna snaga,  $P$ :

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

$$\varphi = \angle(\dot{U}, \dot{I}) = \varphi_U - \varphi_I = 0 - (-12) = +12^\circ$$

$$P = 220 \cdot 7.9 \cdot \cos 12^\circ = 1700 [\text{W}]$$

- Jalova snaga,  $Q$ :

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi = 220 \cdot 7.9 \cdot \sin 12^\circ = 360 [\text{VAr}]$$

ili

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{1738^2 - 1700^2} = 360 [\text{VAr}]$$

- Radna snaga koja se troši na otporu  $R$ :

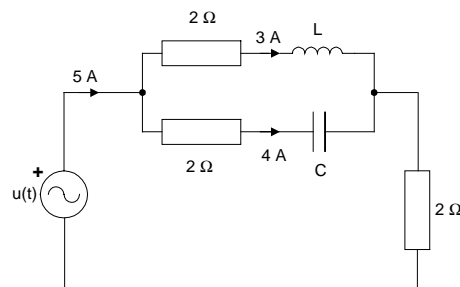
$$P_R = P - P_V = 1700 - 250 = 1450 [\text{W}]$$

[Početna stranica](#)



## 7. zadatak

Izračunajte radnu snagu kruga prema slici.



### Rješenje zadatka

- Radna snaga u krugu jednaka je zbroju snaga koje se troše na radnim otporima:

$$P = 3^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 2 + 5^2 \cdot 2 = 100 [\text{W}]$$

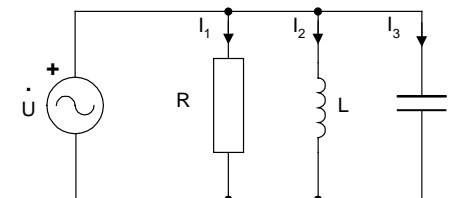
[Početna stranica](#)



## 8. zadatak

U krugu prema slici zadane su struje u granama i napon izvora. Odredite prividnu snagu izvora. Zadano:

- $I_1 = 6 [\text{A}]$
- $I_2 = 10 [\text{A}]$
- $I_3 = 4 [\text{A}]$
- $U = 100 [\text{V}]$



[Početna stranica](#)



## Rješenje zadatka

- Prividna snaga definirana je kao:

$$S = U \cdot I$$

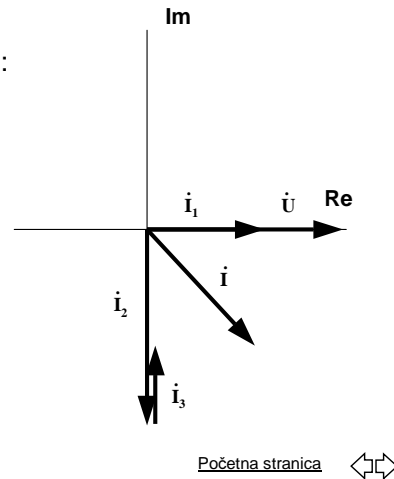
- Napon je poznat, a struja se može odrediti pomoću vektorskog dijagrama struja.

- Iz vektorskog dijagrama slijedi:

$$I^2 = I_1^2 + (I_2 - I_3)^2$$

- Prividna snaga iznosi:

$$S = U \cdot I = 100 \cdot \sqrt{6^2 + 6^2} = 850 \text{ [VA]}$$



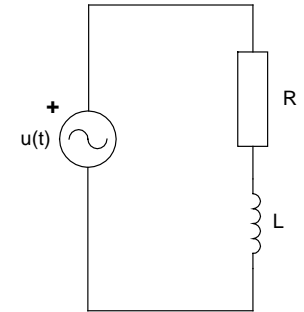
Početna stranica



## 9. zadatak

Trošilo omskog otpora R i induktiviteta L vezano je na generator izmjeničnog napona efektivne vrijednosti 100 [V] i frekvencije 50 [Hz]. Ako se paralelno trošilu veže kondenzator kapaciteta C = 138 [μF], efektivna vrijednost struje generatora će se smanjiti na polovinu prvobitne vrijednosti i bit će u fazi s naponom generatora. Odredite:

- otpor i induktivitet trošila
- djelatnu snagu koje trošilo uzima iz mreže kada mu nije paralelno priključen kondenzator
- izraz za trenutnu vrijednost struje kroz kondenzator kada je priključen paralelno trošilu

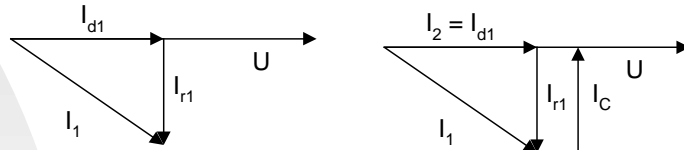


Početna stranica



## Rješenje zadatka

- Vektorski dijagram struja za prvi slučaj i kada se trošilu priključi paralelno kondenzator:



- Da bi u drugom slučaju ukupna struja  $I_2$  bila u fazi s naponom genaratora mora biti zadovoljeno:

$$I_C = I_{r1}$$

- Struja u drugom slučaju je manja za polovicu:

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1 = I_{d1} = I_1 \cdot \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{2}$$

- Struja kroz kondenzator može se odrediti kao:

$$I_C = U \cdot \omega \cdot C = 100 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 138 \cdot 10^{-6} = 4.33 \text{ [A]}$$

Početna stranica



- Iz vektorskog dijagrama moguće je odrediti struju  $I_1$  kao:

$$I_1 = \frac{I_C}{\sin \varphi} \quad \sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I_1 = \frac{4.33}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 5 \text{ [A]}$$

- Otpor trošila, odnosno induktivitet trošila:

$$R = Z \cdot \cos \varphi = \frac{U}{I_1} \cdot \cos \varphi = \frac{100}{5} \cdot \frac{1}{2} = 10 \text{ [}\Omega\text{]}$$

$$X_L = Z \cdot \sin \varphi = \frac{U}{I_1} \cdot \sin \varphi = \frac{100}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 17 \text{ [}\Omega\text{]}$$

$$X_L = \omega \cdot L \Rightarrow L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{17}{2 \cdot \pi \cdot 50} = 54.4 \text{ [mH]}$$

- Radna snaga trošila, odnosno radna snaga izvora :

$$P = I_1^2 \cdot R = 5^2 \cdot 10 = 250 \text{ [W]}$$

- Struja kroz kondenzator u vremenskoj domeni :

$$i_C(t) = 4.33 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314 \cdot t + 90^\circ) \text{ [A]}$$

Početna stranica

