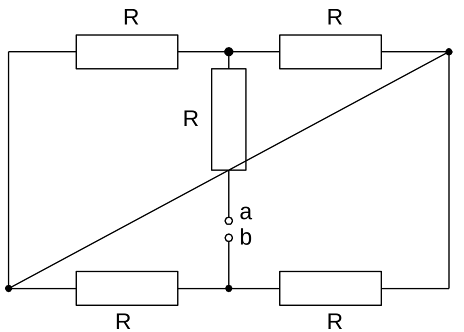
ИСТОСМЈЕРНИ КРУГОВИ

- Еквивалентни електрични отпор
- Омов закон
- Први Кирхофов закон
- Други Кирхофов закон
- Пад напона
- Једноставне мреже
- Реални напонски иззвор
- Потенцијал у истосмјерној мрежи
- Прилагођавање на максималну снагу
- Решавање линеарних мража:
  - Директна примјена Кирхофових закона
  - Метода контурних струја-струје пртљи
  - Тевенинова теорема
  - Метода напона чворова
  - Метода суперпозиције
  - Нортонова теорема
  - Милманова теорема
- Нелинеарни елемент у мрежи

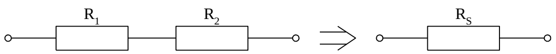
ЗАДАЦИ

1. Одредити укупни отпор између тачака а и б:



Уводни појмови:

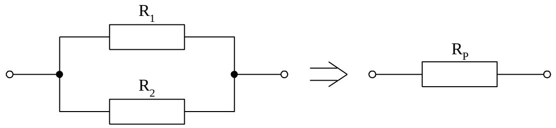
Еквивалентни отпор сериски везаних отпора:



$$R_S = R_1 + R_2$$

$$R_S = \sum_{i=1}^{n} R_i \rightarrow \text{Општи случај}$$

Еквивалентни отпор паралелно везаних отпора:

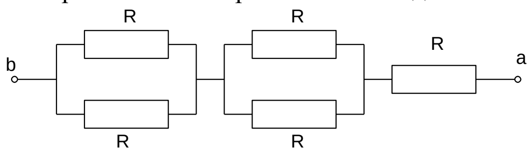


$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \rightarrow \text{Општи случај}$$

Решење:

Задана мрежа може се приказати на следећи начин:



Укупни отпор R_{ab} je:

$$R_{ab} = R \| R + R \| R + R$$

$$R_{ab} = \frac{R \cdot R}{R+R} + \frac{R \cdot R}{R+R} + R = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} + R$$

$$R_{ab} = 2 \cdot R$$

---

2. За задани струјни круг потребно је одредити све струје које теку у кругу те укупан отпор којим је оптерећен извор напајања.

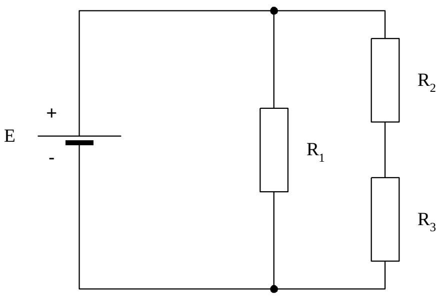
Познато:

R1 = 10 [Ω]

R2 = 4 [Ω]

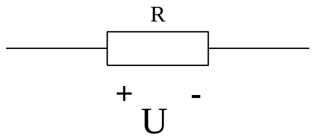
R3 = 8 [Ω]

E = 12 [V]



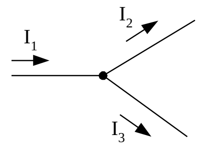
Уводни појмови:

Омов закон: $I = \frac{U}{R} [\mathrm{A}]$



Први кирхофов закон:

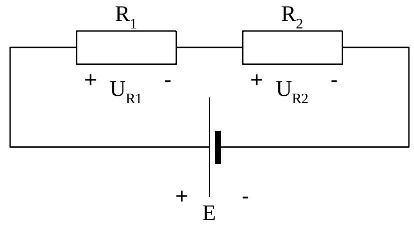
$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$



$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

Други кирхофов закон:

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$$



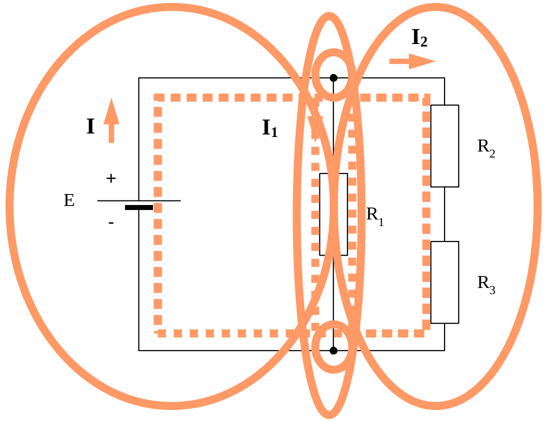
$$\mathbf{E - U_{R1} - U_{R2} = 0}$$

Задани струјни круг састоји се од:

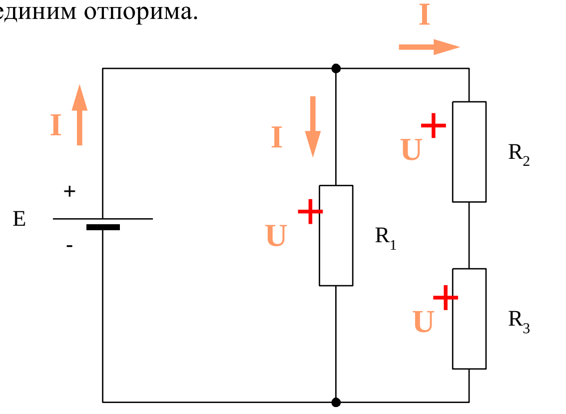
- Три гране
- Два чвора
- Три петље

У сваком од наведених грана тече струја:

- I (прва грана)
- I_2 (друга грана)
- I_2 (трећа грана)



Поступак решавања задатка се састоји од неколико корака:
Одерђују се струје које теку у струјном кругу, претпостављају се и уцртавају њихови смјерови те се на основу њих дефинишу падови напона на појединим отпорима.



Постављамо ($n_č$-1) jednačina првог кирхофовог закона.

$$I - I_1 - I_2 = 0$$

Постављамо (n_p-1) једначина другог кирхофовог закона.

$$E - U_{R1} = 0$$

$$U_{R1} - U_{R2} - U_{R3} = 0$$

Добија се систем једначина:

$$I - I_1 - I_2 = 0$$

$$E - I_1 \cdot R_1 = 0$$

$$I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 - I_2 \cdot R_3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$E - I_1 \cdot R_1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$I_1 = \frac{E}{R_1} = \frac{12}{10} = 1.2[\mathrm{A}]$$

$$I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 - I_2 \cdot R_3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$I_2 = \frac{I_1 \cdot R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1.2 \cdot 10}{4+8} = 1[\mathrm{A}]$$

$$I - I_1 - I_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$I = I_1 + I_2 = 1.2 + 1.0 = 2.2[\mathrm{A}]$$

Укупни отпор којим је оптерећен извор напајања може се израчунати као еквивалентни отпор прикључених отпора (R_1, R_2, R_3):

$$R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{23}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}\right)^{-1}$$

$$R = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{4+8}\right)^{-1} = 5.45[\Omega]$$

или као количник напона извора и струје коју тај извор даје:

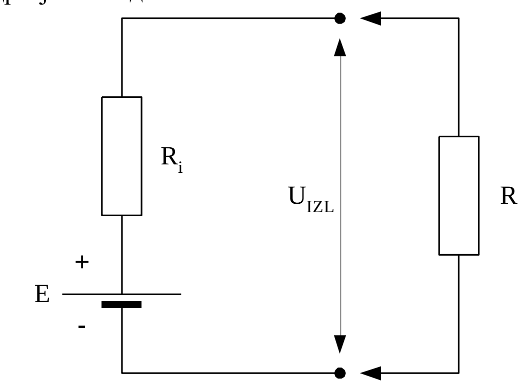
$$R = \frac{E}{I} = \frac{12}{2.2} = 5.45[\Omega]$$

---

3. Потребно је одредити параметре реалног напонског извора ако је познато да прикључењем потрошача на излазне стезаљке, излазни напон износи:

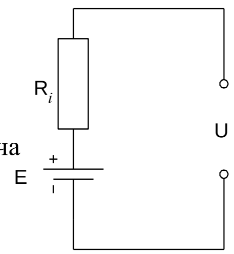
U_{izl} = 12 [V] при оптерећењу R = 20 [Ω]
U_{izl} = 10 [V] при оптерећењу R = 10 [Ω]

Нацртај излазну карактеристику тог извора и у њу уцртајте наведене тачке.



Уводни појмови:

Реални напонски извор:



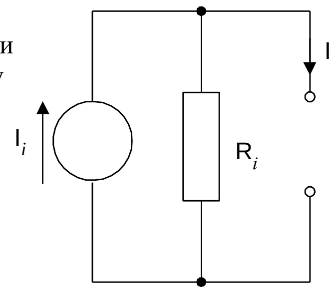
Напон на стезаљкама реалног напонског извора зависи од прикљученог отпора потрошача (отпор одређује струју I):

$$U = E - I \cdot R_i$$

Струја коју даје реални напонски извор зависи о прикљученом потрошачу R.

$$I = \frac{E}{R_i + R}$$

Реални струјни извор:



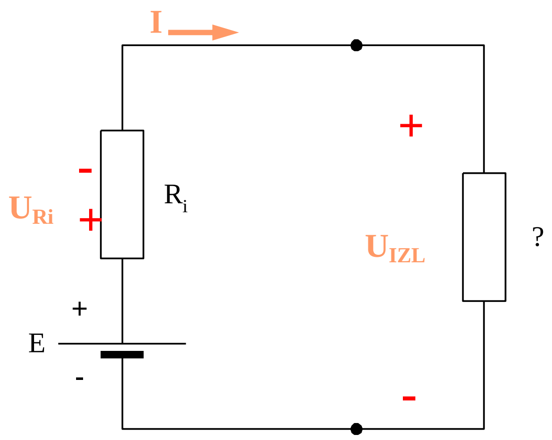
Струју коју даје реални струјни извор у мрежу зависи од отпора потрошача.

$$I = I_i \frac{R_i}{R_i + R}$$

Напон на стезаљкама извора зависи од потрошача.

$$U = I \cdot R = I_i \frac{R_i \cdot R}{R_i + R}$$

Када се на реални напонски извор прикључи отпор, у кругу потече струја дефинисаног смјера те се на темељу смјера струје дефинишу и одговарајући падови напона на отпорима:



Једначина I Кирхофовог закона:

$$I = I_{Ri} = I_R$$

Једначина II Кирхофовог закона:

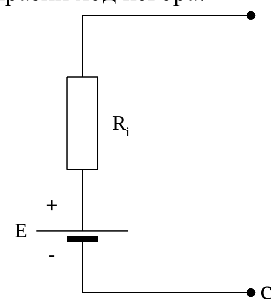
$$E - U_{Ri} - U_{IZL} = 0$$

Једначина излазног напона:

$$U_{IZL} = E - U_{Ri} = E - I \cdot R_i$$

$$\left(U_{IZL} = I \cdot R\right)$$

Празни ход извора:

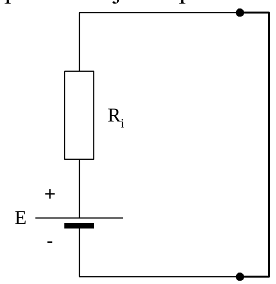


$$R \Rightarrow \infty$$

$$I = I_{PH} = 0[\mathrm{A}]$$

$$U_{IZL} = E - I \cdot R_i = E$$

Кратки спој извора:



$$R \Rightarrow 0$$

$$U_{IZL} = U_{KS} = 0[\mathrm{V}]$$

$$U_{IZL} = E - I \cdot R_i = 0[\mathrm{V}]$$

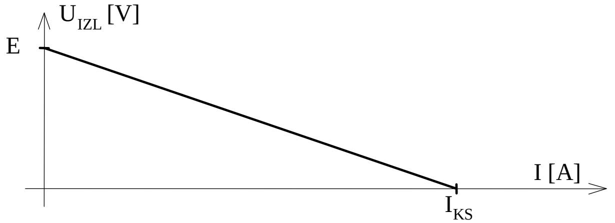
$$I = I_{KS} = \frac{E}{R_i}$$

Карактеристика извора:
Зависност излазног напона од оптерећења (излазне струје)

$$U_{IZL} = f(I)$$

$U_{IZL} = E - I \cdot R_i \rightarrow$ Једначина правца

Сјециште с ординатом - празни ход:
(I=0[A], U_{IZL}=E)
Сјециште с апсцисом - кратки спој:
(U_{IZL}=0[V], $I=I_{KS}$)

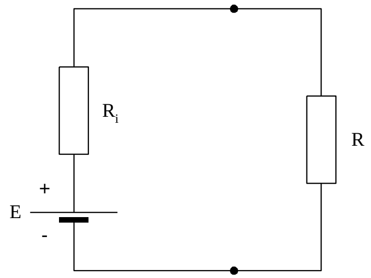


Оптерећење извора:

$$U_{IZL} = E - I \cdot R_i$$

$$I = \frac{E}{R_i + R}$$

$$U_{IZL} = E - \frac{E}{R_i + R} \cdot R_i = E \cdot \frac{R}{R_i + R}$$



У нашем случају задатак се своди на двије једначине са двије непознате, Е и R_i:

$$U_{IZL1} = E \cdot \frac{R_1}{R_i + R_1} \qquad U_{IZL2} = E \cdot \frac{R_2}{R_i + R_2}$$

Решење:

$$E = U_{IZL1} \cdot \frac{R_i + R_1}{R_1} \qquad E = U_{IZL2} \cdot \frac{R_i + R_2}{R_2} \Rightarrow$$

$$U_{IZL1} \cdot \frac{R_i + R_1}{R_1} = U_{IZL2} \cdot \frac{R_i + R_2}{R_2}$$

$$R_i = \frac{U_{IZL2} - U_{IZL1}}{\frac{U_{IZL1}}{R_1} - \frac{U_{IZL2}}{R_2}} = \frac{10-12}{\frac{12}{20} - \frac{10}{10}} = \frac{-2 \cdot 20}{-8} = 5[\Omega]$$

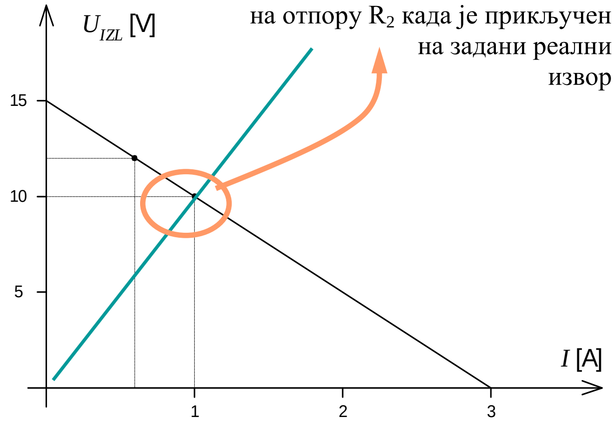
Познавајући вриједност унутрашњег отпора може се израчунати вриједност напона E:

$$E = U_{IZL1} \cdot \frac{R_i + R_1}{R_1} = 12 \cdot \frac{5+20}{20} = 15[\mathrm{V}]$$

Да би се добила карактеристика потребно је још израчунати струју кратког споја:

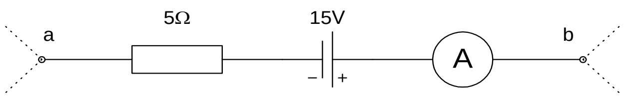
$$I_{KS} = \frac{E}{R_i} = \frac{15}{5} = 3[\mathrm{A}]$$

На пресјеку два правца одређују се струја и напон на отпору R_2 када је прикључен на задани реални извор



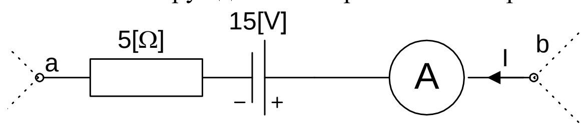
U-I карактеристика отпора R_2

4. Ако су чворови а и б према слици на потенцијалима φ_a = 10[V] и φ_b = 30[V], одредите струју коју мјери амперметар занемаривог отпора.



Решење:

На слици је задана грана, дио мреже кроз коју протиче струја I. Уз претпостављени смјер струје пад напона на отпору од 5Ω има приказани поларитет:

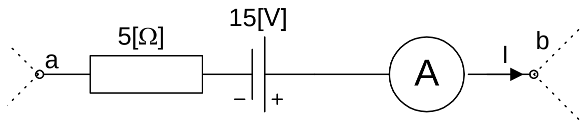


За овако дефинсани смјер струје вриједи:

$$\varphi_a = \varphi_b - 15 - I \cdot 5$$

$$I = \frac{\varphi_b - \varphi_a - 15}{5} = \frac{30-10-15}{5} = 1[\mathrm{A}]$$

смјер струје **поклапа** се с претпостављеним смјером струје.
За супротно дефинисан смјер струје вриједи:

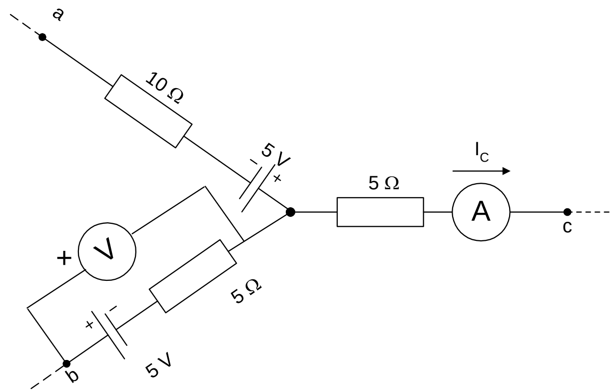


$$\varphi_a = \varphi_b - 15 + I \cdot 5$$

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b + 15}{5} = \frac{10-30+15}{5} = -1[\mathrm{A}]$$

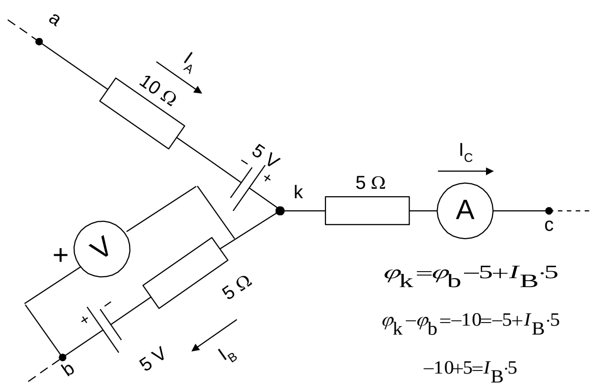
смјер струје **не поклапа** се с претпостављеним смјером струје.

5. У дијелу неке мреже приказане на слици идеални инструменти мјере струју $I_{Ampermetra}$=1[A] и напон $U_{Voltmetra}$= 10[V] означеног смјера односно поларитета. Одредите напон U_{ca}.



Решење:

Уз претпостављене смјерове струја и означену тачку k вриједи следеће:



$$\varphi_k = \varphi_b - 5 + I_B \cdot 5$$

$$\varphi_k - \varphi_b = -10 = -5 + I_B \cdot 5$$

$$-10 + 5 = I_B \cdot 5$$

$$I_B = \frac{-10+5}{5} = -1\ [\mathrm{A}]$$

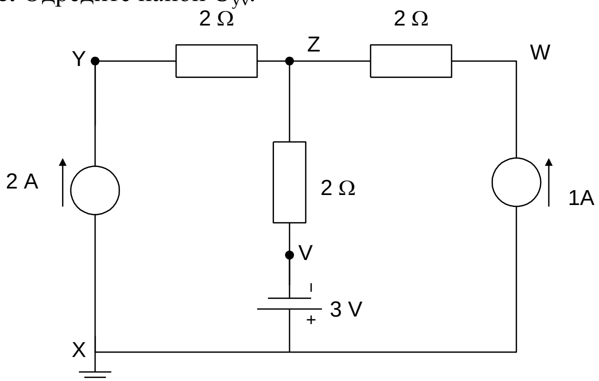
$$I_A = I_B + I_C = (-1) + 2 = 1\ [\mathrm{A}]$$

За напон U_{ca} вриједи:

$$\varphi_c = \varphi_a - I_A \cdot 10 + 5 - I_C \cdot 5 = \varphi_a - 1 \cdot 10 + 5 - 2 \cdot 5$$

$$\Rightarrow \quad U_{ca} = \varphi_c - \varphi_a = -15\ [\mathrm{V}]$$

6. Одредите напон U_{yv}.

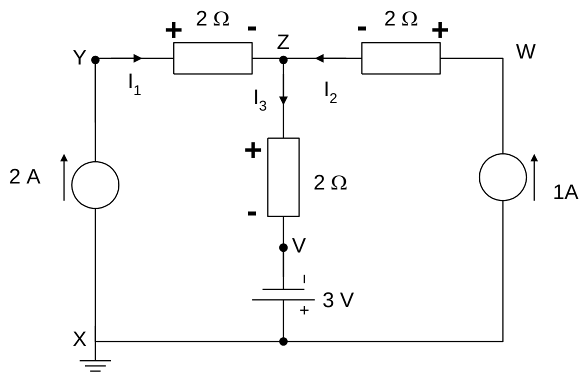


Решење:

Струјни извори одређују струју у гранама у којима се налазе. Са тим струјама су повезани и падови напона на отпорима.

Напон U_{yv} одређујемо тако да прво одредимо потенцијале тачака V и Y:

$$U_{YV} = \varphi_Y - \varphi_V \qquad \varphi_V = -3\ [\mathrm{V}]$$

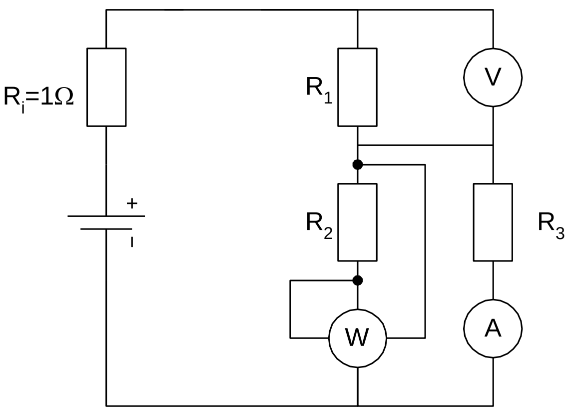


$$\varphi_Y = -3 + I_3 \cdot 2 + I_1 \cdot 2 = -3 + (I_1 + I_2) \cdot 2 + I_1 \cdot 2$$

$$\varphi_Y = -3 + (2+1) \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 7\ [\mathrm{V}]$$

$$U_{YV} = \varphi_Y - \varphi_V = 7 - (-3) = 10\ [\mathrm{V}]$$

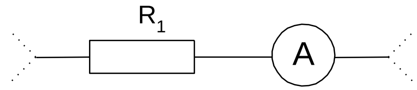
7. Инструменти укључени у мрежу према слици мјере U_v = 15 [V], I_A = 2 [A] и P= 5 [W]. Ако је познато да је R_2 = 5 [Ω] и R_i = 1[Ω] одредите снагу извора P_i.



Уводни појмови:

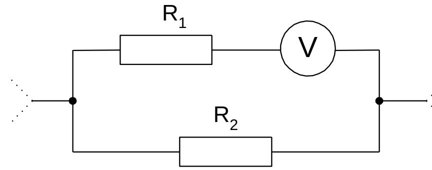
За идеалне инструменте вриједи:

Амперметар мјери струју у грани у којој се налази, а пад напона на стезаљкама амперметра је једнак нули (R_A<<).



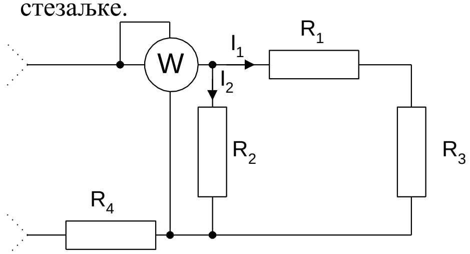
$$I_A = I_{R1} \qquad U_A = 0$$

Волтметар мјери напон између двију стезаљки на које је спојен, а струја у грани у којој се налази волтметар једнака је нули (R_B>>).



$$I_V = I_{R1} = 0 \qquad U_V = U_{R2}$$

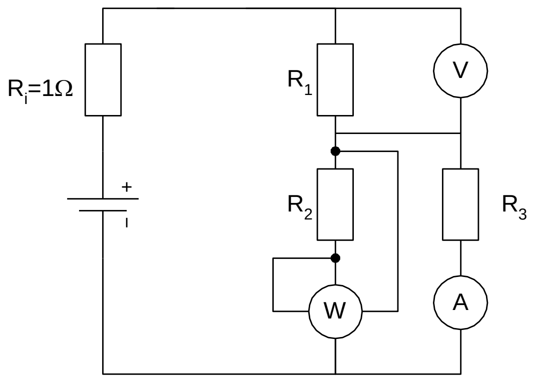
Ватметар мјери умножак $U_W \cdot I_W$, односно умножак струје која пролази његовим струјним стезаљкама и напона на који су спојене његове напонске стезаљке.



$$I_W = I_1 + I_2 \qquad U_W = U_{R2}$$

Решење:

Из мреже је видљиво да ватметар мјери снагу на отпору R_2. Помоћу те снаге могуће је одредити струју I_2 и напон U_2.



$$P=I_2^2\cdot R_2=\frac{U_2^2}{R_2}=U_2\cdot I_2$$

$$I_2=\sqrt{\frac{P}{R_2}}=\sqrt{\frac{5}{5}}=1\ [\mathrm{A}]$$

$$U_2=\sqrt{P\cdot R_2}=\sqrt{5\cdot 5}=5\ [\mathrm{V}]$$

На отпору R_3 влада исти напон као и на R_2 па се може одредити снага P_3:

$$U_2=U_3=5\ [V];\quad I_3=I_A=2\ [\mathrm{A}]$$

$$P_3=U_3\cdot I_3=5\cdot 2=10\ [\mathrm{W}]$$

Из познатог напона на отпору R_1 те укупне струје у кругу могу се одредити снаге на отпорима R_1 и R_i:

$$U_1=U_V=15\ [\mathrm{V}]$$

$$I_1=I_i=I_2+I_3=1+2=3\ [A]$$

$$P_1=U_1\cdot I_1=3\cdot 15=45\ [\mathrm{W}]$$

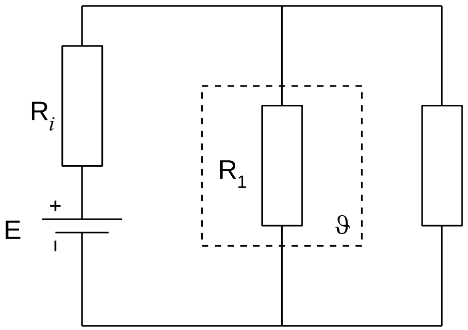
$$P_i=I_i^2\cdot R_i=3^2\cdot 1=9\ [\mathrm{W}]$$

Укупна снага извора:

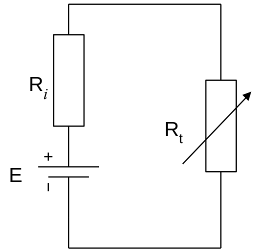
$$P_{izvora}=P_i+P_1+P_2+P_3=9+45+5+10=69\ [\mathrm{W}]$$

---

8. Отпор R_1 у комбинацији према слици налази се у посуди у којој влада промјењива температура. При температури υ= 20°C, R_1 = 500 [Ω], R_2 = 300[Ω]. При којој температури у посуди ће паралелна комбинација отпора R_1 и R_2 примити максималну снагу из извора E = 200 [V] и R_i = 200 [Ω]. Израчунајте колика је та снага ако је $\alpha = 0.0025\ C^{o-1}$.



На потрошачу ће се трошити максимална снага у случају када је отпор читавог потрошача једнак унутрашњем отпору извора.



$$P_{MAX}\ \Rightarrow\ R_t=R_i=200\,[\Omega]$$

$$R_t=R_1\|R_2$$

$$\frac{1}{R_t}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

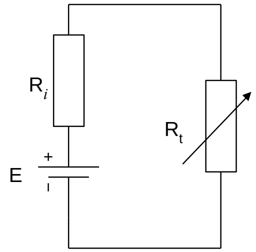
$$R_1=R_{1(20°C)}\cdot(1+\alpha\cdot(\vartheta-\vartheta_0))$$

Да би се на потрошачу разложила максимална снага R_1 износи: $\frac{1}{200}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{300}\Rightarrow R_1=600\,[\Omega]$

Отпор R_1 има вриједност од 600 [Ω] при температури:

$$600=500(1+0.0025(\vartheta-20))\ \Rightarrow\ \vartheta=100°C$$

Максимална снага може се сада израчунати на следећи начин:



$$R_{ukupno}=R_t+R_i=400\,[\Omega]$$

$$I=\frac{E}{R_{ukupno}}=\frac{200}{400}=0.5\ [\mathrm{A}]$$

$$P_{MAX}=I^2\cdot R_t=0.5^2\cdot 200=50\ [\mathrm{W}]$$

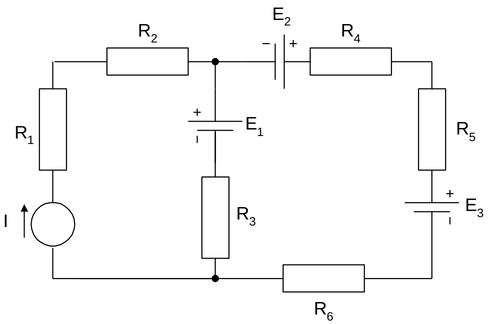
Корисност је дефинисана као однос корисне снаге (снага која се троши на потрошачу) и укупне снаге коју даје извор. Снага која се разлаже на унутрашњем отпору реалног напонског извора представља губитак.

$$\eta=\frac{P_t}{P_i}=\frac{I^2\cdot R}{E\cdot I}=\frac{50}{200\cdot 0.5}=0.5=50\%$$

---

9. Одредите струје које теку у свим гранама мреже на слици и напон на стезаљкама струјног извора. Задано:

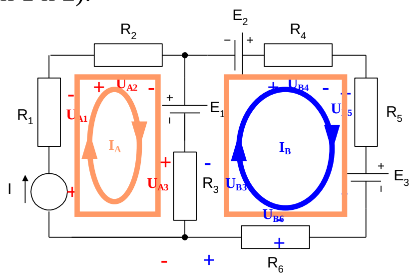
R_1 = 1 [Ω]
R_2 = 1 [Ω]
R_3 = 2 [Ω]
R_4 = 4 [Ω]
R_5 = 3 [Ω]
R_6 = 1 [Ω]
E_1 = 2 [V]
E_2 = 1 [V]
E_3 = 3 [V]
I = 1 [A]



Директна примјена Кирхофових закона у анализи сложенијих мрежа постаје врло компликована због великог броја једначина које треба ријешити.
Због тога је развијена метода контурних струја која поступак анализе разлаже на два корака те се тако на умјетан начин смањује величина система једначина који се решава.
У основним цртама тај се поступак састоји од следећих корака:

1. Дефинишу се независне петље (контуре) у мрежи.
2. За сваку петљу се дефинишу струје које кроз њу теку.
3. Расписују се једначине II Кирхофовог закона за дефинисане петље чиме се добија одговарајући систем једначина.
4. Рјешавањем тог система једначина долази се до вриједности контурних струја.
5. Расписују се и рјешавају једначине које повезују контурне струје и струје које теку у појединим гранама заданог струјног круга.

Дефинисање независних петљи (контура) и смјерова контурних струја, те одговарајућих падова напона (кораци 1 и 2):



Будући да се у првој контури (у независној грани) налази струјни извор вриједи:

$$I_A=I$$

Једначина II Кирхофовог закона за 2. контуру :

$$-I_A\cdot R_3+I_B\cdot R_3+I_B\cdot R_6+I_B\cdot R_5+I_B\cdot R_4-E_1+E_3-E_2=0$$

Решењем овог система једначина добијају се вриједности контурних струја (корак 4):

$$I_B\cdot R_3+I_B\cdot R_6+I_B\cdot R_5+I_B\cdot R_4=I_A\cdot R_3+E_1-E_3+E_2$$

$$I_B=\frac{I_A\cdot R_3+E_1-E_3+E_2}{R_3+R_6+R_5+R_4}$$

Када се у добијене изразе уврсте бројеви:

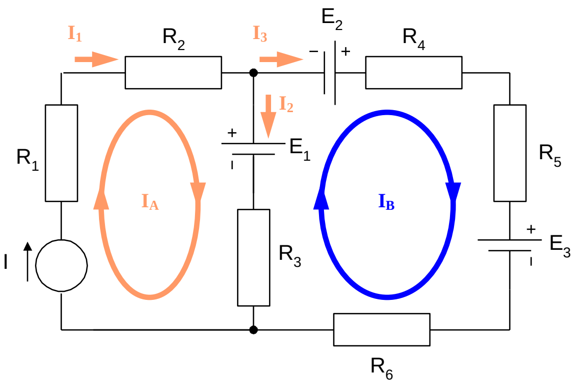
$$I_A=I=1\,[\mathrm{A}]$$

$$I_B=\frac{1\cdot2+2-3+1}{2+1+3+4}=0.2\,[\mathrm{A}]$$

$$I_A = 1\,[\mathrm{A}]$$

$$I_B = 0.2\,[\mathrm{A}]$$

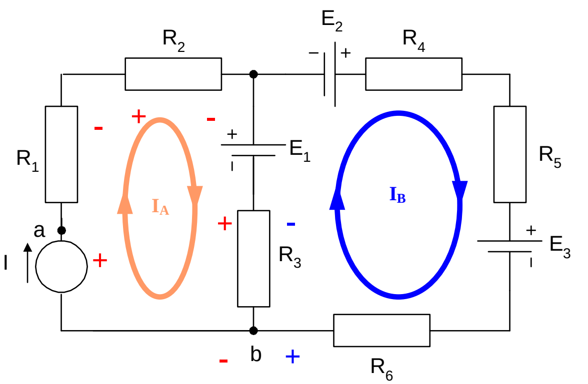
У последњем је кораку потребно контурне струје повезати са стварним струјама које теку у кругу (корак 5).
Смјерови струја које теку у појединим гранама могу се дефинисати према слици:



Из слике је видљива веза између контурних струја и струја грана:

$I_1=I_A=1\,[\mathrm{A}]$ $\quad I_3=I_B=0.2\,[\mathrm{A}]$ $\quad I_2=I_A-I_B=1-0.2=0.8\,[\mathrm{A}]$

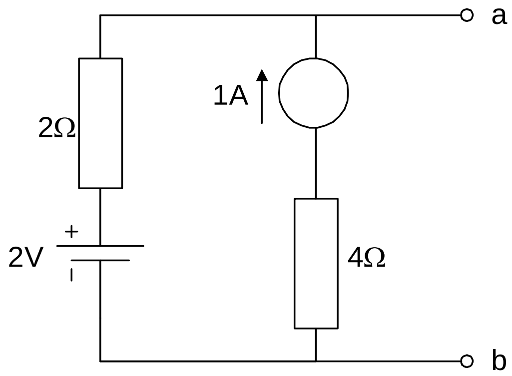
Напон на стезаљкама струјног извора, U_{ab}:



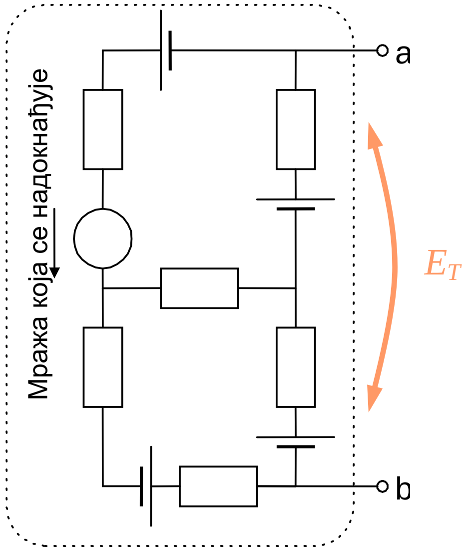
$$U_{ab}=I_A\cdot R_3-I_B\cdot R_3+E_1+I_A\cdot R_2+I_A\cdot R_1$$

$$U_{ab} = 1\cdot 2 - 0.2\cdot 2 + 2 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 5.6\,[\mathrm{V}]$$

10. Надокнадите приказану мрежу Тевениновим извором с обзиром на стезаљке а и б.



Било који дио активне линеарне мреже може се надокнадити с обзиром на двије стезаљке (а и б) реалним напонским извором, чији унутрашњи напон E_T (Тевенинов напон) и унутрашњи отпор R_T (Тевенинов отпор) одређујемо из задане мреже:

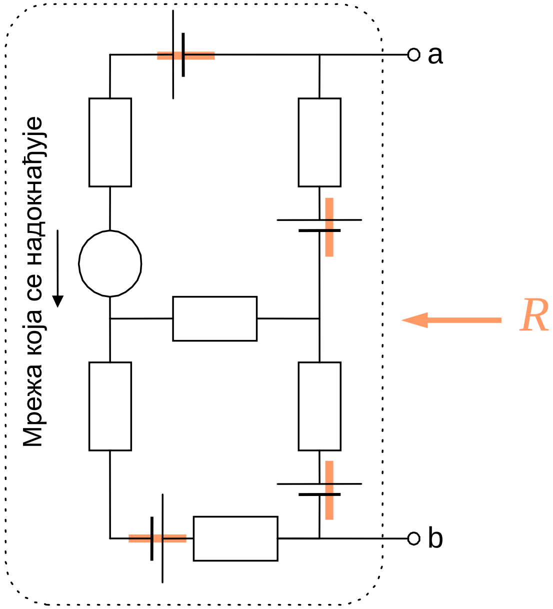


Тевенинов напон E_T одређујемо тако да израчунамо или измјеримо напон U_{abo} на отвореним стезаљкама а-б линеарне мреже.

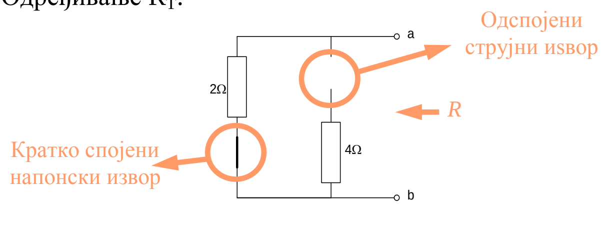
Ако је Uab0 > 0, ET има плус према “a“

Ако је Uab0 < 0, ET има плус према ”b”

Тевенинов отпор R_T одредимо тако да кратко спојимо све напонске изворе и искључимо све струјне изворе те онда израчунамо или измјеримо укупни отпор између тачака а и б.

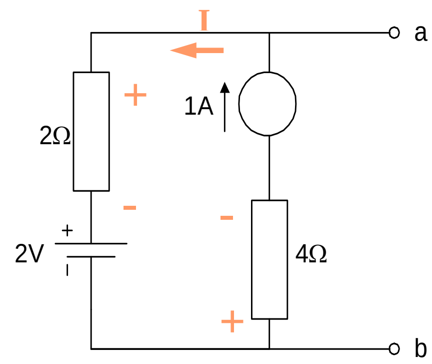


Одређивање параметара надокнађујућег реалног напонског извора.
Одређивање R_T:



$$R_T=2\,[\Omega]$$

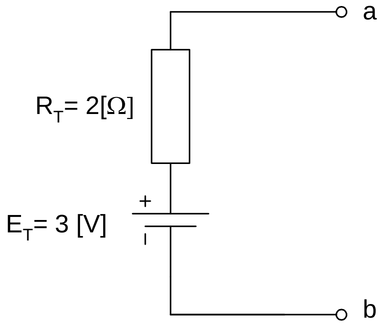
Одређивање напона Тевенина:



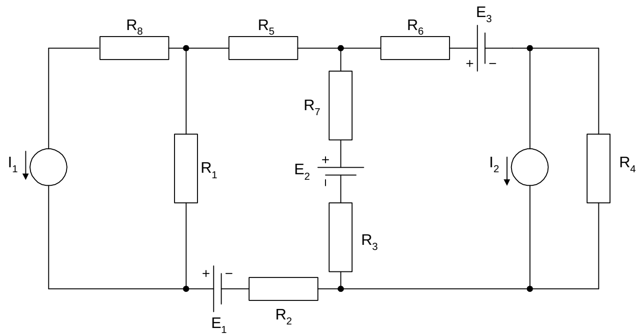
У затвореној контури тече струја коју диктира струјни извор.
Уз овакав смјер струје падови напона су:
Тевенинов напон онда се може одредити као:

$$E_T=U_{ab0}=+2+0.52=+3\,[\mathrm{V}]$$

Тевенинов надокнадни спој:



11. У мрежи према слици одредите струју кроз отпор R_7 примјеном Тевенинове теореме. Задано:

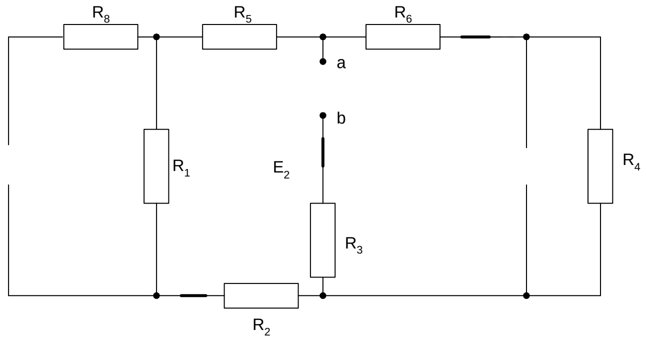


$R_1 = R_2 = 25\,[\Omega]$	$R_6 = 40\,[\Omega]$	$E_2 = 10\,[V]$
$R_3 = R_4 = 30\,[\Omega]$	$R_8 = 10\,[\Omega]$	$E_3 = 11\,[V]$
$R_5 = R_7 = 20\,[\Omega]$	$E_1 = 25\,[V]$	$I_1 = I2 = 200[mA]$

Решење:

Да би се одредила струја кроз отпор R_7, потребно је отпор R_7 искључити из мреже а остатак мреже надокнадити помоћу реалног напонског извора.

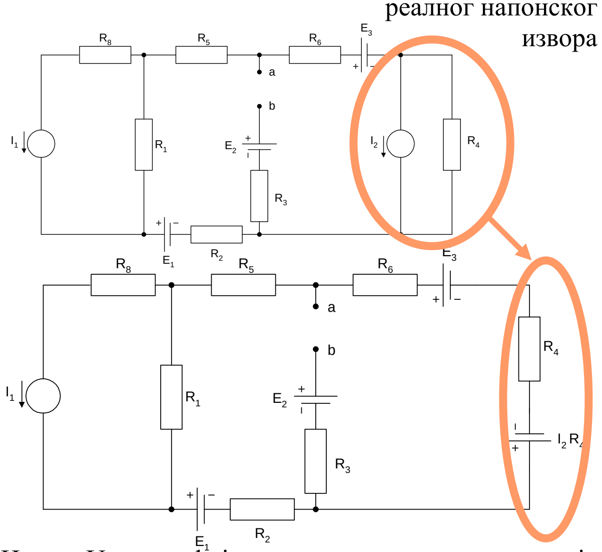
Одређивање R_T:



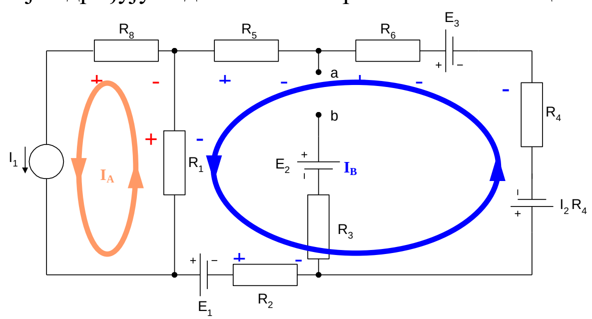
$$R_T=(R_5+R_1+R_2)\,\|\,(R_4+R_6)+R_3=57.4\,[\Omega]$$

Одређивање E_T, односно напона U_{abo}:

Реални струјни извор надокнађује се помоћу реалног напонског извора



Напон U_{abo} одређујемо методом контурних струја које одређују падове напона приказаних на слици.



Одређивање I_A и I_B:.

$$I_A=I_1=200\,[\mathrm{mA}]$$

$$-I_A\cdot R_1+I_B\cdot(R_1+R_5+R_6+R_4+R_2)-E_3+I_2\cdot R_4+E_1=0$$

$$I_B=-\frac{16}{115}\,[\mathrm{A}]$$

Уврштавањем у израз за напон U_{abo} добијамо:

$$E_T=U_{ab0}=I_B\cdot(R_2+R_1+R_5)-I_A\cdot R_2+E_1-E_2$$

$$E_T=-\frac{16}{115}\cdot(10+10+20)-0.2\cdot 10+25-10$$

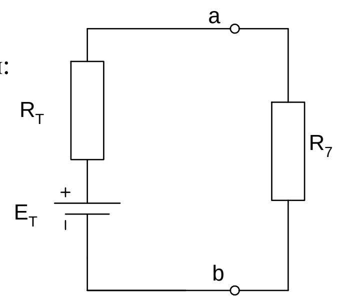
$$E_T=7.74\,[\mathrm{V}]$$

Након што су се одредили елементи Тевениновог надокнађујућег споја цијела мрежа се може приказати на следећи начин:

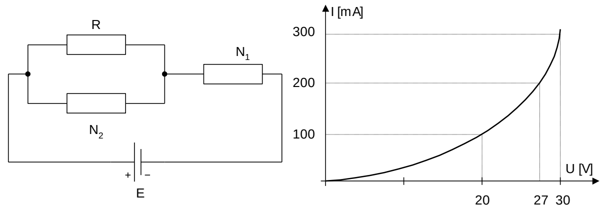
Струја која тече у струјном кругу износи:

$$I_7=\frac{E_T}{R_T+R_7}$$

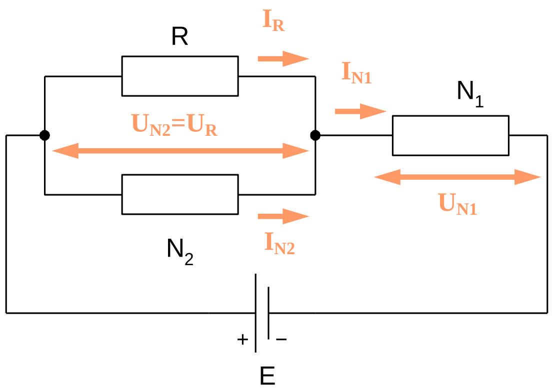
$$I_7=\frac{7.74}{57.74+20}=100\,[\mathrm{mA}]$$



12. У мрежи према слици кроз отпорник Р = 200 [Ω] тече струја I_R = 100 [mA]. Одредите снагу извора Е ако нелинеарни елементи N_1 и N_2 имају исту V-A карактеристику приказану сликом.



За мрежу с нелинеарним елементима вриједе Кирхофови закони па се за приказану мрежу могу одредити струје и напони на појединим елементима:



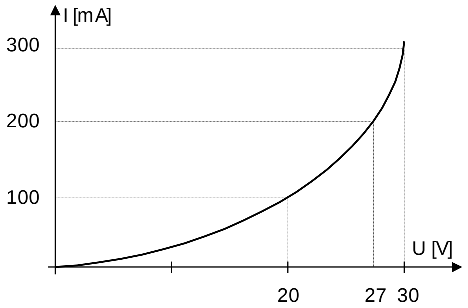
Будући да је позната струја која тече кроз отпор R може се одредити напон на отпору као и напон на нелинеарном елементу N_2:

$$U_R = I_R \cdot R = 100 \cdot 10^{-3} \cdot 200 = 20\,[\mathrm{V}]$$

$$U_{N2} = U_R = 20\,[\mathrm{V}]$$

Из U-I карактеристике нелинеарног елемента може се одредити струја кроз нелинеарни елемент N_2.

$$I_{N2} = 100\,[\mathrm{mA}]$$



I Кирхофов закон за чвор:

$$I_{N1} = I_R + I_{N2} = 100 + 100 = 200\,[\mathrm{mA}]$$

Из U-I карактеристике нелинеарног елемента може се одредити напон на нелинеарном елементу N_1.

$$U_{N1} = 27\,[\mathrm{V}]$$

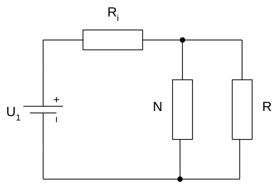
Напон извора:

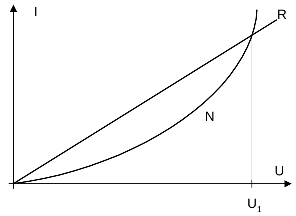
$$E = U_R + U_{N1} = 20 + 27 = 47\,[\mathrm{V}]$$

Снага извора

$$P = E \cdot I_{N1} = 47 \cdot 200 10^{-3} = 9.4\,[\mathrm{W}]$$

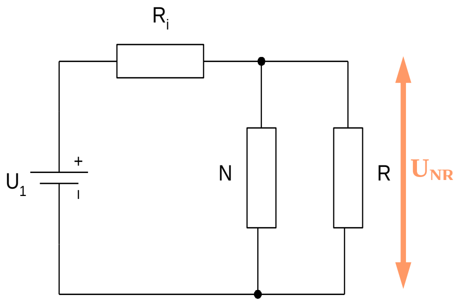
13. У струјном кругу према слици на отпору R троши се снага P_R, а на нелинеарном елементу N снага P_N. Одредите како се односе те снаге (P_R је већа/једнака/мања од P_N).



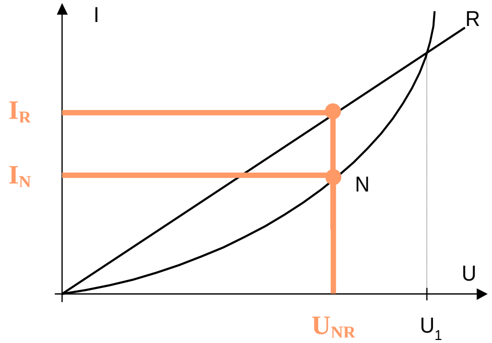


На нелинеарном елементу и отпору влада исти напон будући да су спојени у паралелу.

$$U_N = U_R = U_{NR}$$



Напон на паралели мањи је од напона извора U_1 будући да постоји пад напона на R_i.



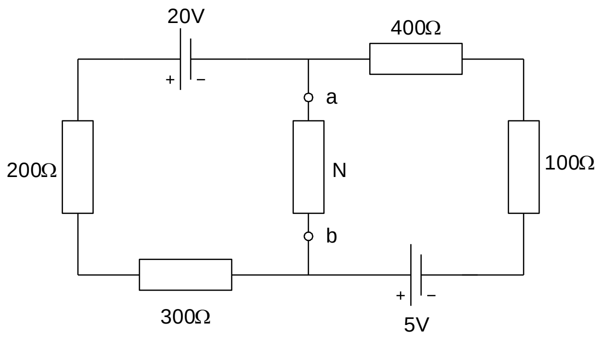
Ако се то уцрта на приказани график слиједи:

$$I_N < I_R$$

$$P_N < P_R$$

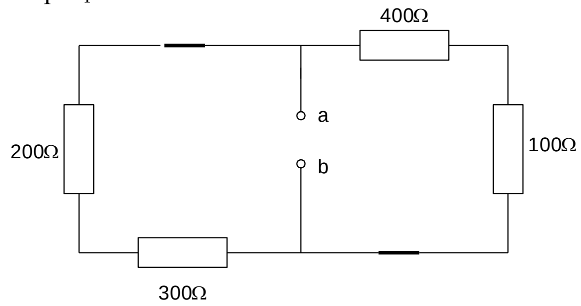
14. Нелинеарни елемент N с волтамперском карактеристиком даном у табеларном облику укључен је у мрежу приказану сликом. Ако је позитиван напон на елементу дефинисан када је напон $U_{ab}>0$, а позитивна струја као струја тече од а према б, одредите рад који се изврши на N у 45 минута. Одредите струје које теку кроз отпоре од 100 [Ω] и 300[Ω].

U[V]: -6,3; -6,1; -5,9; -5,7; -5,5; -5;...; 0; 0,1; 0,2; 0,4; 0,6
I[mA]; -35; -7; -1; -0,3; 0; 0;...; 0; 1; 5; 22; 66



Нелинеарни елемент одспојимо, а остатак мреже надокнађујемо помоћу Тевенина.

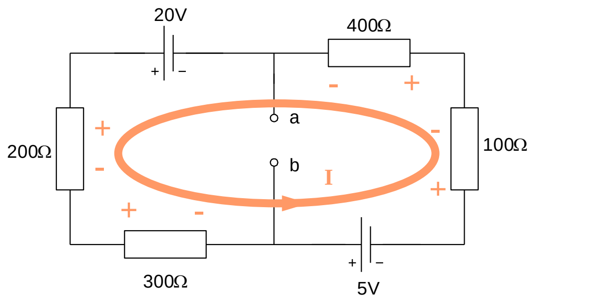
Отпор R_T:



$$R_T = (100 + 400) \| (200 + 300)$$

$$R_T = 250\,[\Omega]$$

Напон E_T:



Претпоставимо смјер струје која тече у кругу и с тим везане падове напона.
Помоћу II Кирхофовог закона одреди се струја I:

$$20 - 5 = I \cdot (100 + 400 + 200 + 300)$$

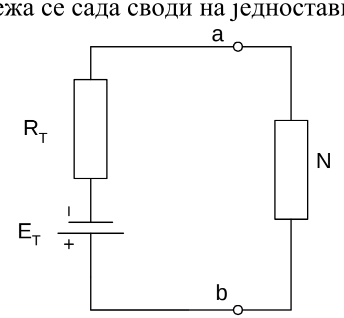
$$I = 15[\mathrm{mA}]$$

Уз познату струју I може се одредити напон E_T (U_{abo}) :

$$E_T = -5 - I \cdot 100 - I \cdot 400 = I \cdot 300 + I \cdot 200 - 20$$

$$E_T = U_{ab0} = -12.5[\mathrm{V}]$$

Цијела мрежа се сада своди на једноставну мрежу:



Из приказане мреже је видљиво да струја тече од б према а и да ће напон U_{ab} бити мањи од нуле.
Вањска карактеристика реалног напонског извора:

$$E_T = U_{ab0} = -12.5[\mathrm{V}]$$

$$I_{KS} = \frac{-12.5}{250} = -50[\mathrm{mA}]$$

U-I карактеристика нелинеарног елемента задана је табеларно.

Графикички приказане U-I карактеристике:

Пресјециште кривуља одређује струју и напон на N:

$$U_N = -6.2[\mathrm{V}]$$

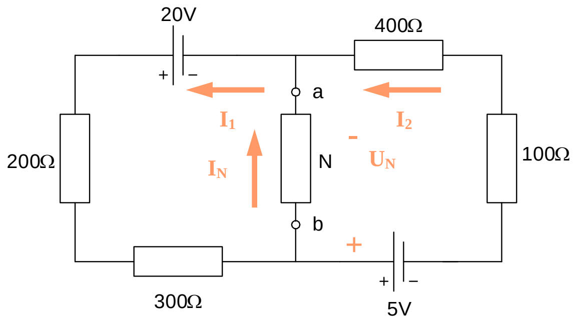
$$I_N = -25[\mathrm{mA}]$$

Рад:

$$A = U \cdot I \cdot t = (-6.2) \cdot (-25 \cdot 10^{-3}) \cdot 45 \cdot 60$$

$$A = 418.5[\mathrm{Ws}]$$

Из израчунатих вриједности видљиво је да струја тече од б према а и да је потенцијал тачке б виши него тачке а:



Струје у остатку мреже:

$$U_{ab} = U_N = -6.2 = I_1 \cdot 300 + I_1 \cdot 200 - 20$$

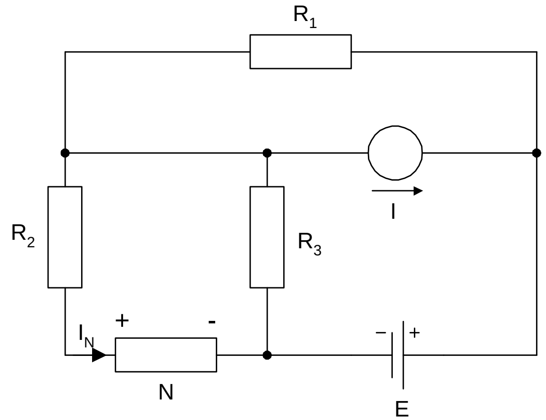
$$U_{ab} = U_N = -6.2 = -5 - I_2 \cdot 100 - I_2 \cdot 400$$

$$I_1 = 27.6[\mathrm{mA}]; \quad I_2 = 2.4[\mathrm{mA}]$$

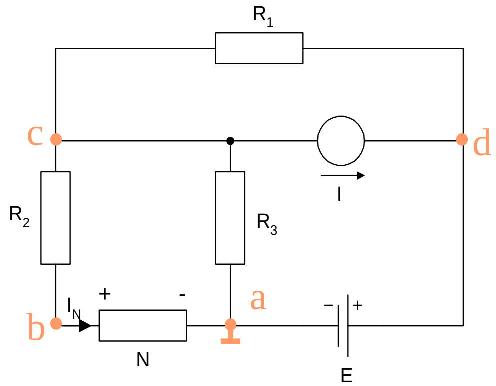
---

15. За мрежу према слици одредите интензитет струје I струјног извора да би кроз нелинеарни елемент текла струја I_N= 4 [mA] означеног смјера. U-I карактеристика задана је изразом $I_N = к \cdot U^{3/2}$, гдје је $к = 0.5 \cdot 10^{-6}$ [$AV^{-3/2}$].

Задано: R1 = 30 [kΩ] R2 = 20 [kΩ]
R3 = 60 [kΩ] E = 900 [V]



У мрежи означимо чворове, а чвор а као тачку референтног потенцијала:



$$\varphi_a = 0[\mathrm{V}]$$

Потенцијал тачке d:

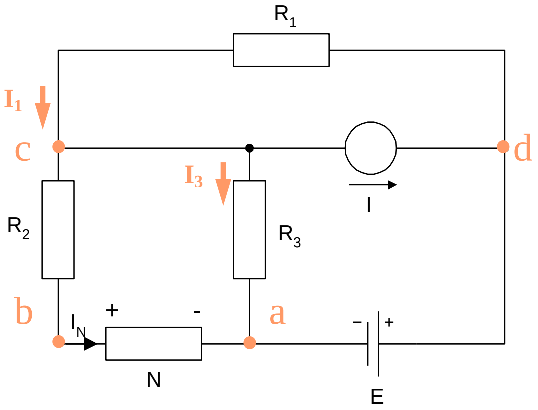
$$\varphi_d = \varphi_a + E = +900[\mathrm{V}]$$

Помоћу задане струје I_N могу се одредити потенцијали тачака b и c:

$$\varphi_b = \varphi_a + U_N = \varphi_c + \left(\frac{I_N}{k}\right)^{\frac{2}{3}} = 0 + \left(\frac{4 \cdot 10^{-3}}{0.5 \cdot 10^{-6}}\right)^{\frac{2}{3}} = +400[\mathrm{V}]$$

$$\varphi_c = \varphi_b + I_N \cdot R_2 = 400 + 4 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{3} = +480[\mathrm{V}]$$

Уз означене смјерове струја, одређујемо струје у појединим гранама и струју струјног извора I:



Потенцијали свих тачака

$$\varphi_a = 0[\mathrm{V}]$$

$$\varphi_b = +400[\mathrm{V}]$$

$$\varphi_c = +480[\mathrm{V}]$$

$$\varphi_d = +900[\mathrm{V}]$$

$$\varphi_d - \varphi_c = R_1 \cdot I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{\varphi_d - \varphi_c}{R_1}$$

$$\varphi_c - \varphi_a = R_3 \cdot I_3 \Rightarrow I_3 = \frac{\varphi_c - \varphi_a}{R_3}$$

$$I_1 = I_N + I_3 + I$$

$$I = \frac{\varphi_d - \varphi_c}{R_1} - I_N - \frac{\varphi_c - \varphi_a}{R_3} = \frac{900-480}{30 \cdot 10^3} - 4 \cdot 10^{-3} - \frac{480-0}{60 \cdot 10^3}$$

$$I = 14 - 4 - 8 = 2[\mathrm{mA}]$$

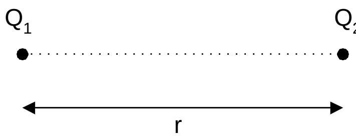
ЕЛЕКТРОСТАТИКА

- Кулонов закон.
- Хомогено и нехомогено електрично поље.
- Електрично поље наелектрисане бесконачне равнине.
- Електрично поље тачкастог наелектрисања.
- Електрично поље врло дугог равног проводника.
- Електрично поље наелектрисане кугле.
- Електрично поље наелектрисаног ваљка.
- Веза електричног поља и потенцијала.
- Електрични потенцијал.
- Потенцијална енергија.
- Рад.
- Закон о очувању енергије.
- Спојеви кондензатора.

ЗАДАЦИ:

1. Два тачкаста наелектрисања истог предзнака налазе се у зраку на удаљености r један од другога. Одредити интензитет, смјер и оријентацију дјеловања силе између наелектрисања.

Q1 = 85 [μC]
Q2 = 16.6 [nC]
r = 6.5 [cm]

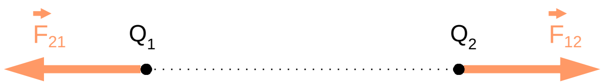


Уводни појмови:

Два тачкаста наелектрисања, истог предзнака, дјелују један на другога одбојном електричном силом и то:

Наелектрисање Q_1 дјелује на наелектрисање Q_2 одбојном силом F_{12}.

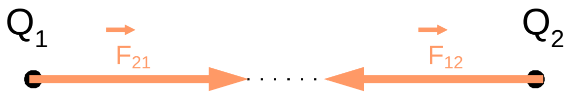
Наелектрисање Q_2 дјелује на наелектрисање Q_1 одбојном силом F_{21}.



Два тачкаста наелектрисања различитог предзнака, дјелују један на другога привлачном електричном силом и то:

Наелектрисање Q_1 дјелује на наелектрисање Q_2 привлачном силом F_{12}.

Наелектрисање Q_2 дјелује на наелектрисање Q_1 привлачном силом F_{21}.



По интензитету силе F_{12} и F_{21} су једнаке:

$$|\vec{F}|=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{r^2}$$

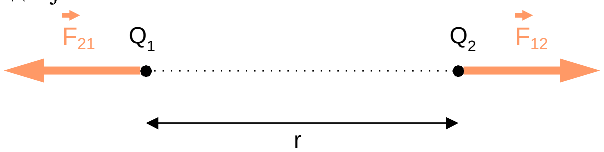
ε - диелектрична константа средине у којој се проблем посматра. $\varepsilon = \varepsilon_o \cdot \varepsilon_r$; ε_o је тзв. апсолутна диелектрична константа (вриједност 8.854×10^{-12} [As/Vm]) и представља диелектричност вакума, док ε_r представља релативну диелектричну константу која зависи о самој средини (за вакум ε_r =1).

r - удаљеност између наелектрисања Q_1 и Q_2

Електрична сила је величина која је представљана вектором који има свој интензитет, смјер и оријентацију.

Решење:

Наелектрисања су истог предзнака тако да су силе одбојне:



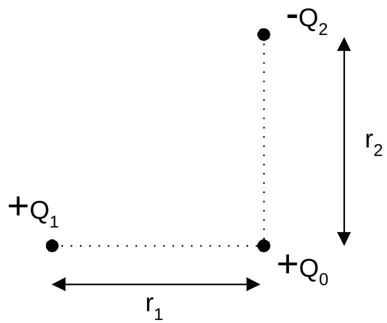
По интензитету силе су једнаке и износе:

$$|\vec{F}_{12}|=|\vec{F}_{21}|=|\vec{F}|=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{r^2}$$

$$|\vec{F}|=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot8.85410^{-12}\cdot1}\cdot\frac{85\cdot10^{-6}\cdot16.6\cdot10^{-9}}{\left(6.5\cdot10^{-2}\right)^2}=3[N]$$

2. Позитивно тачкасто наелектрисање Q_1 и негативно тачкасто наелектрисање Q_2 налазе се од позитивног тачкастог наелектрисања Q_o на удаљености $r_1 = r_2$. Њихов међусобни положај приказан је на слици. Одредите интензитет резултујуће силе на наелектрисање Q_o те скицирајте векторски дијаграм сила за то наелектрисање.

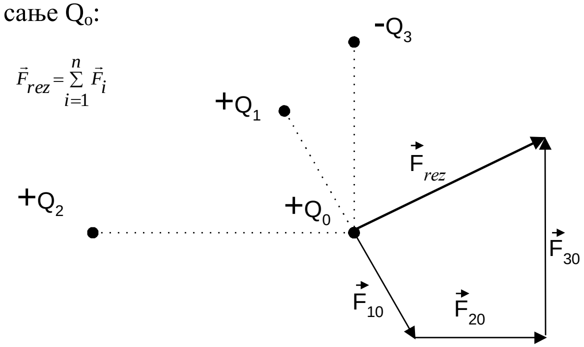
Q1 = 10-6 [C]
Q2 = - 2·10-6 [C]
Q0 = 10-6 [C]
r1 = r2 = 3 [cm]



Уводни појмови:

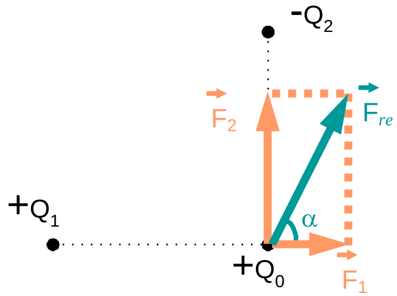
Ако на тачкасто наелектрисање дјелује више наелектрисања тада се за израчунавање укупне силе примјењује принцип суперпозиције.
Принцип суперпозиције каже да је резултујуће дјеловање свих наелектрисања једнако збиру доприноса појединих наелектрисања.
Укупна сила на наелектрисању Q_o једнака је векторском збиру свих сила које дјелују на наелектрисање Q_o:

$$\vec{F}_{rez}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$



Решење:

На наелектрисање Q_o дјелују два наелектрисања, Q_1 и Q_2. Наелектрисање Q_1 дјелује одбојном силом F_{10}:



Наелектрисање Q_2 дјелује привлачном силом F_{20}. Резултујућа сила једнака је векторском збиру сила F_{10} и F_{20}.

$$\vec{F}_{rez}=\sum_{i=1}^{2}\vec{F}_i=\vec{F}_{10}+\vec{F}_{20}=\left|\vec{F}_{rez}\right|\angle\alpha$$

Будући да су вектори сила F_{10} и F_{20} међусобно окомити вриједи:

$$\left|\vec{F}_{rez}\right|=\sqrt{\left|\vec{F}_{10}\right|^2+\left|\vec{F}_{20}\right|^2}$$

Интензитет сила F_{10} и F_{20}:

$$\left|\vec{F}_{10}\right|=F_{10}=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot 8.85410^{-12}\cdot 1}\cdot\frac{10^{-6}\cdot 10^{-6}}{\left(3\cdot 10^{-2}\right)^2}=10[\mathrm{N}]$$

$$\left|\vec{F}_{20}\right|=F_{20}=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot 8.85410^{-12}\cdot 1}\cdot\frac{2\cdot 10^{-6}\cdot 10^{-6}}{\left(3\cdot 10^{-2}\right)^2}=20[\mathrm{N}]$$

Интензитет резултујуће силе F_r:

$$F_{rez}=\sqrt{F_{10}^2+F_{20}^2}=\sqrt{10^2+20^2}=22.4[\mathrm{N}]$$

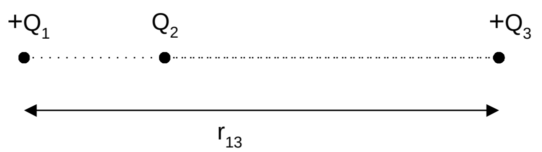
Будући да је сила вектор, њен смјер и оријентација се одређује из правоуглог троугла, односно:

$$tg\alpha=\frac{F_{20}}{F_{10}}\Rightarrow\alpha=63^\circ \qquad \boxed{\vec{F}_{rez}=22.4\angle 63^\circ[\mathrm{N}]}$$

---

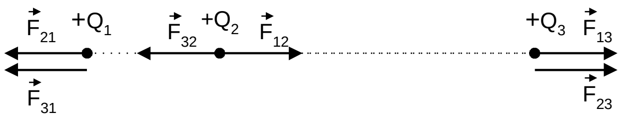
3. Три мала тијела, електричних наелектрисања $Q_1 = +4\cdot 10^{-11}$ [C], непознато електрично наелектрисање Q_2 и $Q_3 = +10^{-11}$ [C], заузимају у вакуму положај као што је приказано на слици. Одредите положај и електрично наелектрисање Q_2 тако да се сва тијела под дјеловањем кулонових сила налазе у мировању.

Задано: $r_{13} = 5$ [cm]

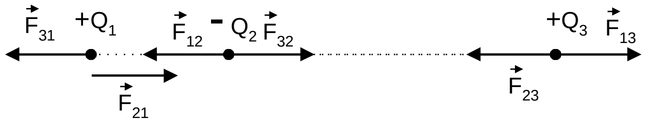


Решење:

Да би електрично наелектрисање било у мировању укупна електрична сила која на њега дјелује мора бити једнака 0.
Претпоставимо предзнак наелектрисања $Q_2 > 0$.



Из слике је видљиво да се услов мировања може испунити за наелектрисање Q_2, али уз позитивно наелектрисање Q_2 наелектрисања Q_1 и Q_3 неће бити у мировању. Због тога наелектрисање Q_2 мора бити негативно.



Услови мировања:

$$\vec{F}_{21}+\vec{F}_{31}=0 \Rightarrow \left|\vec{F}_{21}\right|=\left|\vec{F}_{31}\right|$$

$$\vec{F}_{12}+\vec{F}_{32}=0 \Rightarrow \left|\vec{F}_{12}\right|=\left|\vec{F}_{32}\right|$$

$$\vec{F}_{13}+\vec{F}_{23}=0 \Rightarrow \left|\vec{F}_{13}\right|=\left|\vec{F}_{23}\right|$$

односно:

$$\left|k\cdot\frac{Q_2\cdot Q_1}{r_{12}^2}\right|=\left|k\cdot\frac{Q_3\cdot Q_1}{r_{13}^2}\right| \Rightarrow Q_2\cdot r_{13}^2=Q_3\cdot r_{12}^2$$

$$\left|k\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{r_{12}^2}\right|=\left|k\cdot\frac{Q_3\cdot Q_2}{r_{23}^2}\right| \Rightarrow Q_1\cdot r_{23}^2=Q_3\cdot r_{12}^2$$

$$\left|k\cdot\frac{Q_1\cdot Q_3}{r_{13}^2}\right|=\left|k\cdot\frac{Q_3\cdot Q_2}{r_{23}^2}\right| \Rightarrow Q_1\cdot r_{23}^2=Q_2\cdot r_{13}^2$$

$$r_{13}=r_{12}+r_{23}$$

Решавањем овог система једначина добије се:

$$\boxed{\begin{aligned} r_{12} &= 3.33[\mathrm{cm}] \\ r_{23} &= 1.67[\mathrm{cm}] \end{aligned}} \qquad Q_2=4.4[\mathrm{pC}]$$

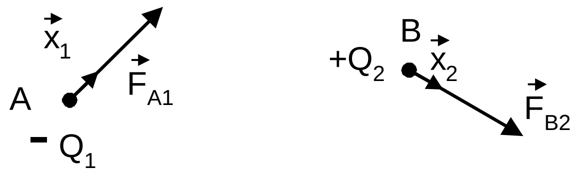
Будући да знамо да је наелектрисање Q_2 негативно, вриједи:

$$\boxed{Q_2=-4.4[\mathrm{pC}]}$$

---

4. У тачке A и B неког већ формираног поља унешена су наелектрисања Q_1 и Q_2. При томе је на наелектрисању Q_1 опажена сила F_{A1} у смјеру јединичног вектора x_1, док је на наелектрисању Q_2 опажена сила F_{B2}, у смјеру јединичног вектора x_2 (као на слици). Ако наелектрисања Q_1 и Q_2 замијене мјеста у простору (Q_1 дође у тачку B, а Q_2 у тачку A), одредите интензитете и смјерове сила на њих. Међусобно дјеловање наелектрисања Q_1 и Q_2 и обрнуто занемарујемо.

$Q_1 = -2$ [μC]
$Q_2 = 5$ [μC]
$F_{A1} = 0.04$ [N], u smjeru vektora $x1$
$F_{B2} = 0.05$ [N], u smjeru vektora $x2$



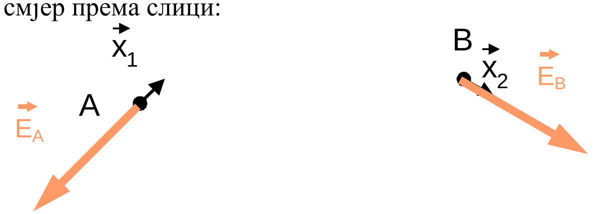
Решење:

Ако се тачкасто наелектрисање стави у простор у којем дјелује електрично поље, на наелектрисање ће дјеловати електрична сила. Веза између вектора електричног поља и електричне силе је:

$$\vec{F}_{el}=Q\cdot\vec{E}$$

У задатку из познатих вектора сила на наелектрисања Q_1 и Q_2 могу се одредити вектори електричног поља у тачкама A и B.
Код позитивног наелектрисања вектори силе и поља су у истом смјеру, а код негативног наелектрисања вектори силе и поља су у супротном смјеру:

Формирано електрично поље у тачкама A и B има смјер према слици:



Записано помоћу вектора смјера:

$$\vec{E}_A=\frac{\vec{F}_{A1}}{Q_1}=\frac{0.04\cdot\vec{x}_1}{-2\cdot 10^{-6}}=-20\cdot\vec{x}_1[\mathrm{kV/m}]$$

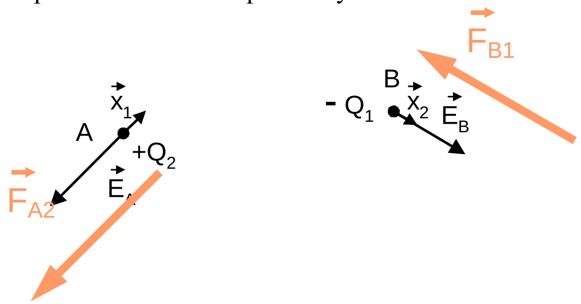
$$\vec{E}_B=\frac{\vec{F}_{B2}}{Q_2}=\frac{0.05\cdot\vec{x}_2}{5\cdot 10^{-6}}=10\cdot\vec{x}_2[\mathrm{kV/m}]$$

Након што наелектрисања замијене мјеста, на њих дјелују силе :

$$\vec{F}_{A2}=\vec{E}_A\cdot Q_2=-20\cdot 10^3\cdot \vec{x}_1\cdot 5\cdot 10^{-6}=-0.1\cdot \vec{x}_1[\,N]$$

$$\vec{F}_{B1}=\vec{E}_B\cdot Q_1=10\cdot 10^3\cdot \vec{x}_2\cdot\left(-2\cdot 10^{-6}\right)=-0.02\cdot \vec{x}_2[\,N]$$

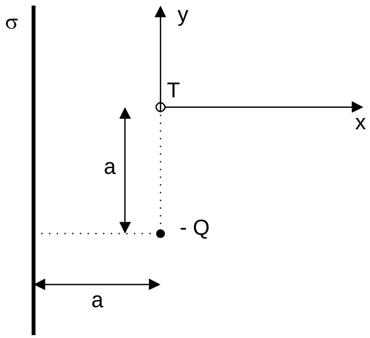
Вектори сила на наелектрисања у тачкама A и B:



Из слике је видљиво да је сила на негативано наелектрисање Q_1 супротног смјера од поља у тачки B, а на позитивано наелектрисање Q_2 истог смјера као и поље у тачки A.

5. Испред равнине наелектрисане наелектрисањем површинске густоће α налази се на удаљености a, негативано тачкасто наелектрисање Q. Одредите израз за вектор јачине електричног поља *E* (координатне оси задане према слици) које равнина и тачкасто наелектрисање стварају у тачки T, а такођер одредите и интензитет поља *E*. Задано:

σ = + 2 [nAs/m2]
Q = - 4π· [nAs]
a = 1 [m]



Уводни појмови:

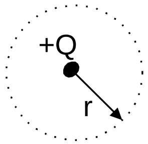
ХОМОГЕНО ЕЛЕКТРИЧНО ПОЉЕ је поље које у свим тачкама простора има једнак интензитет и смјер (примјер; равнодносно наелектрисана бесконачна равнина).

НЕХОМОГЕНО ЕЛЕКТРИЧНО ПОЉЕ је поље које у свим тачкама простора има различит интензитет и/или смјер (примјер; тачкасто наелектрисање, кугла, ваљак, итд.).

Гаусова теорема:

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S}=\sum_i Q_i$$

Примјена гаусове теореме за израчунавање ел. поља тачкастог наелектрисања:



$$D\cdot\oint_S dS=E\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot 4\cdot\pi\cdot r^2=Q$$

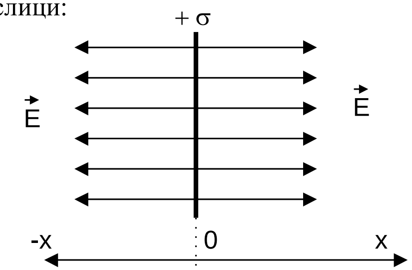
$$E=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot r^2}$$

Примјери хомогеног електричног поља

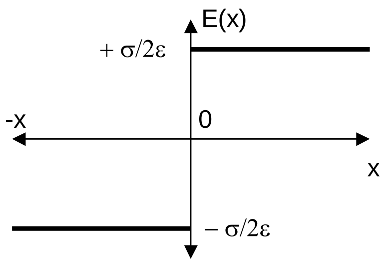
<u>Бесконачна равнина наелектрисана површинским наелектрисањем σ.</u>

У околини позитивно наелектрисане равнине поље изгледа као на слици:

$$\left|\vec{E}\right|=\frac{\sigma}{2\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}$$



Функција зависности поља о удаљености од равнине изгледа као на слици:

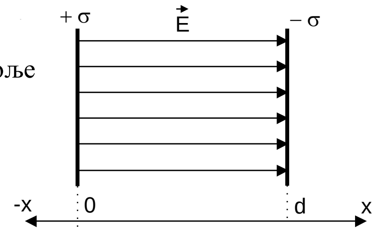


<u>Двије супротно наелектрисане паралелне равнине</u>

За овај случај поље изгледа као:

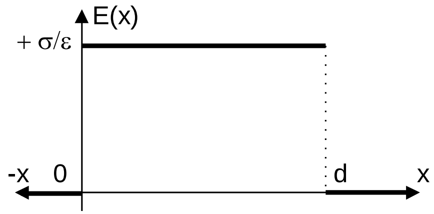
По интензитету поље између двије равнине је,

$$\left|\vec{E}\right|=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}$$



док изван нема поља.

Функција зависности поља о удаљености од позитивно наелектрисане равнине изгледа као на слици:



Примјери нехомогеног електричног поља

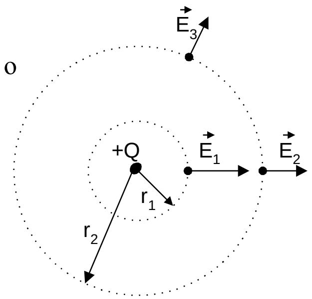
<u>Тачкасто наелектрисање</u>

У околини позитивно наелектрисаног тачкастог наелектрисања електрично поље за означене тачке има приказане смјерове:

Електрично поље зависи о удаљености од тачкастог наелектрисања:

$$\left|\vec{E}\right|=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\cdot\frac{1}{r^2}$$

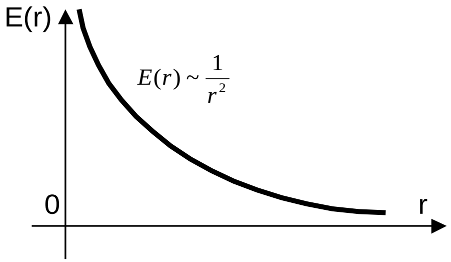
r- удаљеност од наелектрисања Q до посматране тачке.



За приказано поље тачкастог наелектрисања вриједи:

$$\left|\vec{E}_2\right|=\left|\vec{E}_3\right|$$

$$\left|\vec{E}_1\right|>\left|\vec{E}_2\right|$$



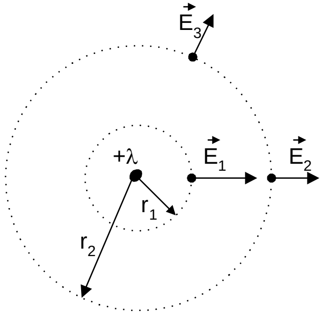
<u>Врло дуги равни проводник наелектрисан линијским наелектрисањем λ</u>

У околини позитивно наелектрисаног равног проводника електрично поље за означене тачке има приказане смјерове:

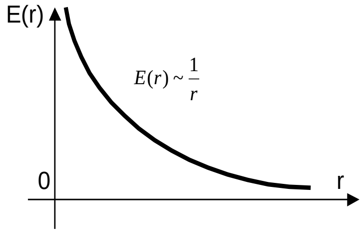
Електрично поље зависи о удаљености од проводника

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \cdot \frac{1}{r}$$

r- удаљеност од проводника до посматране тачке.



За приказано поље равног проводника:



$$\left|\vec{E}_2\right| = \left|\vec{E}_3\right|$$

$$\left|\vec{E}_1\right| > \left|\vec{E}_2\right|$$

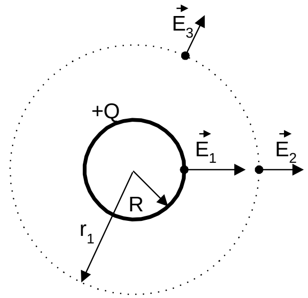
<u>Позитивно наелектрисана кугла</u>

У околини позитивно наелектрисане кугле полупречника R електрично поље за означене тачке има приказане смјерове:

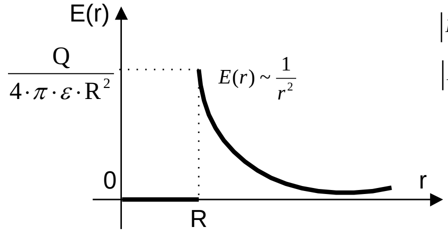
Унутар кугле нема поља, а изван се мијења по закону:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \cdot \frac{1}{r^2}$$

r - удаљеност од средишта кугле



За приказано поље кугле вриједи:



$$\left|\vec{E}_2\right| = \left|\vec{E}_3\right|$$

$$\left|\vec{E}_1\right| > \left|\vec{E}_2\right|$$

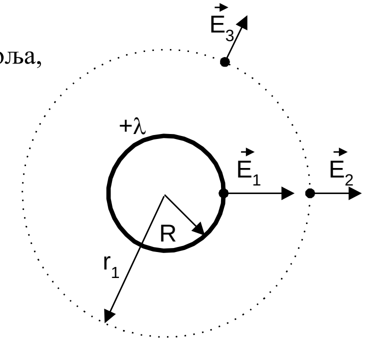
<u>Позитивно наелектрисани ваљак</u>

У околини позитивно наелектрисаног ваљка полупречника R електрично поље за означене тачке има приказане смјерове:

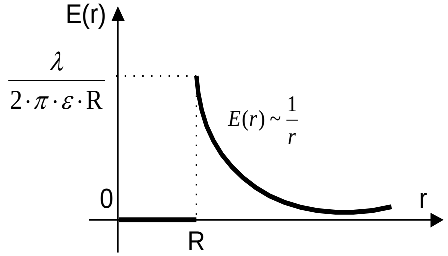
Унутар ваљка нема поља, а изван се мијења по закону:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \cdot \frac{1}{r}$$

r - удаљеност од средишта ваљка



За приказано поље ваљка :



$$\left|\vec{E}_2\right| = \left|\vec{E}_3\right|$$

$$\left|\vec{E}_1\right| > \left|\vec{E}_2\right|$$

Решење:

Поље у тачки T стварају два наелектрисана тијела, позитивно наелектрисана равнина и негативно тачкасто наелектрисање.

Укупно поље одређује се методом суперпозиције:

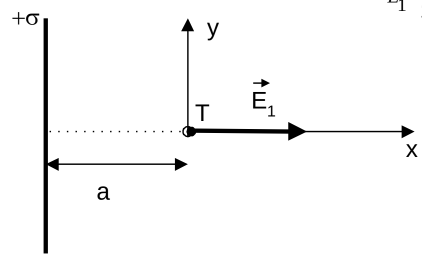
За свако појединачно тијело одређује се његов допринос (поље које би створило без других наелектрисаних тијела у близини).

Укупно поље једнако је векторској суми појединих поља.

Позитивно наелектрисана равнина ствара поље у тачки T:

Поље је у смјеру оси x и износи:

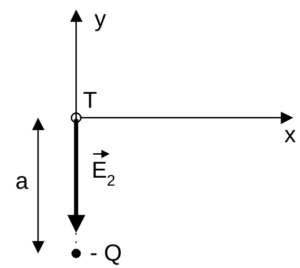
$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \cdot \vec{i}$$



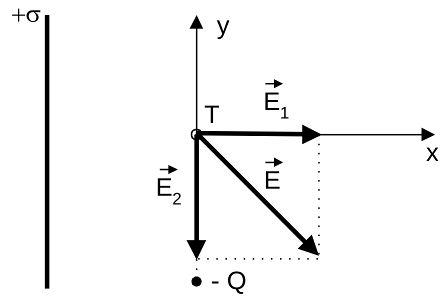
Негативно наелектрисано тачкасто наелектрисање ствара поље у тачки T:

Поље је у смјеру оси y и износи:

$$\vec{E}_2 = -\frac{|Q|}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot a^2} \cdot \vec{j}$$



Укупно поље једнако је векторском збиру поља:



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Уврстивши вриједности за поједина поља добија се укупно поље у тачки T:

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=\frac{\sigma}{2\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\cdot\vec{i}+\left(-\frac{|Q|}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot a^2}\cdot\vec{j}\right)$$

$$\vec{E}=\frac{2\cdot10^{-9}}{2\cdot8.85410^{-12}\cdot1}\cdot\vec{i}-\frac{4\cdot\pi\cdot10^{-9}}{4\cdot\pi\cdot8.85410^{-12}\cdot1\cdot1^2}\cdot\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{E}=113\cdot\vec{i}-113\cdot\vec{j}\,[\text{V/m}]}$$

Интензитет вектора поља одређује се као:

$$\left|\vec{E}\right|=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=\sqrt{113^2+113^2}=160[\text{V/m}]$$

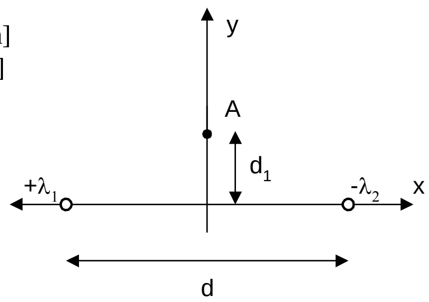
На други начин записан вектор поља:

$$\vec{E}=\left|\vec{E}\right|\angle\alpha \qquad \boxed{\vec{E}=160\angle-45°[\text{V/m}]}$$

6. Два дуга равна проводника, полупречника r_o занемариво малог у односу на њихов међусобни размак, наелектрисана су линијским наелектрисањима λ_1 и λ_2, предзнака приказаних на слици. Ако се у тачку A постави негативно тачкасто наелектрисање Q, одредите силу која дјелује на то наелектрисање.

Задано:

$\lambda1 = + 2$ [nAs/m]
$\lambda2 = - 4$ [nAs/m]
Q = - 4 [pAs]
d = 1 [m]
d1 = 0.25 [m]



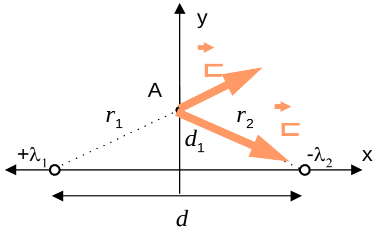
Решење:

На наелектрисање Q дјелује ел. поље које стварају два проводника.

$$\vec{F}=Q\cdot\vec{E}_A$$

Електрично поље E_A одређује се методом суперпозиције.

Лијеви проводник ствара ел. поље E_1, а десни проводник ел. поље E_2:



$$\left|\vec{E}_1\right|=\frac{\lambda_1}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot r_1}$$

$$\left|\vec{E}_2\right|=\frac{\lambda_2}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot r_2}$$

$$r_1=r_2=\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+d_1^2}$$

Укупно ел. поље у тачки A, E_A:

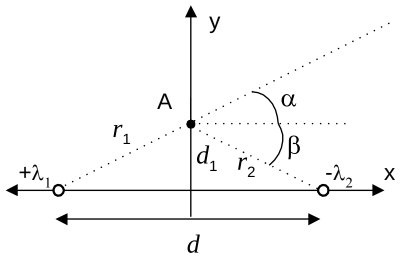
$$\vec{E}_A=\vec{E}_1+\vec{E}_2$$

Укупно поље најлакше је одредити ако оба вектора поља прикажемо помоћу јединичних вектора:

$$\vec{E}_1=\left|\vec{E}_1\right|\cdot\cos\alpha\cdot\vec{i}+\left|\vec{E}_1\right|\cdot\sin\alpha\cdot\vec{j}$$

$$\vec{E}_2=\left|\vec{E}_2\right|\cdot\cos\beta\cdot\vec{i}+\left|\vec{E}_2\right|\cdot\sin\beta\cdot\vec{j}$$

Углове α и β одређујемо из слике:



$$\cos\alpha=\frac{\frac{d}{2}}{r_1};\ \sin\alpha=\frac{d_1}{r_1};\ \alpha>0$$

$$\cos\beta=\frac{\frac{d}{2}}{r_2};\ \sin\beta=\frac{d_1}{r_2};\ \beta<0$$

Укупно ел. поље у тачки A, E_A:

$$\vec{E}_A=\left|\vec{E}_1\right|\cdot\cos\alpha\cdot\vec{i}+\left|\vec{E}_1\right|\cdot\sin\alpha\cdot\vec{j}+\left|\vec{E}_2\right|\cdot\cos\beta\cdot\vec{i}+\left|\vec{E}_2\right|\cdot\sin\beta\cdot\vec{j}$$

$$\vec{E}_A=\left(\left|\vec{E}_1\right|\cdot\cos\alpha+\left|\vec{E}_2\right|\cdot\cos\beta\right)\cdot\vec{i}+\left(\left|\vec{E}_1\right|\cdot\sin\alpha+\left|\vec{E}_2\right|\cdot\sin\beta\right)\cdot\vec{j}$$

$$\vec{E}_A=\left(\frac{|\lambda_1|}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot r_1}\cdot\frac{\frac{d}{2}}{r_1}+\frac{|\lambda_2|}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot r_2}\cdot\frac{\frac{d}{2}}{r_2}\right)\cdot\vec{i}+\left(\frac{|\lambda_1|}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot r_1}\cdot\frac{d_1}{r_1}-\frac{|\lambda_2|}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot r_2}\cdot\frac{d_1}{r_2}\right)\cdot\vec{j}$$

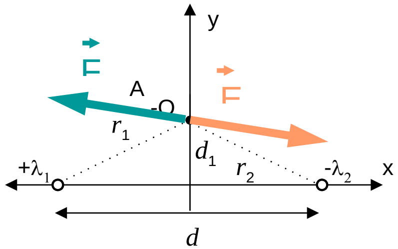
$$\vec{E}_A=\frac{d}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\left(\frac{|\lambda_1|}{r_1^2}+\frac{|\lambda_2|}{r_2^2}\right)\cdot\vec{i}+\frac{d_1}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\left(\frac{|\lambda_1|}{r_1^2}-\frac{|\lambda_2|}{r_2^2}\right)\cdot\vec{j}$$

$$\vec{E}_A=\frac{d\cdot\left(|\lambda_1|+|\lambda_2|\right)}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2+d_1^2\right)}\cdot\vec{i}+\frac{d_1\cdot\left(|\lambda_1|-|\lambda_2|\right)}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2+d_1^2\right)}\cdot\vec{j}$$

Ако се уврсте познате вриједности добије се:

$$\vec{E}_A=173\vec{i}-29\vec{j}\,[\text{V/m}]=175\angle-9°[\text{V/m}]$$

Сила на негативном наелектрисању Q у тачки A онда има смјер као на слици:



Вектор силе је:

$$\vec{F}_A=Q\cdot\vec{E}_A=-4\cdot10^{-12}\cdot\left(173\cdot\vec{i}-29\cdot\vec{j}\right)=-0.69\cdot\vec{i}+0.11\cdot\vec{j}\,[n\text{N}]$$

$$\boxed{\vec{F}_A=0.7\angle171°[n\text{N}]}$$

7. Тачкасто наелектрисање налази се у средишту шупље металне ненаелектрисане кугле вањског полупречника R_2 и унутрашњег полупречника R_1. Одредите ел. поље у тачкама A и B за следеће случајеве:

тачкасто наелектрисање Q у средишту ненаелектрисане кугле

кугла наелектрисана наелектрисањем Q без тачкастог наелектрисања у средишту

тачкасто наелектрисање Q у средишту кугле наелектрисане наелектрисањем Q

тачкасто наелектрисање Q у средишту кугле наелектрисане наелектрисањем Q истог интензитета, али супротног предзнака

Задано:
Q = + 9 [nAs]
R1 = 14 [mm]
R2 = 17 [mm]
rA = 1 [cm]
rB = 2 [cm]

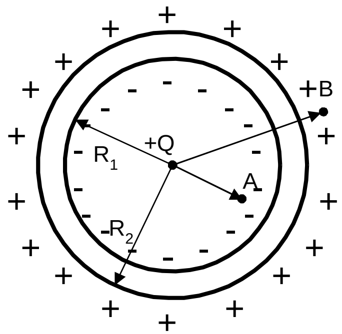
Решење:

Први случај: тачкасто наелектрисање Q у средишту ненаелектрисане кугле.

У тачки A (унутар шупље кугле) ел. поље ствара тачкасто наелектрисање.

$$\left|\vec{E}_A\right|=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot r_A^2}$$

$$\left|\vec{E}_A\right|=\frac{9\cdot10^{-9}}{4\cdot\pi\cdot8.85410^{-12}\cdot1\cdot\left(1\cdot10^{-2}\right)^2}=808[\text{kV/m}]$$



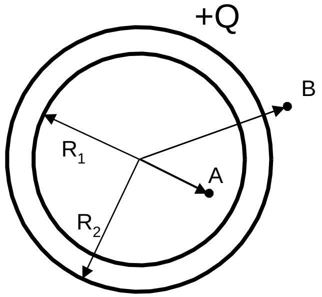
Под утјецајем ел. поља које ствара тачкасто наелектрисање долази до инфлуенције наелектрисања на кугли (-Q на унутрашњој плохи кугле и +Q на вањској плохи кугле).

Ел. поље у тачки B онда износи:

$$\left|\vec{E}_{\mathrm{B}}\right|=\frac{\mathrm{Q-Q+Q}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{\mathrm{r}}\cdot r_{\mathrm{B}}^2}=\frac{\mathrm{Q}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{\mathrm{r}}\cdot r_{\mathrm{B}}^2}=\frac{9\cdot10^{-9}}{4\cdot\pi\cdot8.85410^{-12}\cdot1\cdot\left(2\cdot10^{-2}\right)^2}=202\left[\mathrm{kV/m}\right]$$

Други случај: наелектрисана кугла без тачкастог наелектрисања у средишту

Унутар кугле нема наелектрисања тако да нема ни поља у тачки А:



$$\left|\vec{E}_{\mathrm{A}}\right|=0$$

Ел. поље у тачки B ствара наелектрисана кугла:

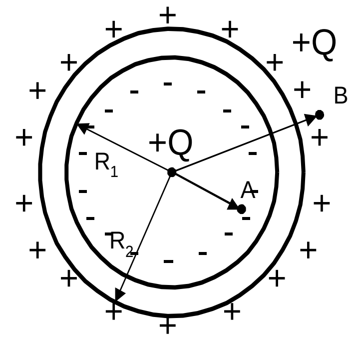
$$\left|\vec{E}_{\mathrm{B}}\right|=\frac{\mathrm{Q}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{\mathrm{r}}\cdot r_{\mathrm{B}}^2}=\frac{9\cdot10^{-9}}{4\cdot\pi\cdot8.85410^{-12}\cdot1\cdot\left(2\cdot10^{-2}\right)^2}=202\left[\mathrm{kV/m}\right]$$

Трећи случај: тачкасто наелектрисање Q у средишту наелектрисане кугле (Q)

Унутар кугле ел. поље ствара тачкасто наелектрисање Q:

$$\left|\vec{E}_{\mathrm{A}}\right|=\frac{\mathrm{Q}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{\mathrm{r}}\cdot r_{\mathrm{A}}^2}$$

$$\left|\vec{E}_{\mathrm{A}}\right|=\frac{9\cdot10^{-9}}{4\cdot\pi\cdot8.85410^{-12}\cdot1\cdot\left(1\cdot10^{-2}\right)^2}=808\left[\mathrm{kV/m}\right]$$



Под утјецајем ел. поља које ствара тачкасто наелектрисање долази до инфлуенције наелектрисања на кугли (-Q на унутрашњој плохи кугле и +Q на вањској плохи кугле).

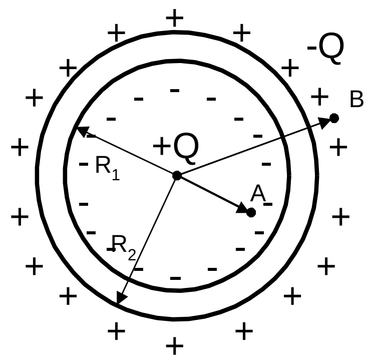
Ел. поље у тачки B онда износи:

$$\left|\vec{E}_{\mathrm{B}}\right|=\frac{\mathrm{Q-Q+Q+Q}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{\mathrm{r}}\cdot r_{\mathrm{B}}^2}=\frac{2\cdot\mathrm{Q}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{\mathrm{r}}\cdot r_{\mathrm{B}}^2}=\frac{2\cdot9\cdot10^{-9}}{4\cdot\pi\cdot8.85410^{-12}\cdot1\cdot\left(2\cdot10^{-2}\right)^2}=404\left[\mathrm{kV/m}\right]$$

Четврти случај: тачкасто наелектрисање Q у средишту наелектрисане кугле (-Q) истог интензитета, али супротног предзнака

Унутар кугле ел. поље ствара тачкасто наелектрисање Q:

$$\left|\vec{E}_{\mathrm{A}}\right| = \frac{\mathrm{Q}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{\mathrm{r}}\cdot r_{\mathrm{A}}^2}=\frac{9\cdot10^{-9}}{4\cdot\pi\cdot8.85410^{-12}\cdot1\cdot\left(1\cdot10^{-2}\right)^2}=808\left[\mathrm{kV/m}\right]$$

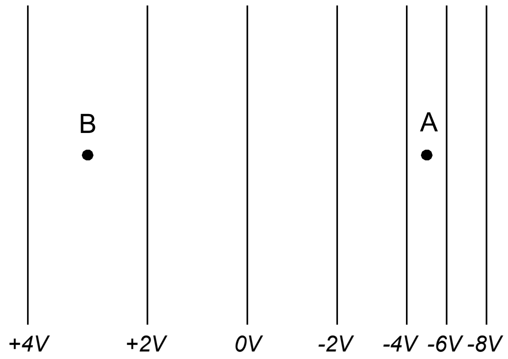


Под утјецајем ел. поља које ствара тачкасто наелектрисање долази до инфлуенције наелектрисања на кугли (-Q наунутрашњој плохи кугле и +Q на вањској плохи кугле).

Ел. поље у тачки B онда износи:

$$\left|\vec{E}_{\mathrm{B}}\right|=\frac{\mathrm{Q-Q+Q-Q}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{\mathrm{r}}\cdot r_{\mathrm{B}}^2}=\frac{0}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{\mathrm{r}}\cdot r_{\mathrm{B}}^2}=0\left[\mathrm{kV/m}\right]$$

8. На слици су приказане еквипотенцијалне плохе неког електростатског поља. Одредите у каквом су односу интензитети сила F_A и F_B које дјелују на позитивано тачкасто наелектрисање. Одредите и смјерове вектора сила F_A и F_B.



Уводни појмови:

Свакој тачки простора у којој постоји електрично поље може се придијелити скаларна величина - електрични потенцијал. При томе је ел. потенцијал функција ел. поља:

$$\varphi = f(\vec{E})$$

Потенцијал посматране тачке:

$$\varphi_{\text{посматране тачке}} = -\int_{\text{референтна тачка}}^{\text{посматрана тачка}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Ако се ел. поље мијења само у смјеру оси x, онда вриједи:

$$\varphi_{\text{посматране тачке}} = -\int_{\text{референтна тачка}}^{\text{посматрана тачка}} \vec{E}(\mathrm{x})\cdot d\vec{\mathrm{x}}$$

Потенцијал неке тачке се дефинише у односу на референтну тачку за коју вриједи:

$$\varphi_{\text{референтне тачке}} = 0$$

Ел. поље се такође може приказати као функција потенцијала:

$$\vec{E} = g(\varphi)$$

Зависност поља о потенцијалу:

$$E(\mathrm{x}) = -\frac{d\varphi(\mathrm{x})}{d\mathrm{x}}$$

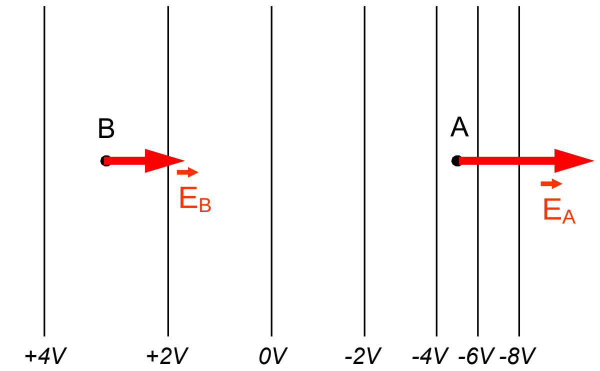
Смјер пораста електричног потенцијала супротан је смјеру вектора електричног поља.

Интензитет електричног поља је једнак брзини про-

мјене електричног потенцијала.
Поље електричног потенцијала приказује се еквипотенцијалним плохама (плохама истог потенцијала).

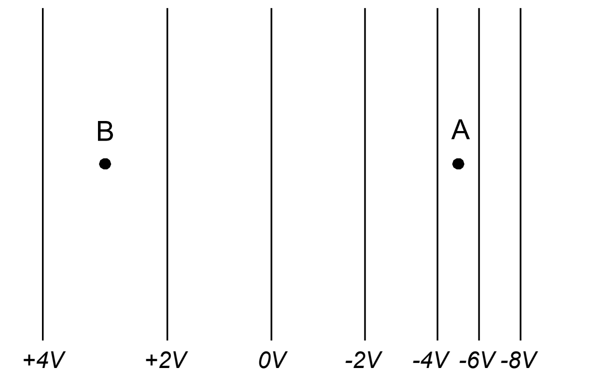
Решење:

Да би се одредио смјер силе на наелектрисање q потребно је прво одредити смјер електричног поља. Смјер електричног поља је супротан од смјера пораста потенцијала тако да су за приказано електростатско поље вектори поља у тачкама A и B слиједећи:



Како се ради о силама на позитивно наелектрисање и смјерови сила у тачкама A и B су истог смјера као и вектори поља.
Интензитети поља су пропорционални брзини промјене потенцијала. За приказано поље вриједи:

$$\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_A > \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_B$$

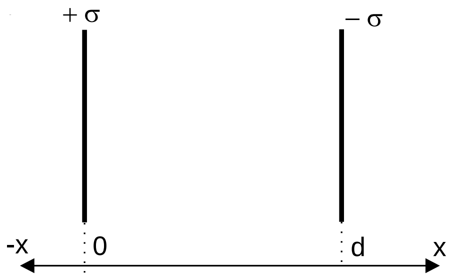


Како је сила пропорционална пољу вриједи:

$$\boxed{\left|\vec{F}_A\right| > \left|\vec{F}_B\right|}$$

9. Нацртајте функцију промјене потенцијала између двије супротно наелектрисане равнине уз различито дефинисане референтне тачке:

a) Xref = 0
b) Xref = d/2
c) Xref = d



Решење:

Поље између двије равнине је хомогено:

$E(x) = E$
за
$0 < x < d$

Потенцијал било које тачке између двије равнине је:

$$\varphi(x) = -\int_{xref}^{x} E \cdot dx = -E \cdot x\Big|_{xref}^{x}$$

$$\varphi(x) = -E \cdot x + E \cdot x_{ref}$$

За Xref = 0:

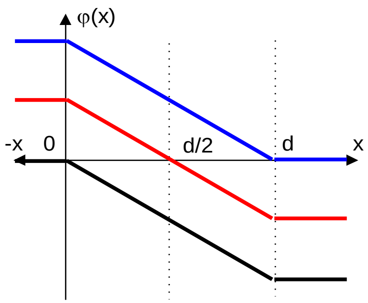
$\varphi(x) = -E \cdot x$

За Xref = d/2:

$\varphi(x) = -E \cdot x + E \cdot d/2$

За Xref = d:

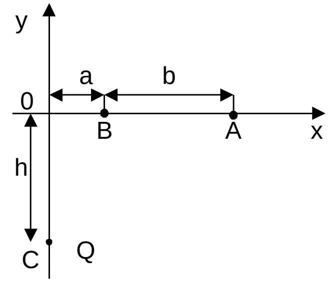
$\varphi(x) = -E \cdot x + E \cdot d$



10. Тачкасто наелектрисање Q налази се у тачки C. Положај двију тачака A и B приказан је на слици. Одредите напон U_{AB}. Уколико се тачка A налази на потенцијалу φ_A одредите тачку на x оси у којој ће потенцијал имати вриједност 0 [V].

Задано:

Q = 27.82·√2 ·10-9 [As]
φA = - 46 [V]
a = 1 [m]
b = 3 [m]
h = 2 [m]
ε = ε0



Уводни појмови:

Поље потенцијала у неком простору може се одредити на два начина:

1. Најприје се на основу задане расподјеле наелектрисања одреди електрично поље (на основу познатих поступака досада разматраних) у простору. Затим се уз згодно одабрану референтну тачку поље потенцијала тражи по дефиницији:

$$\varphi(x) = -\int_{x_{REF}}^{x} \vec{E}(x) \cdot d\vec{x}$$

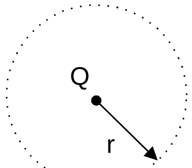
2. Задана расподјела наелектрисања посматра се као скуп тачкастих наелектрисања ("модел тачка-стог наелектрисања"). Укупан потенцијал налази се суперпозицијом, скаларни доприноси (сумом или интегралом), доприноса тих елементарних наеле-ктрисања. Осим модела тачкастог наелектрисања, некада се могу користити и други модели чије поте-нцијале знамо или смо их претходно израчунали (наелектрисани штап, прстен, плоча).

Различитим избором референтне тачке добит ћемо различите интензитете потенцијала, али ће разлике потенцијала увијек бити једнаке за било које двије тачке простора.

Поље потенцијала у околини тачкастог наелектрисања може се одредити на слиједећи начин:

$$\varphi(r) = -\int_{r_{REF}}^{r} \vec{E}(r)\cdot d\vec{r}$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_{ref}}\right)$$



За дефинисану референтну тачку у бесконачности вриједи:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}$$

Напон између двију тачака у пољу тачкастог наелектрисања:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$$

$$U_{AB} = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_{ref}}\right) - \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_{ref}}\right) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$

Решење:

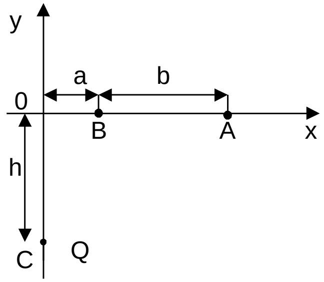
Потенцијал тачка A и B може се израчунати као:

$$\varphi_A = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_{ref}}\right)$$

$$r_A = \sqrt{h^2+(a+b)^2}$$

$$\varphi_B = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_{ref}}\right)$$

$$r_B = \sqrt{h^2+a^2}$$



Напон U_{AB} је онда:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_{ref}}\right) - \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_{ref}}\right)$$

$$U_{AB} = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+(a+b)^2}}-\frac{1}{\sqrt{h^2+a^2}}\right)$$

Интензитет напона U_{AB}:

$$U_{AB} = \frac{27.82\cdot\sqrt{2}\cdot 10^{-9}}{4\cdot\pi\cdot 8.854\cdot 10^{-12}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2^2+(1+3)^2}}-\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}\right) = -79[V]$$

Напон се може одредити без одређивања референтне тачке, јер је разлика потенцијала између двије тачке у простору независна о одабраној референтној тачки.

Из познатог потенцијала тачке A може се одредити удаљеност еквипотенцијалне плохе референтног потенцијала у задатку:

$$\varphi_A = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_{REF}}\right)$$

$$r_{REF} = \frac{\dfrac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}}{\dfrac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\dfrac{1}{r_A}-\varphi_A} = 2.83[m]$$

На оси x то је тачка:

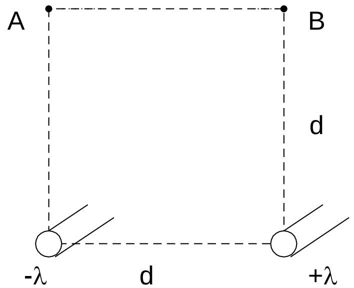
$$x_{REF} = \sqrt{r_{REF}^2 - h^2} = \sqrt{2.83^2 - 2^2} = 2[m]$$

---

11. Одредите рад приликом помицања експерименталног тачкастог наелектрисања Q_o из тачке A у тачку B. Тачке A и B представљају врхове замишљеног квадрата који лежи у равнини окомитој на два паралелна и супротно наелектрисана равна проводника (слика).

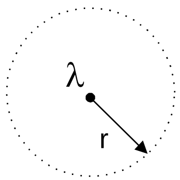
Задано:

Q0 = - 4·10-12 [As/m]
|λ| =1.77·10-8 [As/m]
ε = ε0



Уводни појмови:

Поље потенцијала у околини наелектрисаног равног проводника може се одредити на следећи начин:



$$\varphi(r) = -\int_{r_{REF}}^{r} \vec{E}(r)\cdot d\vec{r}$$

$$\varphi(r) = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot ln\frac{r_{ref}}{r}$$

Напон између двију тачака у пољу равног проводника:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$$

$$U_{AB} = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot ln\frac{r_{ref}}{r_A} - \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot ln\frac{r_{ref}}{r_B} = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot ln\frac{r_B}{r_A}$$

Потенцијална енергија тачкастог наелектрисања у електричном пољу у тачки A:

$$W_{PA} = Q\cdot\varphi_A$$

при чему је ел. поље створило неко друго наелектрисано тијело (тачкасто наелектрисање, равни проводник, кугла, плоча, итд.).

Рад при помицању тачкастог наелектрисања дефинисан је као:

$$A = Q\cdot\left(\varphi_{почетак} - \varphi_{крај}\right)$$

Предзнак рада:

A>0; помицање под утјецајем силе електричног поља = смањење потенцијалне енергије

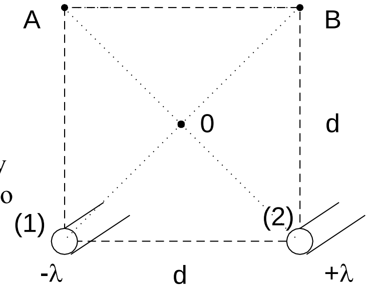
A<0; помицање под утјецајем вањске силе = повећање потенцијалне енергије

Решење:

Рад при помицању експерименталног наелектрисања Q_o је:

$$A = Q_0\cdot\left(\varphi_A - \varphi_B\right)$$

Да би се одредили потенцијали тачака A и B потребно је одредити референтну тачку. Претпоставимо да се она налази у средишту квадрата.



Потенцијалу у тачки A доприносе оба проводника:

$$\varphi_A = \varphi_{A1} + \varphi_{A2}$$

$$\varphi_A = \frac{-\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln\frac{r_{10}}{r_{A1}} + \frac{+\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln\frac{r_{20}}{r_{A2}}$$

$$\varphi_A = \frac{-\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln\frac{\frac{d\sqrt{2}}{2}}{d} + \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln\frac{\frac{d\sqrt{2}}{2}}{d\sqrt{2}}$$

$$\varphi_A = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\left(-ln\frac{\sqrt{2}}{2} + ln\frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Потенцијал у тачки B одређује се на исти начин:

$$\varphi_B = \varphi_{B1} + \varphi_{B2}$$

$$\varphi_B = \frac{-\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln\frac{r_{10}}{r_{B1}} + \frac{+\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln\frac{r_{20}}{r_{B2}}$$

$$\varphi_B = \frac{-\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln\frac{\frac{d\sqrt{2}}{2}}{d\sqrt{2}} + \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln\frac{\frac{d\sqrt{2}}{2}}{d}$$

$$\varphi_B = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\left(-ln\frac{1}{2} + ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln\sqrt{2}$$

Рад при помицању наелектрисања онда износи:

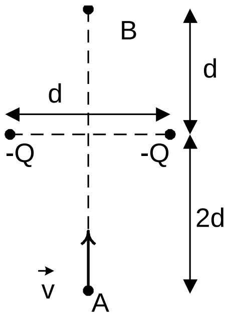
$$A = Q_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln\sqrt{2} \right) = Q_0 \cdot \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln\frac{1}{2} = +880[\mathrm{pWs}]$$

гдје нам позитиван предзнак говори о добијеном раду.

12. Задана су два тачкаста наелектрисања Q на удаљености d према слици. Колико мора износити минимална брзина електрона у тачки A удаљеној 2d од спојнице наелектрисања, да би он могао стићи у тачку B (удаљену d од спојнице наелектрисања) с друге стране спојнице. Електрон се гиба по симетрали спојнице.

Задано:

Q = -10 ·10-11 [C]
d = 0.1 [m]
me = 9.1·10-31 [kg]
qe = -1.6 ·10-19 [C]

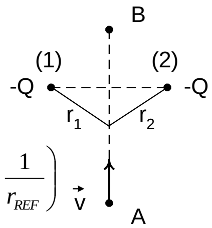


Решење:

Потенцијал у некој тачки на спојници A-B може се израчунати као:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

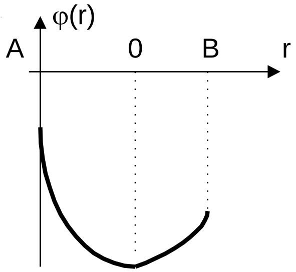
$$\varphi = \frac{-Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{REF}}\right) + \frac{-Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_{REF}}\right)$$



Будући да је $r_1 = r_2$ и уз претпостављену референтну тачку у бесконачности, за потенцијал вриједи:

$$\varphi = \frac{-Q}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\frac{1}{r_1}$$

Функција потенцијала мијења се као што је приказано на слици:



Да би електрон стигао до тачке B потребно је савладати потенцијалну баријеру приказану на слици.

Електрон се од тачке 0 до тачке B гиба под утјецајем електричног поља.

Међутим, да би електрон стигао до тачке 0 на електрон се мора дјеловати вањским утјецајем, односно вриједи следеће:

$$W_{kinA} + W_{potA} = W_{pot0}; \quad W_{kin0} = 0$$

$$\frac{m\cdot v^2}{2} + (-q_e)\cdot\varphi_A = (-q_e)\cdot\varphi_0$$

$$r_A = \sqrt{(2d)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = d\,\frac{\sqrt{17}}{2}; \qquad r_0 = \frac{d}{2}$$

$$\frac{m\cdot v^2}{2} = -q_e\cdot\left(\frac{-Q}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\frac{1}{r_0} - \frac{-Q}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\frac{1}{r_A}\right) = \frac{q_e\cdot Q}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_A}\right)$$

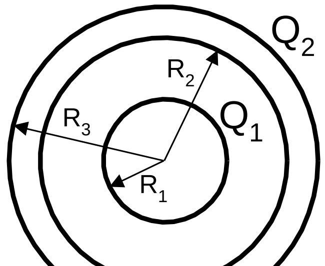
$$v = \sqrt{\frac{q_e\cdot Q}{\pi\cdot\varepsilon\cdot m}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_A}\right)} = 3.1\cdot 10^6\,[\mathrm{m/s}]$$

13. У металној куглиној љусци (R_2, R_3) концентрично се налази метална кугла полупречника R_1 (слика). Куглина љуска наелектрисана је наелектрисањем R_2, а метална кугла наелектрисањем R_1. Нацртајте дијаграме функције промјене ел. поља E(r) и потенцијала φ(r) у зависности о удаљености r од средишта система ако је:

1) Q_1 = - 2 [nC], Q_2 = 0, rref =∞
2) Q_1 = +2 [nC], Q_2 = +2 [nC] , rref =∞
3) Q_1 = +2 [nC], Q_2 = -2 [nC] , rref =∞

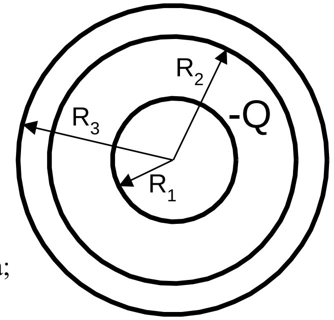
Задано:

R1 = 2 [cm]
R2 = 4 [cm]
R3 = 4.5 [cm]



Решење:

Први случај: E(r)



За $r<R_1$:

$$E(r) = 0$$

За $R_1< r <R_2$:

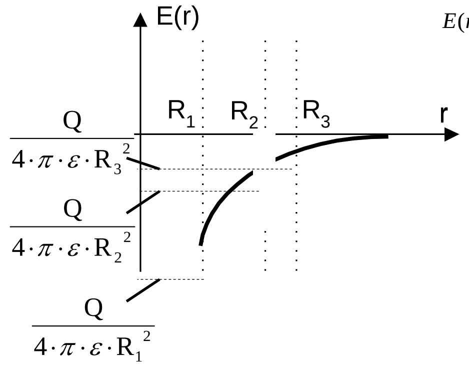
$$E(r) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r^2}$$

Унутар метала нема поља;
за $R_2< r < R_3$:

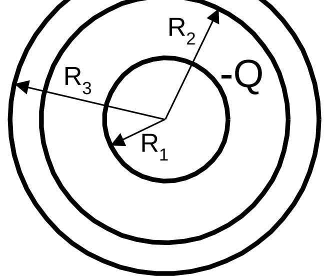
$$E(r) = 0$$

Због ел. инфлуенције поље за r> R_3 износи:

$$E(r) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r^2}$$



Први случај: φ(r)



Референтна тачка налази се у бесконачности:

$$\varphi_{REF} = 0$$

За $r>R_3$:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r} - \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r_{REF}}$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r}$$

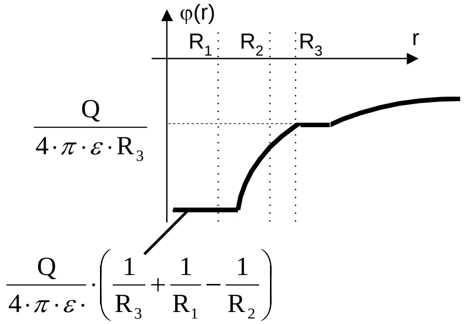
За $R_2< r < R_3$ потенцијал је константан јер у металу нема поља:

$$\varphi(r) = \varphi(R_2) = \varphi(R_3) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot R_3}$$

За $R_1< r <R_2$:

$$\varphi(r) = U_{rR2} + \varphi(R_2)$$

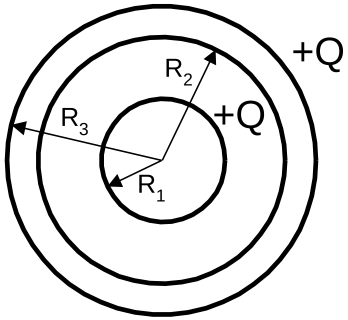
$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r} - \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot R_2} + \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot R_3}$$



За r< R_1 потенцијал је константан:

$$\varphi(r)=\varphi(R_1)=U_{R1R2}+\varphi(R_2)$$

Други случај: E(r)



За r< R_1:

$$E(r)=0$$

За R_1< r <R_2:

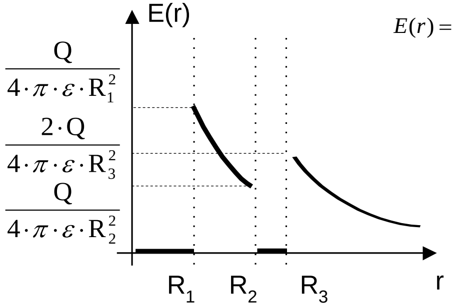
$$E(r)=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r^2}$$

За R_2< r <R_3:

$$E(r)=0$$

Због наелектрисане вањске кугле и ел. Инфлуенције поље за r > R_3:

$$E(r)=\frac{2\cdot Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r^2}$$



Други случај: φ(r)

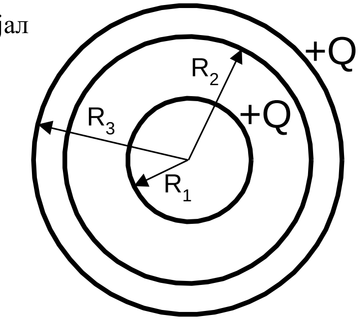
Референтна тачка налази се у бесконачности:

$$\varphi_{REF}=0$$

За r>R_3:

$$\varphi(r)=\frac{2\cdot Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r}-\frac{2\cdot Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r_{REF}}=\frac{2\cdot Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r}$$

За R_2< r < R_3 потенцијал је константан јер у металу нема поља:

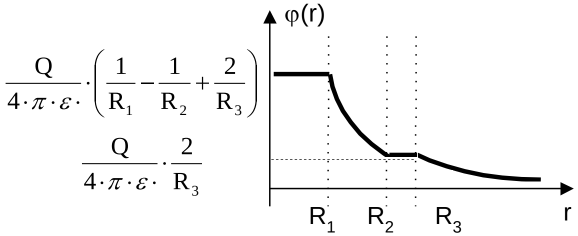


$$\varphi(r)=\varphi(R_2)=\varphi(R_3)$$

За R_1< r <R_2:

$$\varphi(r)=U_{rR2}+\varphi(R_2)$$

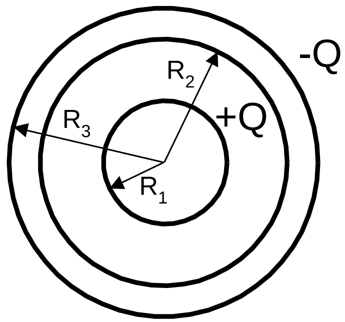
$$\varphi(r)=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r}-\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot R_2}+\frac{2\cdot Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot R_3}$$



За r< R_1 потенцијал је константан:

$$\varphi(r)=\varphi(R_1)=U_{R1R2}+\varphi(R_2)$$

Трећи случај: E(r)



За r<R_1:

$$E(r)=0$$

За R_1< r <R_2:

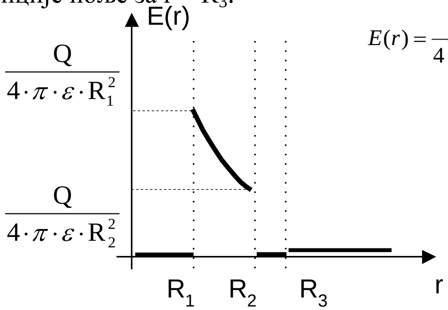
$$E(r)=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r^2}$$

За R_2< r <R_3:

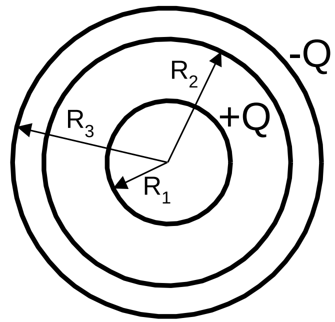
$$E(r)=0$$

Због наелектрисане вањске кугле и ел. инфлуенције поље за r > R_3:

$$E(r)=\frac{Q-Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r^2}=0$$



Трећи случај: φ(r)



Референтна тачка налази се у бесконачности:

$$\varphi_{REF}=0$$

Будући да изван система нема поља, за r > R_3:

$$\varphi(r)=0$$

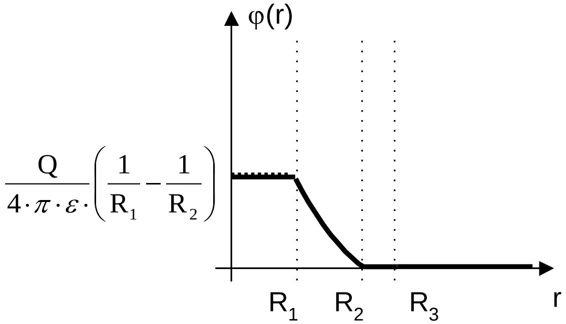
За R_2< r < R_3 потенцијал је константан јер у металу нема поља:

$$\varphi(r)=\varphi(R_2)=\varphi(R_3)=0$$

За R_1< r <R_2:

$$\varphi(r)=U_{rR2}+\varphi(R_2)$$

$$\varphi(r)=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r}-\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot R_2}$$



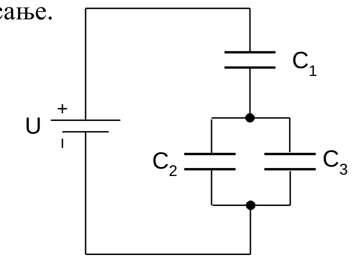
За r< R_1 потенцијал је константан:

$$\varphi(r)=\varphi(R_1)=U_{R1R2}+\varphi(R_2)$$

14. На кондензаторску мрежу на слици прикључен је извор напајања који даје истосмјерни напон од 1200 [V]. Потребно је одредити еквивалентни (укупни) капацитет мреже, напоне који владају на појединим елементима (кондензаторима) као и припадно наелектрисање.

Задано је:

C1 = 4 [μF]
C2 = 6 [μF]
C3 = 2 [μF]
U = 1200 [V]



Уводни појмови:

Прикључивањем скупине кондензатора на истосмјерни извор (или изворе) електричне енергије успостављају се напонске и наелектрисане прилике на појединим кондензаторима у складу с два основна закона и то:

$$alg\sum_i Q_{ikon} = alg\sum_i Q_{ipoč} \quad \text{за сваки чвор}$$

$$alg\sum_j E_j = alg\sum_i \frac{Q_i}{C_i} \quad \text{за сваку контуру}$$

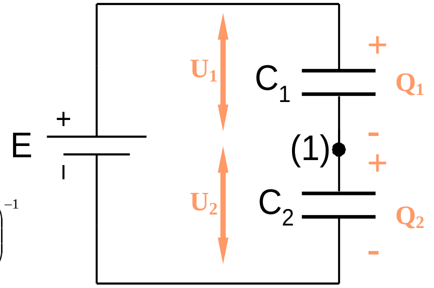
У случају **серијског** споја два претходно ненаелектрисана кондензатора вриједи:

$$E = U_1 + U_2$$

за чвор (1)

$$-Q_1 + Q_2 = 0$$

$$C_{12} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1}$$



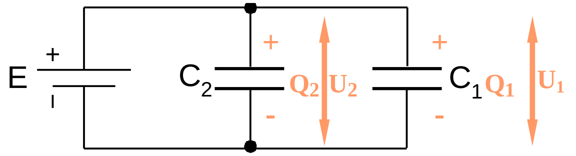
За серију претходно ненаелектрисаних кондензатора вриједи:

$$U_S = \sum_{i=1}^{n} U_i$$

$$Q_S = Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_n$$

$$\frac{1}{C_S} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

У случају **паралелног** споја два претходно ненаелектрисана кондензатора вриједи:



$$U_{12} = U_1 = U_2 \qquad Q_{12} = Q_1 + Q_2 \qquad C_{12} = C_1 + C_2$$

За паралелу претходно ненаелектрисаних кондензатора вриједи:

$$U_P = U_1 = U_2 = \cdots = U_n$$

$$Q_P = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

$$C_P = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Решење:

Укупни (еквивалентни) капацитет мреже:

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 6\cdot10^{-6} + 2\cdot10^{-6} = 8\cdot10^{-6} = 8\,[\mu F]$$

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{4\cdot10^{-6}} + \frac{1}{8\cdot10^{-6}}\right)^{-1} = 2.67\cdot10^{-6} = 2.67\,[\mu F]$$

Напони на кондензаторима:

$$Q_1 = Q_{23} = Q = C\cdot U$$

$$U_1 = U\cdot\frac{C}{C_1} = 1200\cdot\frac{2.67\cdot10^{-6}}{4\cdot10^{-6}} = 800\,[V]$$

$$U_{23} = U\cdot\frac{C}{C_{23}} = 1200\cdot\frac{2.67\cdot10^{-6}}{8\cdot10^{-6}} = 400\,[V]$$

$$U_2 = U_3 = U_{23} = 400\,[V]$$

Наелектрисање на кондензаторима:

$$Q_1 = C_1\cdot U_1 = 4\cdot10^{-6}\cdot800 = 3.2\cdot10^{-3}\,[C]$$

$$Q_2 = C_2\cdot U_2 = 6\cdot10^{-6}\cdot400 = 2.4\cdot10^{-3}\,[C]$$

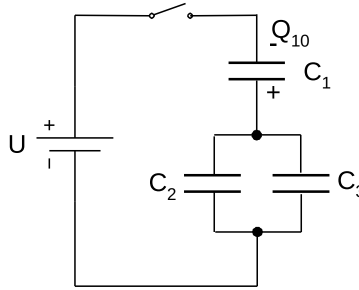
$$Q_3 = C_3\cdot U_3 = 2\cdot10^{-6}\cdot400 = 0.8\cdot10^{-3}\,[C]$$

---

15. На кондензаторску мрежу прикључује се извор напајања који даје истосмјерни напон од 1200 [V]. Потребно је одредити напоне који владају на појединим елементима (кондензаторима) као и припадно наелектрисање, ако је кондензатор C_1 претходно наелектрисан наелектрисањем Q_{10} приказаног поларитета.

Задано је:

C1 = 4 [μF]
C2 = 6 [μF]
C3 = 2 [μF]
Q10 = 1 [mC]
U = 1200 [V]



Уводни појмови:

Прикључивањем скупине кондензатора на истосмјерни извор (или изворе) електричне енергије успостављају се напонске и наелектрисане прилике на појединим кондензаторима у складу с два основна закона и то:

$$alg\sum_i Q_{ikon} = alg\sum_i Q_{ipoč} \quad \text{за сваки чвор}$$

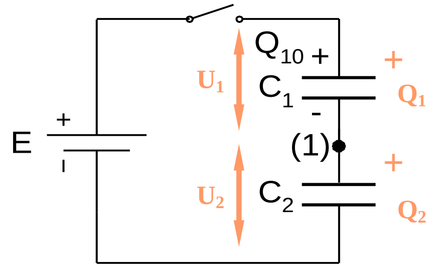
$$alg\sum_j E_j = alg\sum_i \frac{Q_i}{C_i} \quad \text{за сваку контуру}$$

У случају прикључења **серијског** споја два кондензатора на истосмјерни извор, при чему је прије тога кондензатор C_1 наелектрисан на Q_{10}, вриједи:

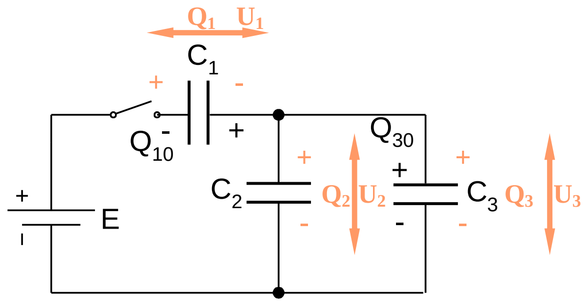
$$E = U_1 + U_2$$

за чвор (1)

$$-Q_1 + Q_2 = -Q_{10}$$



У случају прикључивања на извор истосмјерног напајања **серијско-паралелног** споја три кондензатора, гдје су оба кондензатора претходно наелектрисана према слици вриједи:



$$U_2 = U_3 = U_{23}$$

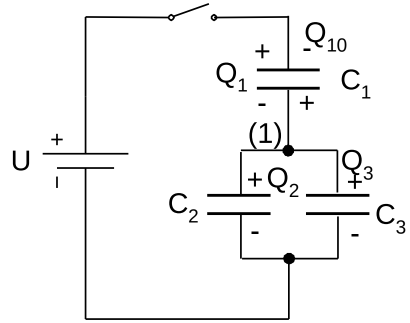
$$E = U_1 + U_{23}$$

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} \qquad U_2 = \frac{Q_2}{C_2} \qquad U_3 = \frac{Q_3}{C_3}$$

$$-Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_{10} + Q_{30}$$

Решење:

Након затварања склопке у мрежи се кондензатори након неког времена наелектришу наелектрисањима приказаним на слици:



За мрежу вриједи:

$$\text{за чвор (1)}\quad -Q_1+Q_2+Q_3=Q_{10}$$

$$U_2=U_3=\frac{Q_2}{C_2}=\frac{Q_3}{C_3}$$

$$U=U_1+U_{23}=\frac{Q_1}{C_1}+\frac{Q_2}{C_2}=\frac{Q_1}{C_1}+\frac{Q_3}{C_3}$$

Решењем система три једначине с три непознате и уврштавањем познатих вриједности коначна наелектрисања на кондензаторима износе:

$Q_1=2.86\left[\mathrm{mC}\right]$ $\qquad Q_2=2.90\left[\mathrm{mC}\right]$ $\qquad Q_3=0.96\left[\mathrm{mC}\right]$

Напони на кондензаторима:

$$U_2=U_3=\frac{Q_2}{C_2}=\frac{Q_3}{C_3}=480\left[\mathrm{V}\right]$$

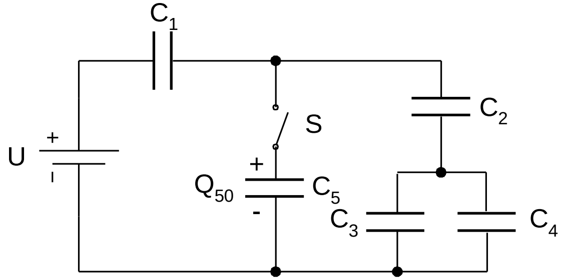
$$U_1=\frac{Q_1}{C_1}=720\left[\mathrm{V}\right]$$

---

16. У мрежи према слици кондензатор C_5 има почетно наелектрисање Q_{50} назначеног предзнака. Колику ће промјену напона ΔU_1 на кондензатору C_1 узроковати затварање склопке С?

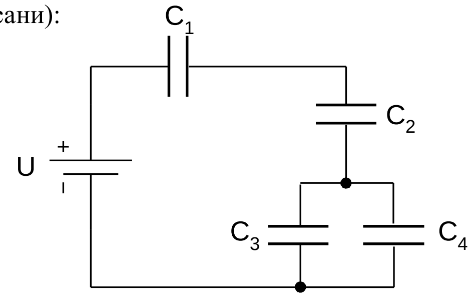
Задано:

C1 = 18 [μF]	C4 = 16 [μF]
C2 = 20 [μF]	C5 = 5 [μF]
C3 = 14 [μF]	U = 12 [V]

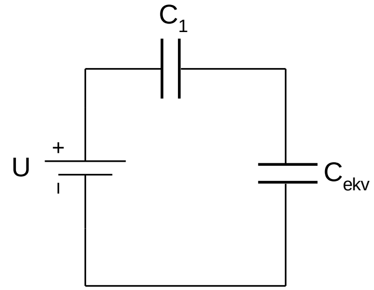


Решење:

Мрежа прије затварања склопке може се поједноставити (кондензатори нису претходно наелектрисани):



$$\Rightarrow$$



$$\frac{1}{C_{EKV}}=\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3+C_4}\ \Rightarrow\ C_{EKV}=\frac{C_2\cdot\left(C_3+C_4\right)}{C_2+C_3+C_4}=12\left[\mu\mathrm{F}\right]$$

Будући да кондензатори нису претходно наелектрисани вриједи:

$$Q_{10}=Q_{EKV0}$$

$$U=U_{C10}+U_{C\,EKV0}=\frac{Q_{10}}{C_1}+\frac{Q_{EKV0}}{C_{EKV}}$$

$$Q_{10}=\frac{U\cdot C_1\cdot C_{EKV}}{C_1+C_{EKV}}=\frac{12\cdot 18\cdot 10^{-6}\cdot 12\cdot 10^{-6}}{18\cdot 10^{-6}+12\cdot 10^{-6}}$$

$$Q_{10}=86.4\left[\mu\mathrm{C}\right]$$

Прије затварања склопке кондензатори C_1 и C_{ekv} су наелектрисани почетним наелектрисањем Q_{10}, а кондензатор C_5 наелектрисањем Q_{50} приказаних поларитета.

За мрежу након затварања склопке вриједи:

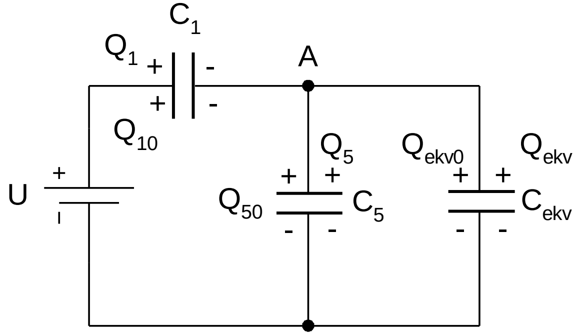
$$\text{за чвор (A)}$$

$$-Q_1+Q_5+Q_{EKV}=-Q_{10}+Q_{50}+Q_{EKV0}$$

$$-Q_1+Q_5+Q_{EKV}=Q_{50}$$

$$U_{C5}=U_{CEKV}\ \Rightarrow\ \frac{Q_5}{C_5}=\frac{Q_{EKV}}{C_{EKV}}$$

$$U=U_{C1}+U_{C5}=\frac{Q_1}{C_1}+\frac{Q_5}{C_5}$$



Решењем система три једначине добије се Q_5:

$$Q_5=\frac{Q_{50}+U\cdot C_1}{\frac{C_1}{C_5}+1+\frac{C_{EKV}}{C_5}}=\frac{36\cdot 10^{-6}+12\cdot 18\cdot 10^{-6}}{\frac{18}{5}+1+\frac{12}{5}}=36\left[\mu\mathrm{As}\right]$$

Напон на C_5:

$$U_{C5}=\frac{Q_5}{C_5}=\frac{36\cdot 10^{-6}}{5\cdot 10^{-6}}=7.2\left[\mathrm{V}\right]$$

Прије затварања склопке кондензатори C_1 наелектрисан је на напон UC_{10}:

$$U_{C10}=\frac{Q_{10}}{C_1}=\frac{86.4\cdot 10^{-6}}{18\cdot 10^{-6}}=4.8\left[\mathrm{V}\right]$$

Након затварања склопке кондензатор C_1 наелектрисан је на напон UC_1:

$$U_{C1}=U-U_{C5}=12-7.2=4.8\left[\mathrm{V}\right]$$

Разлика напона на C_1 прије и послије затварања склопке:

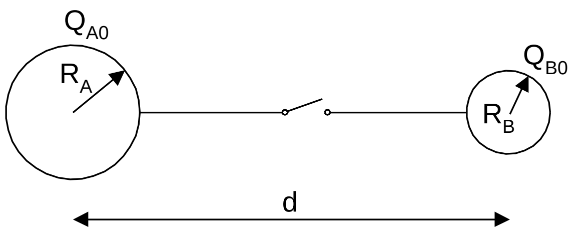
$$\Delta U=U_{C1}-U_{C10}=4.8-4.8=0\left[\mathrm{V}\right]$$

---

17. Средишта двију усамљених металних кугли А и В полупречника R_A и R_B размакнута су d метара, с тим да је d >> R_A. На кугле су доведена наелектрисања Q_{A0} и Q_{B0}, а након тога оне се међусобно повезују врло танком металном нити. Одредите, за тај случај, интензитете поља E_A и E_B уз саму површину кугли ако је $\varepsilon=\varepsilon_o$.

RA = 9 [cm] $\qquad$ QA0 = -2.4 [nC]

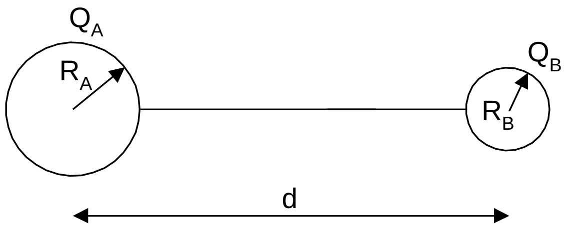
RA = 1 [cm]   QB0 = +3.2 [nC]



Решење:

Након затварања склопке потенцијали кугли се изједначавају (долази до прерасподјеле наелектрисања):

$$\varphi_A = \varphi_B$$

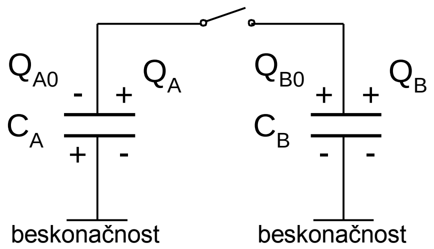


Уз референтну тачку у бесконачности:

$$\frac{Q_A}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot R_A} = \frac{Q_B}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot R_B}$$

Кугле чине систем приказан на слици, за који вриједи:

$$-Q_{A0} + Q_{B0} = Q_A + Q_B$$



Решењем система једначина:

$$Q_B = Q_A \frac{R_B}{R_A}$$

$$Q_A = \frac{-Q_{A0} + Q_{B0}}{1 + \frac{R_B}{R_A}} = \frac{-2.4\cdot10^{-9} + 3.2\cdot10^{-9}}{1 + \frac{1}{9}} = 720\left[p\mathrm{As}\right]$$

$$Q_B = 80\left[p\mathrm{As}\right]$$

Будући да је d >> R_A ел. поља након затварања склопке износи:

$$E_A = \frac{Q_A}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot R_A^2} = \frac{720\cdot10^{-12}}{4\cdot\pi\cdot8.854\cdot10^{-12}\cdot\left(9\cdot10^{-2}\right)^2} = 800\left[\mathrm{V/m}\right]$$

$$E_B = \frac{Q_B}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot R_B^2} = \frac{80\cdot10^{-12}}{4\cdot\pi\cdot8.854\cdot10^{-12}\cdot\left(1\cdot10^{-2}\right)^2} = 7.2\left[\mathrm{kV/m}\right]$$

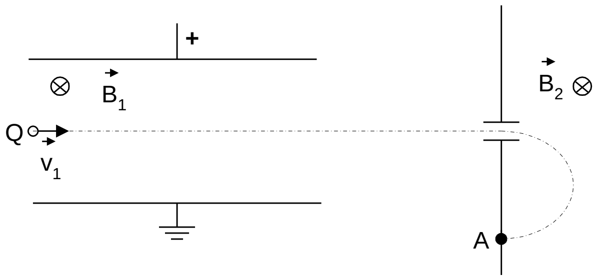
МАГНЕТИЗАМ

- Магнетно поље, индукција и ток.
- Магнетно поље равног бесконачног проводника кроз који протиче струја.
- Сила на наелектрисање у магнетном пољу.
- Сила на проводник кроз који протиче струја у магнетном пољу.
- Закон протицања.
- Биот-Саварт -ов закон.
- Кретање проводника у магнетном пољу.
- Електромагнетна индукција. Самоиндукција. Међуиндукција.
- Индуктивитет. Међуиндуктивитет.
- Енергија магнетног поља.
- Магнетски круг без зрачног распора.
- Магнетски круг са зрачним распором.
- Магнетна енергија у зраку.
- Магнетна енергија у феромагнетном материјалу.

ЗАДАЦИ:

1. Млаз наелектрисаних честица убацује се у простор у којем дјелује електрично поље E и магнетна поља индукција B_1 и B_2 према слици. Одредите брзину v_1 и поларитет честица које ударају у тачку A.

Задано:
E = 140.7 [MV/m] B_1 = 0.5 [T] B_2 = 0.16 [T]



Уводни појмови:

Магнетно поље описује се помоћу следећих основних величина:

Јачина магнетног поља: $\vec{H}[A/m]$

Магнетна индукција: $\vec{B}[T]$

Веза јачине магнетног поља и индукције

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$$

где је: $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ [Vs/Am]

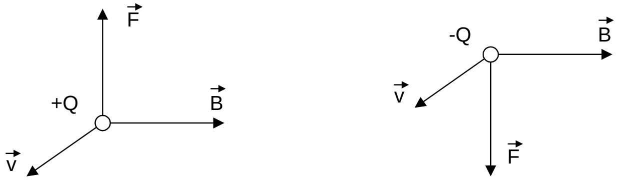
Када се наелектрисање гиба у магнетном пољу тада на њега дјелује магнетна сила:

$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Q - паелектрисање

v- брзина гибања наелектрисања

Смјер магнетне силе на наелектрисање дефинисан је векторским производом брзине и магнетне индукције:



По интензитету сила зависи о углу између вектора v и B:

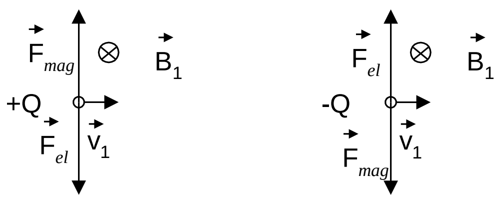
$$|\vec{F}| = Q \cdot v \cdot B \cdot sin\alpha$$

Уколико се наелектрисање гиба паралелно силницама магнетног поља, магнетна сила на наелектрисању је једнака нули (sinα = 0)

Уколико се наелектрисање гиба окомито на силнице магнетног поља тада је сила по интензитету једнака: F = Q·v·B

Решење:

У кондензатору на наелектрисање дјелују електрична и магнетна сила. Да би био задовољен услов праволиниског гибања те двије силе по интензитету морају бити једнаке:

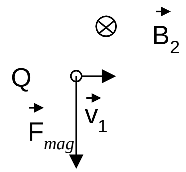


$$|\vec{F}_{el}| = |\vec{F}_{mag}|$$

$$Q \cdot E = Q \cdot B_1 \cdot v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{E}{B_1} = \frac{140.7 \cdot 10^6}{0.5}$$

$$v_1 = 281.4 \cdot 10^6 \,[\mathrm{m/s}]$$

Када наелектрисање пријеђе у подручје гдје дјелује маг. индукција B_2, на њега дјелује само магнетна сила помоћу чијег смјера се може одредити одредити предзнак наелектрисања:



Из смјера магнетне силе видљиво је да се ради о негативном наелектрисању.

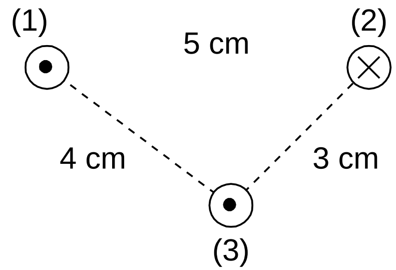
$$Q < 0$$

2. Три врло дуга равна проводника смјештена у зраку према слици кроз која протиче струја I_1, I_2 и I_3. Одредите:

а) смјер и величину магнетне индукције коју проводници (1) и (2) стварају на мјесту проводника (3)

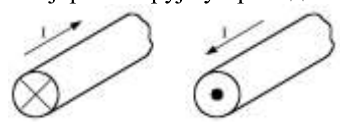
б) смјер и величину силе која дјелује на елемент дужине l проводника (3)

I1 = 100 [A]
I2 = 150 [A]
I3 = 75 [A]
l = 80 [cm]



Уводни појмови:

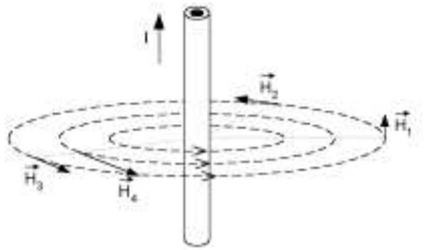
Означавање смјерова струје у проводнику:



Магнетно поље равног проводника:

$$H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

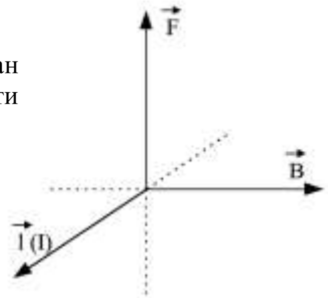


Смјер поља одређује се правилом десне руке:
палац - смјер струје
прсти - смјер поља

Сила на проводнику кроз који протиче струја у магнетном пољу $\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B}) [\mathrm{N}]$

Смјер силе одређује се правилом лијеве руке:

силнице (B) - длан
струја (I, l) - прсти
сила (F) - палац



Интензитет силе:

$$F = B \cdot I \cdot l \cdot sin\alpha \, [\mathrm{N}]$$

l је дужина проводника у магнетном пољу!!!

Угао α је угао који затварају вектори поља (индукције) и дужине (смјер струје)

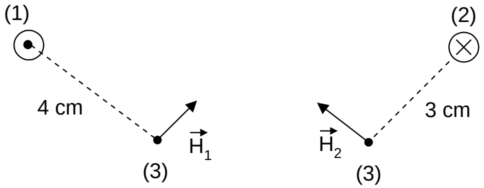
Уколико је проводник окомит на силнице магнетног поља тада је магнетна сила по интензитету једнака: F = B·I·l

Уколико је проводник паралелан силницама магнетног поља магнетна сила на проводник једнака је нули (sinα = 0)

Решење:

Задатак се рјешава методом суперпозиције.

Проводник (1) на мјесту проводника (3) ствара магнетно поље H_1:



Проводник (2) на мјесту проводника (3) ствара магнетно поље H_2.

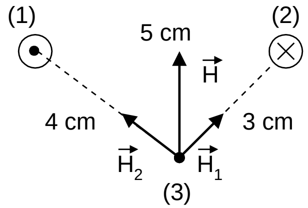
По интензитету маг. поља:

$$H_1 = \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = \frac{100}{2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 4 [\mathrm{A/cm}]$$

$$H_2 = \frac{I_2}{2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = \frac{150}{2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = 8 [\mathrm{A/cm}]$$

Укупно поље на мјесту проводника (3) једнако је векторској суми магнетских поља:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$$



Будући да су вектори H_1 и H_2 под углом од 90^o вриједи следеће:

$$|\vec{H}| = \sqrt{|\vec{H}_1|^2 + |\vec{H}_2|^2}$$

$$H = \sqrt{4^2 + 8^2} = 9 [\mathrm{A/cm}]$$

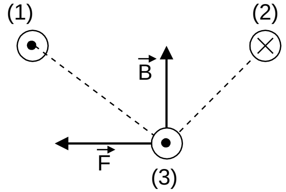
Угао вектора H у односу на вектор H_1:

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{H}_2|}{|\vec{H}|} = \frac{8}{9} \qquad \alpha = 63°$$

Магнетна индукција:

$$B = \mu_0 \cdot H = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{9}{10^{-2}} = 1.13 [\mathrm{mT}]$$

Смјер силе на проводник (3) одређује се правилом лијеве руке:



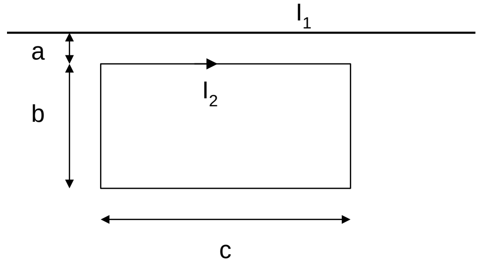
Будући да су проводник и смјер вектора магнетног поља под 90^o, сила износи:

$$F = B \cdot I_3 \cdot l = 1.13 \cdot 10^{-3} \cdot 75 \cdot 80 \cdot 10^{-2} = 68 [\mathrm{mN}]$$

3. Врло дуги равни проводник и крути метални оквир смјештени су према слици. Оквир има тежину G. Уз остале наведене податке одредите смјер и величину струје I_1 уз коју ће оквир задржати задани положај.

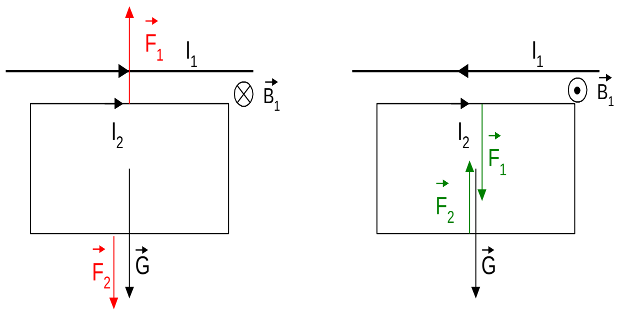
Задано:

G = 0.5 [N]
I2 = 15 [A]
a = 1 [cm]
b = 10 [cm]
c = 50 [cm]



Решење:

Врло дуги равни проводник кроз који тече струја ствара маг. поље у својој околини. За различите смјерове струје I_1 то маг. поље дјелује на оквир силама F_1 и F_2:



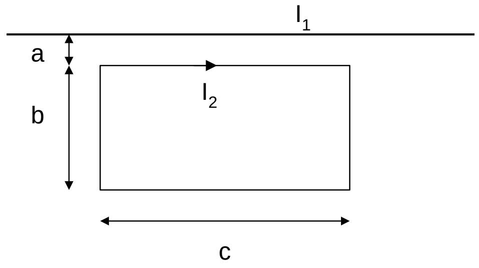
Да би оквир остао у истом положају укупан збир сила мора бити једнак 0:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} = 0$$

Будући да је F_1 > F2 то се може постићи само у случају када струја I_1 тече с лијева на десно (1. случај).

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| + |\vec{G}|$$

Силе F_1 и F_2 одређују се као:



$$F_1 = B_1(\mathrm{a}) \cdot I_2 \cdot \mathrm{c} = \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot \mathrm{a}} \cdot I_2 \cdot \mathrm{c}$$

$$F_2 = B_1(\mathrm{a}+\mathrm{b}) \cdot I_2 \cdot \mathrm{c} = \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot (\mathrm{a}+\mathrm{b})} \cdot I_2 \cdot \mathrm{c}$$

Из услова равнотеже оквира одређује се интензитет струје I_1:

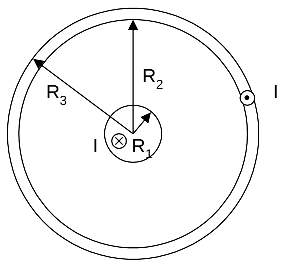
$$\mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot \mathrm{a}} \cdot I_2 \cdot c = \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot (\mathrm{a}+\mathrm{b})} \cdot I_2 \cdot \mathrm{c} + G$$

$$I_1 = \frac{G \cdot 2 \cdot \pi \cdot \mathrm{a} \cdot (\mathrm{a}+\mathrm{b})}{I_2 \cdot \mu_0 \cdot \mathrm{c} \cdot \mathrm{b}} = \frac{0.5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot (1+10)}{15 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 10} = 3.7\,[\mathrm{kA}]$$

4. Одредите величину струје која тече кроз проводнике коаксијалног кабла у супротним смјеровима, ако јачина магнетног поља на удаљености d од средишта кабла износи H_d. Одредите и функцију промјене магнетног поља, H(r) за $0 < r < \infty$.

Задано:

R1 = 0.5 [cm]
R2 = 2.5 [cm]
R3 = 2.6 [cm]
d = 2.55 [cm]
Hd = 78.8 [A/m]



Решење:

Задатак се рјешава примјеном закона протјецања.

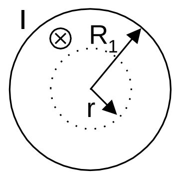
$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum_i I_i$$

Маг. поље се мијења различито у четири случаја:

За $r < R_1$, обухваћен је само дио унутрашњег проводника:

$$H \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = I'$$

Густоћа струје у свакој тачки је једнака.



$$G = \frac{I}{R_1^2 \cdot \pi} = \frac{I'}{r^2 \cdot \pi} \;\Rightarrow\; I' = r^2 \cdot \frac{I}{R_1^2}$$

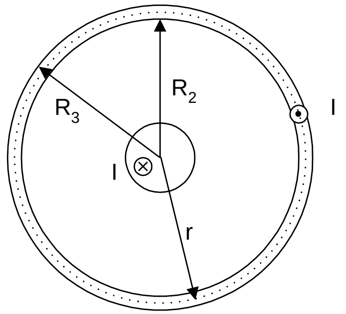
$$H = \frac{I'}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{I \cdot \frac{r^2}{R_1^2}}{2 \cdot r \cdot \pi} = I \cdot \frac{r}{2 \cdot \pi \cdot R_1^2}$$

За $R_1 < r < R_2$, линијом *л* обухваћен је проводник кроз који тече струја I па маг. поље износи:

$$H \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = I \quad \Rightarrow \quad H = \frac{I}{2 \cdot r \cdot \pi}$$

За $R_2 < r < R_3$, обухваћен је унутрашњи проводник и дио вањског проводника:

$$H \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = I - I''$$



Будући да су смјерови струја супротни њихови доприноси се одузимају

$$G = \frac{I}{R_3^2 \cdot \pi - R_2^2 \cdot \pi} = \frac{I''}{r^2 \cdot \pi - R_2^2 \cdot \pi}$$

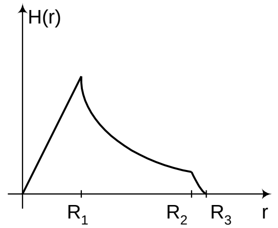
$$I'' = I \cdot \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

$$H = \frac{I}{2 \cdot r \cdot \pi}\left(1 + \frac{R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) - \frac{I}{2 \cdot \left(R_3^2 - R_2^2\right) \cdot \pi} \cdot r$$

За $r > R_3$:

$$H \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = I - I \qquad\qquad H = 0$$

Функција промјене јачине маг. поља изгледа као на слици:



Из заданог маг. поља на мјесту r = d може се одредити струја I:

$$H_d = H(r=d) = \frac{I}{2 \cdot d \cdot \pi}\left(1 + \frac{R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) - \frac{I}{2 \cdot \left(R_3^2 - R_2^2\right) \cdot \pi} \cdot d$$

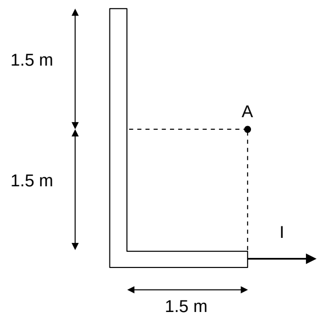
$$I = \frac{2 \cdot \pi \cdot H_d \cdot \left(R_3^2 - R_2^2\right) \cdot d}{R_3^2 - d^2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 78.8 \cdot \left(2.6^2 - 2.5^2\right) \cdot 2.55 \cdot 10^{-2}}{2.6^2 - 2.55^2}$$

$$I = 25\,[\mathrm{A}]$$

5. Кроз проводник у облику L профила протјече струја I. Димензије проводника су задане на слици. Одредите смјер и јачина магнетне индукције у тачки A.

Задано:

I = 50 [A]



Уводни појмови:

Равни проводник коначне дужине кроз који протјече струја I у својој околини ствара магнетно поље које се може одредити на следећи начин:

$$H_{\mathrm{T}} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot \left(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2\right)$$

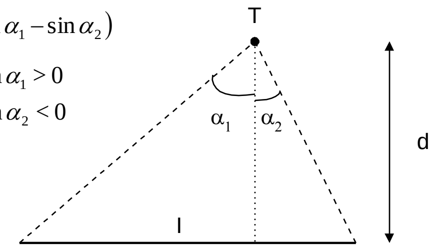
Смјер магнетног поља дефинисан је правилом десног завртња.

Примјери:

$$H_{\mathrm{T}} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot \left(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2\right)$$

$$\alpha_1 > 0 \Rightarrow \sin\alpha_1 > 0$$

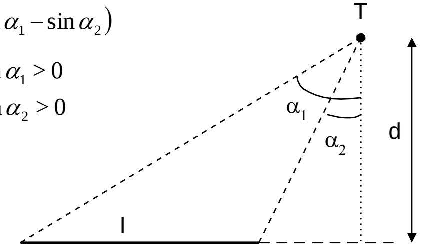
$$\alpha_2 < 0 \Rightarrow \sin\alpha_2 < 0$$



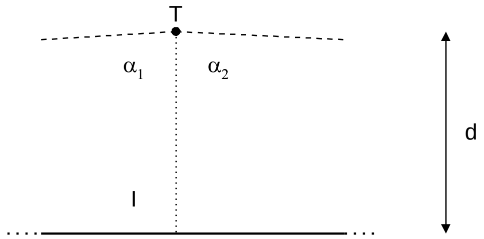
$$H_{\mathrm{T}}=\frac{I}{4\cdot\pi\cdot d}\cdot\left(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2\right)$$

$$\alpha_1>0\Rightarrow\sin\alpha_1>0$$

$$\alpha_2>0\Rightarrow\sin\alpha_2>0$$



Бесконачно дуги равни проводник



$$H_{\mathrm{T}}=\frac{I}{4\cdot\pi\cdot d}\cdot\left(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2\right)$$

$$\alpha_1\to+90^\circ\quad\alpha_2\to-90^\circ$$

$$H_{\mathrm{T}}=\frac{I}{4\cdot\pi\cdot d}\cdot\left(\sin 90^\circ-\sin(-90^\circ)\right)$$

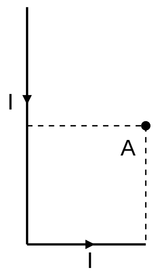
$$H_{\mathrm{T}}=\frac{I}{4\cdot\pi\cdot d}\cdot\left(1-(-1)\right)=\frac{I}{2\cdot\pi\cdot d}$$

Решење:

Поље у тачки стварају два проводника један дужине 3m, а други дужине 1.5m. Укупно поље једнако је векторском збиру појединих компоненти поља:

$$\vec{H}_{\mathrm{A}}=\vec{H}_{\mathrm{A1}}+\vec{H}_{\mathrm{A2}}$$

Смјер поља одређујемо помоћу правила десног завртња:

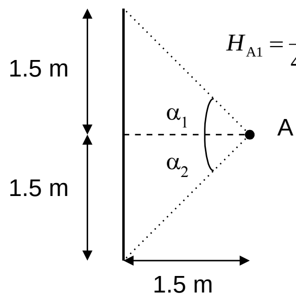


Будући да су поља истог смјера, укупно поље једнако је алгебарском збиру поља:

$$H_{\mathrm{A}}=H_{\mathrm{A1}}+H_{\mathrm{A2}}$$

Примјеном Биот-Саварт-овог закона одређују се интензитети поља $\mathrm{H_{A1}}$, односно поља $\mathrm{H_{A2}}$.

Поље $\mathrm{H_{A1}}$:



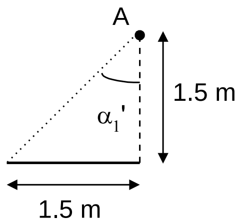
(1)

$$H_{\mathrm{A1}}=\frac{I}{4\cdot\pi\cdot1.5}\cdot\left(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2\right)$$

$$H_{\mathrm{A1}}=\frac{I}{4\cdot\pi\cdot1.5}\cdot\left(\sin(+45^\circ)-\sin(-45^\circ)\right)$$

$$H_{\mathrm{A1}}=\frac{I}{4\cdot\pi\cdot1.5}\cdot\sqrt{2}$$

Поље $\mathrm{H_{A2}}$:



(2)

$$H_{\mathrm{A2}}=\frac{I}{4\cdot\pi\cdot1.5}\cdot\left(\sin\alpha'_1-\sin\alpha'_2\right)$$

$$H_{\mathrm{A2}}=\frac{I}{4\cdot\pi\cdot1.5}\cdot\left(\sin(+45^\circ)-\sin(0^\circ)\right)$$

$$H_{\mathrm{A2}}=\frac{I}{4\cdot\pi\cdot1.5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Укупно поље $\mathrm{H_A}$:

$$H_{\mathrm{A}}=\frac{I}{4\cdot\pi\cdot1.5}\cdot\sqrt{2}+\frac{I}{4\cdot\pi\cdot1.5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{I}{4\cdot\pi\cdot1.5}\cdot\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}$$

Магнетна индукција у тачки A, $\mathrm{B_A}$:

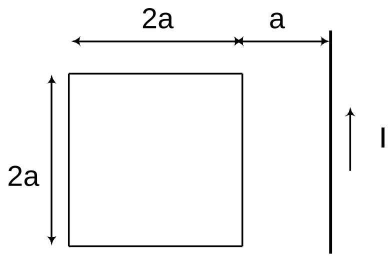
$$B_{\mathrm{A}}=\mu_0\cdot H_{\mathrm{A}}=4\cdot\pi\cdot10^{-7}\,\frac{50}{4\cdot\pi\cdot1.5}\cdot\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}\,[\mu\mathrm{T}]$$

Смјер вектора маг. индукције једнак је смјеру маг. поља.

6. Одредите магнетски ток који се затвара кроз затворену петљу приказану на слици.

Задано:

a = 1 [cm]
I = 10 [A]



Уводни појмови:

Магнетски ток је скаларна величина којом се описује магнетно поље и дефинисан је као:

$$\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}$$

$$\Phi=\oiint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=\oiint_S\vec{S}\cdot d\vec{B}$$

Примјер, ток кроз затворену петљу:

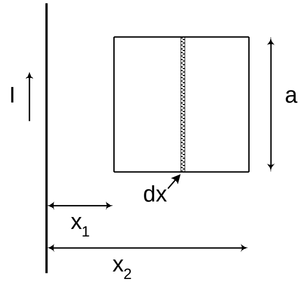
$$\Phi=\oiint_S\vec{B}(x)\cdot d\vec{S}=\int_{x_1}^{x_2}B(x)\cdot\mathrm{a}\cdot dx$$

$$\Phi=\int_{x1}^{x2}\mu_0\cdot\frac{I}{2\cdot\pi\cdot x}\cdot\mathrm{a}\cdot dx$$

$$\Phi=\mu_0\cdot\frac{I\cdot\mathrm{a}}{2\cdot\pi}\int_{x1}^{x2}\frac{dx}{x}$$

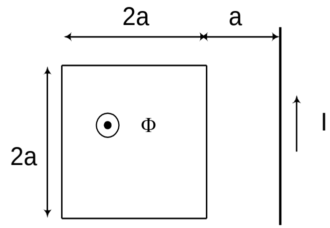
$$\Phi=\mu_0\cdot\frac{I\cdot\mathrm{a}}{2\cdot\pi}\cdot ln\,x\Big|_{x1}^{x2}$$

$$\Phi=\mu_0\cdot\frac{I\cdot\mathrm{a}}{2\cdot\pi}\cdot ln\,\frac{x_2}{x_1}$$



Решење:

Смјер магнетног тока одређује се правилом десног завртња



Палац се ставља у смјер струје кроз проводник и тада прсти одређују смјер магнетног тока.

Интензитет тока:

$$\Phi=\mu_0\cdot\frac{I\cdot2\cdot\mathrm{a}}{2\cdot\pi}\cdot ln\,\frac{x_2}{x_1}=\mu_0\cdot\frac{I\cdot2\cdot\mathrm{a}}{2\cdot\pi}\cdot ln\,\frac{3\mathrm{a}}{\mathrm{a}}=\mu_0\cdot\frac{I\cdot\mathrm{a}}{\pi}\cdot ln\,3$$

$$\Phi=4\cdot\pi\cdot10^{-7}\cdot\frac{10\cdot10^{-2}}{\pi}\cdot ln\,3=44\,[n\mathrm{Vs}]$$

7. У хомогеном магнетном пољу између полова трајног магнета густоће магнетног тока (магнетне индукције) 0.5 [T] гиба се проводник дужине 50 [cm] брзином од 30 [m/s] у смјеру:

а) окомитом на силнице магнетног поља,

б) под углом од 45° у односу на силнице магнетног поља.

Потребно је одредити поларитет и интензитет напона који се на њему индуцира. За први случај одредите колика би се снага потрошила на отпору R који је спојен на проводник.

Задано:

B = 0.5 [T] $\quad$ $l_{ПРОВОДНИКА}$ = 50 [cm]

v = 30 [m/s] $\quad$ R = 10 [Ω]

Уводни појмови:

Индуцирани напон у проводнику који се гиба у магнетном пољу (напон помицања):

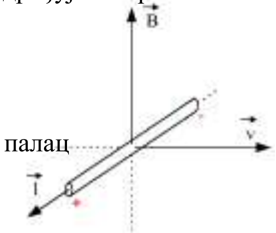
$$e = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{l}\ [\mathrm{V}]$$

Смјер индуцираног напона одређује се правилом лијеве руке:

силнице (B) - длан

гибање (v) - прсти

поларитет/смјер напона (е) - палац



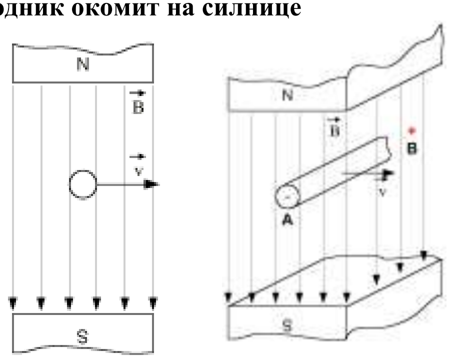
Интензитет напона:

$$e = B \cdot l \cdot v \cdot \sin(\alpha)[\mathrm{V}]$$

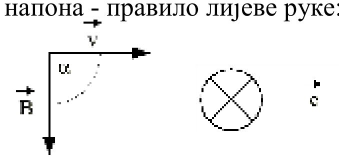
l је дужина проводника у магнетном пољу!!!

угао α је угао који затварају вектори поља (индукције) и брзине (*само компонента брзине окомита на поље ствара напон*)

Проводник окомит на силнице



Поларитет напона - правило лијеве руке:



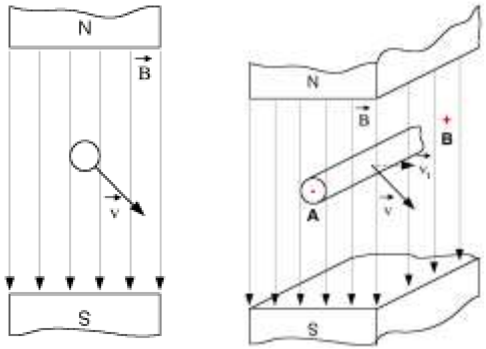
Интензитет индуцираног напона:

$$e = B \cdot l \cdot v \cdot \sin(\alpha) = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 30 \cdot \sin(90°)$$

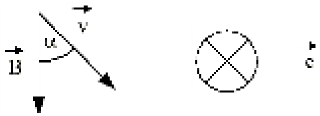
$$e = 7.5[\mathrm{V}]$$

$$U_{BA} = 7.5[\mathrm{V}](\mathrm{B} \Rightarrow +, \mathrm{A} \Rightarrow -)$$

Проводник под углом од 45°



Поларитет напона - правило лијеве руке:



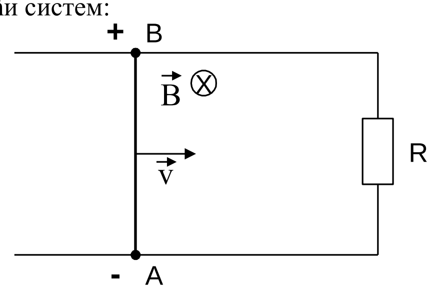
Интензитет индуцираног напона:

$$e = B \cdot l \cdot v \cdot \sin(\alpha) = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 30 \cdot \sin(45°)$$

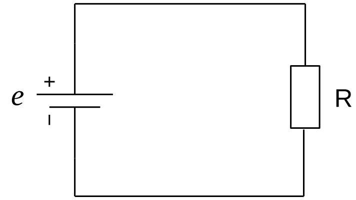
$$e = 5.3[\mathrm{V}]$$

$$U_{BA} = 5.3[\mathrm{V}](\mathrm{B} \Rightarrow +, \mathrm{A} \Rightarrow -)$$

Прикључивањем отпора на проводник добијамо следећи систем:



$\Rightarrow$



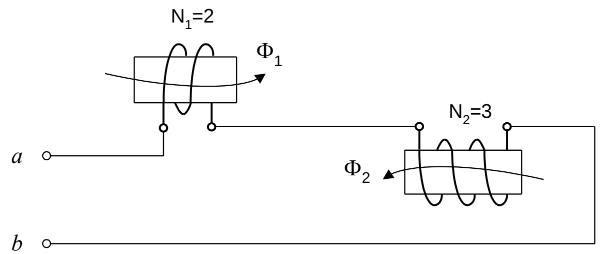
Снага на отпору:

$$P_R = \frac{e^2}{R} = \frac{7.5^2}{10} = 5.6[\mathrm{W}]$$

---

8. На слици су нацртане двије завојнице с два односно три завоја, кроз које пролазе временски промјењиви магнетски токови. Временска промјена токова постигнута је изворима који на слици нису нацртани. Колики се напон $U_{ab}(m)$ индуцира између стезаљки *a* и *b* у временском интервалу 0 < t <6[s]. Графикички приказати напон за дани временски интервал. Одредите напон у тренутку t = 1 [s].

$\Phi_1(t) = 0.2 \cdot t2 + 1$ [Vs] $\quad$ $\Phi_2(t) = -0.5 \cdot t + 4$ [Vs]



Уводни појмови:

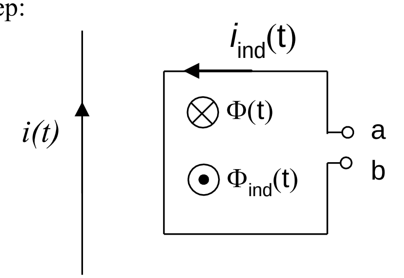
Електромагнетна индукција је појава да се у затвореном завоју ствара или индуцира напон ако се мијења магнетски ток што га обухвата завој.

Смјер индуцираног напона дефинисан је Ленцовим законом:

*Смјер индуцираног напона је увијек такав да се од тог напона створена струја својим магнетским учинком противи **временској** промјени магнетног тока због којега је дошло до индуцирања напона.*

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}; \quad e = -\mathrm{N} \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

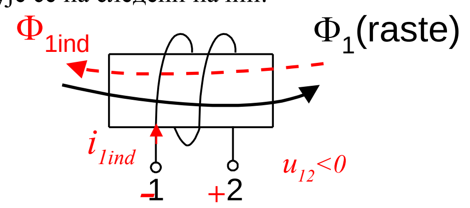
Примјер:



- ако i(t) расте тада и ток Φ (t), приказаног смјера, расте
- индуцирани ток, $\Phi_{ind}(t)$ супротног је смјера
- тај ток је створила индуцирана струја, $P_{nd}(t)$ чији је смјер одређен правилом десног завртња
- ту струју је створио индуцирани напон приказаног поларитета; $U_{ab}(t) < 0$

Решење:

Напон $U_{ab}(t)$ једнак је алгебарском збиру индуцираних напона на првој и другој завојници.
Поларитет напона на стезаљкама прве завојнице одређује се на следећи начин:



- будући да Φ_1 расте, индуцирани ток Φ_{1ind} је супротног смјера
- такав ток је створила индуцирана струја, смјера приказана на слици
- због тога је индуцирани напон U_{12} приказаног поларитета

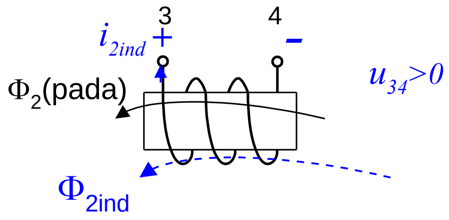
По интензитету напон U_{12} (t):

$$\Phi_1(t) = 0.2 \cdot t^2 + 1 [\text{Vs}]$$

$$|u_{12}(t)| = \left| N_1 \frac{d\Phi_1(t)}{dt} \right| = N_1 \cdot \left| \frac{d(0.2 \cdot t^2 + 1)}{dt} \right|$$

$$|u_{12}(t)| = N_1 \cdot 0.4 \cdot t = 2 \cdot 0.2 \cdot t = 0.8 \cdot t [\text{V}]$$

Поларитет напона на стезаљкама друге завојнице одређује се на следећи начин:



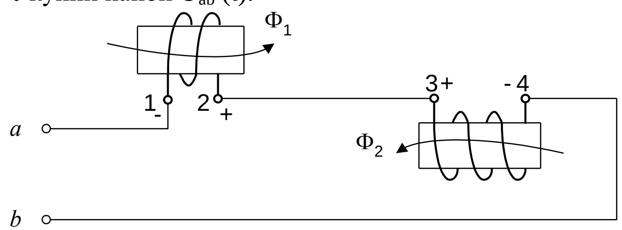
- будући да Φ_2 пада, индуцирани ток Φ_{2ind} је истог смјера
- такав ток је створила индуцирана струја приказана на слици
- због тога је индуцирани напон U_{34} приказаног поларитета

По интензитету напон U_{34} (t):

$$\Phi_2(t) = -0.5 \cdot t + 4 [\text{Vs}]$$

$$|u_{34}(t)| = \left| N_2 \frac{d\Phi_2(t)}{dt} \right| = N_2 \cdot \left| \frac{d(-0.5 \cdot t + 1)}{dt} \right| = N_2 \cdot 0.5 = 3 \cdot 0.5 = 1.5 [\text{V}]$$

Укупни напон U_{ab} (t):



$$u_{ab}(t) = u_{12}(t) + u_{34}(t)$$

$$u_{ab}(t) = -|u_{12}(t)| + |u_{34}(t)|$$

Напон U_{ab} (t):

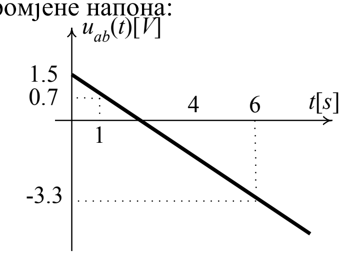
$$u_{ab}(t) = -|u_{12}(t)| + |u_{34}(t)|$$

$$u_{ab}(t) = -0.8 \cdot t + 1.5 [\text{V}]$$

У тренутку t = 1 [s]:

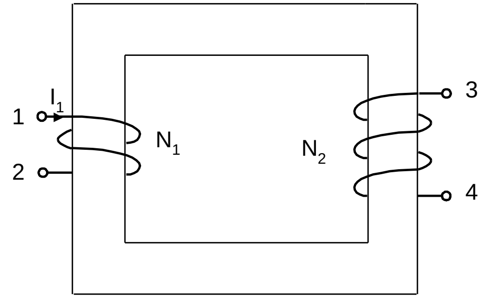
$$u_{ab}(t = 1[s]) = -0.8 \cdot 1 + 1.5 = 0.7 [\text{V}]$$

График промјене напона:



9. Двије завојнице имају фактор магнетне везе k. Прва завојница има N_1 завоја. При струји I_1 кроз прву завојницу ствара се ток Φ_1. Ако се струја прве завојнице линеарно смањи на нулу у времену 2 [ms] у другој завојници се индуцира напон 63.75 [V]. Језгра је од неферомагнетног материјала. Одредите индуктивитет прве и друге завојнице, међуиндуктивитет, број завоја друге завојнице, напон самоиндукције те нацртајте надокнадну шему.

k = 0.85	N_1 = 250 [zavoja]
I_1 = 2 [A]	Φ_1 = 0.3 [mVs]

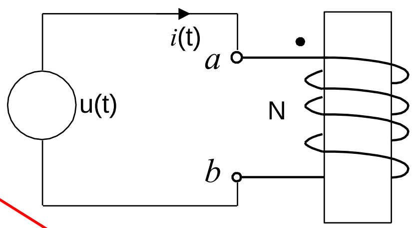


Уводни појмови:

Самоиндукција је појава да се у самом намотају кроз који пролази **временски** промјењива струја индуцира напон самоиндукције због промјењивог тока Φ што га је произвела властита струја тог намотаја.

$$u_{ab} = N\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Psi}{dt}$$

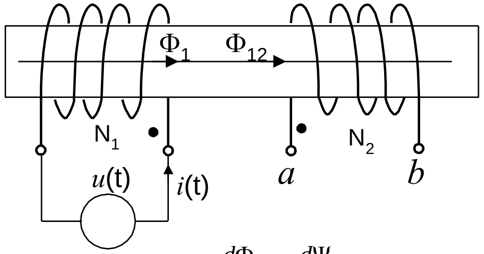
$$u_{ab} = L\frac{di}{dt}$$



стезаљка означена с тачком

i(t) улази у стезаљку означену с тачком

Међуиндукција је појава да се због промјене јачине струје у једном (примарном) намотају индуцира напон у неком другом (секундарном) намотају.



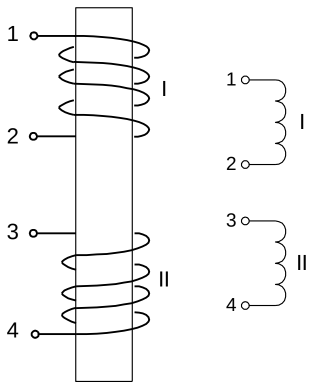
$$u_{ab} = N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = \frac{d\Psi_{12}}{dt}$$

$$u_{ab} = M \frac{di}{dt}$$

стезаљка означена с тачком (2. завојница)

i(t) улази у стезаљку означену с тачком (1. завојница)

Симболичко означавање смјера намотања завојнице:



Произвољно одаберемо стезаљку на првој завојници уз коју поставимо тачку (то може бити стезаљка 1 или 2).

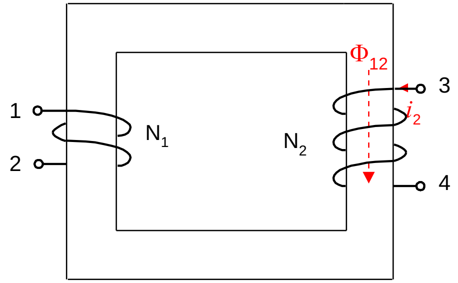
"У мислима" пропустимо струју I_1 да потече завојницом и то тако да она *улази* у стезаљку означену с тачком.

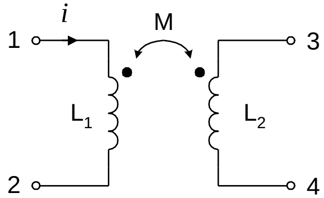
Одредимо смјер тока Φ_I које ствара замишљена струја I_1.

На другој завојници тражимо ону стезаљку у коју мора улазити струја i_{II} по критерију да замишљене струје кроз завојницу I и II дају токове *истог* смјера. Ту стезаљку на другој завојници означавамо с тачком.

Решење:

Надокнадна шема одређује се на претходно описани начин:





За приказану надокнадну шему вриједи:

$$u_{34} = M\frac{di}{dt} \qquad u_{12} = L_1\frac{di}{dt}$$

Одређивање L_1:

$$L_1 = \frac{N_1 \cdot \Phi_1}{I_1} = \frac{250 \cdot 3 \cdot 10^{-4}}{2} = 37.5\,[\text{mH}]$$

Одређивање M:

$$|u_{34}| = \left| M \frac{di_1}{dt} \right| = 63.75\,[\text{V}]$$

$$M = \frac{|u_{34}|}{\left|\frac{di_1}{dt}\right|} = \frac{|u_{34}|}{\left|\frac{\Delta I_1}{\Delta t}\right|} = \frac{|63.75|}{\left|\frac{0-2}{2\cdot 10^{-3} - 0}\right|} = 63.75\,[\text{mH}]$$

Одређивање L_2:

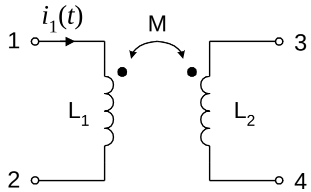
$$M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} \quad \Rightarrow \quad L_2 = \frac{M^2}{k^2 \cdot L_1} = 150\,[\text{mH}]$$

Одређивање N_2:

$$M = \frac{N_2 \cdot \Phi_{12}}{I_1} = \frac{N_2 \cdot k \cdot \Phi_1}{I_1} \quad \Rightarrow \quad N_2 = \frac{M \cdot I_1}{k \cdot \Phi_1}$$

$$N_2 = \frac{63.75 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{0.85 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 500\,[\text{zavoja}]$$

За вријеме смањивања струје I_1 на нулу тада ће се на првој завојници индуцирати напон самоиндукције, а на другој завојници (будући да је међуиндуктивно везана) напон међуиндукције.



Струја $i_T(t)$:

$$i_1(t) = -10^3 \cdot t + 2\ [\text{A}]$$

Напон самоиндукције U_{12}:

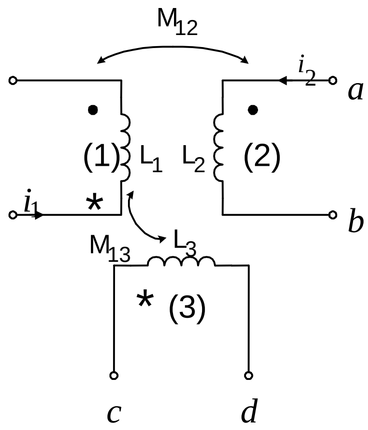
$$u_{12} = L_1 \frac{di_1}{dt} = 37.5 \cdot 10^{-3} \cdot \left(-10^3 + 0\right) = -37.5\,[\text{V}]$$

Напон међуиндукције U_{34}:

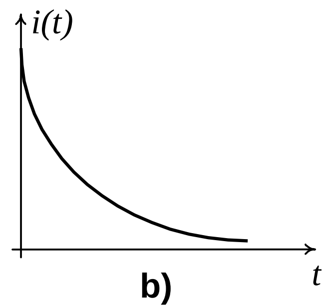
$$u_{34} = M \frac{di_1}{dt} = 63.75 \cdot 10^{-3} \cdot \left(-10^3 + 0\right) = -63.75\,[\text{V}]$$

---

10. Одредите напоне $U_{ab}(m)$ и $U_{cd}(m)$ ако је временска промјена струја $i_1(t)$ и $i_2(t)$ једнака и задана према слици б). Задано: $L_1 = L_2 = L_3 = M_{12} = M_{13}$; $M_{23} = 0$



a)



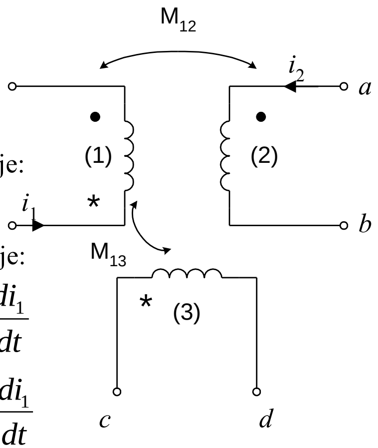
b)

Решење:

Напон U_{ab} ствара струја i_2 текући кроз завојницу (2) и струја i_1 текући завојницом (1):

$$u_{ab}(t)=u_{abL2}(t)+u_{abM12}(t)$$

Уважавајући смјер и промјену струја i_1 и i_2 те означене референтне тачке вриједи:



Напон самоиндукције:

$$u_{abL2}(t)=L_2\cdot\frac{di_2}{dt}$$

Напон међуиндукције:

$$u_{baM12}(t)=M_{12}\cdot\frac{di_1}{dt}$$

$$\Rightarrow$$

$$u_{abM12}(t)=-M_{12}\cdot\frac{di_1}{dt}$$

$$u_{ab}(t)=L_2\cdot\frac{di_2}{dt}-M_{12}\cdot\frac{di_1}{dt}=0$$

Напон U_{cd} ствара само струја i_1 текући кроз завојницу (1) ($M_{23}=0$ и кроз завојницу (3) не тече струја):

$$u_{cd}(t)=M_{13}\cdot\underbrace{\frac{di_1}{dt}}_{<0}<0$$

---

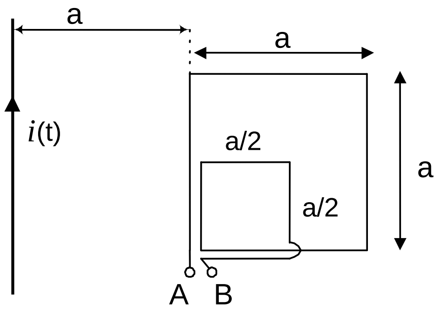
11. У истој равнини с дугим проводником налази се проводна петља положаја и димензија према слици а). Струја која тече кроз равни проводник мијења се као што је приказано на слици б). Одредите:

а) међуиндуктивитет M,

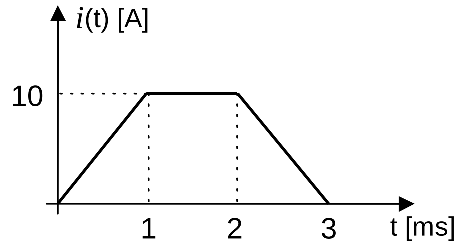
б) напон $U_{AБ}(t)$.

Zadano:

a = 0.1 [m]



a)



b)

Решење:

Међуиндуктивитет се одређује као:

$$M=\frac{\Phi}{i}$$

Ф - ток који се затвара кроз задану петљу

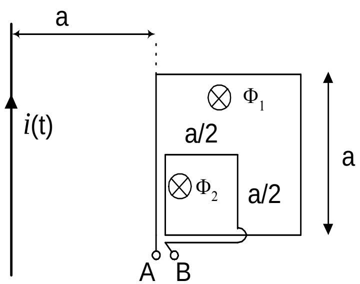
i - струја која је узроковала тај ток

Да би се одредио међунидуктивитет мора се прво одредити укупни ток. Ток се затвара кроз двије петље и истога је смјера. Укупни ток једнак је:

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2$$

$$\Phi_1=\mu_0\cdot\frac{i\cdot a}{2\cdot\pi}\cdot\ln\frac{2a}{a}$$

$$\Phi_2=\mu_0\cdot\frac{i\cdot\frac{a}{2}}{2\cdot\pi}\cdot\ln\frac{\frac{3a}{2}}{a}$$



$$\Phi=\mu_0\cdot\frac{i\cdot a}{2\cdot\pi}\cdot\ln 2+\mu_0\cdot\frac{i\cdot a}{4\cdot\pi}\cdot\ln\frac{3}{2}=\mu_0\cdot\frac{i\cdot a}{2\cdot\pi}\cdot\left(\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\right)$$

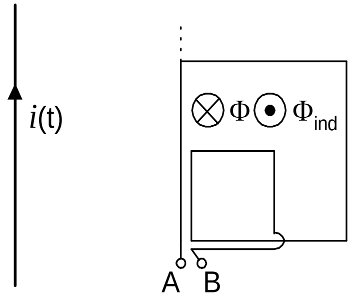
Међуиндуктивитет онда износи:

$$M=\frac{\Phi}{i}=\frac{\mu_0\cdot\frac{i\cdot a}{2\cdot\pi}\cdot\ln\sqrt{6}}{i}=4\cdot\pi\cdot10^{-7}\cdot\frac{0.1}{2\cdot\pi}\cdot0.895=18\,[nH]$$

Поларитет напона U_{ab} одређује се Лензовим правилом, а интензитет напона једнак је деривацији тока по времену.

Будући да је једина величина која се мијења у времену струја, о њеном облику ће зависити и индуцирани напон $U_{AБ}$.

У времену 0 < t < 1 [ms] струја i(t) расте:



$$i(t)=10^4\cdot t\,[\mathrm{A}]$$

$$i\uparrow\ \Rightarrow\ \Phi\uparrow$$

$$|u_{ab}(t)|=\frac{d\Phi}{dt}=\frac{d\left(\mu_0\cdot\frac{i(t)\cdot a}{2\cdot\pi}\cdot\ln\sqrt{6}\right)}{dt}$$

$$|u_{ab}(t)|=\mu_0\cdot\frac{a}{2\cdot\pi}\cdot\ln\sqrt{6}\,\frac{di}{dt}=\mu_0\cdot\frac{a}{2\cdot\pi}\cdot\ln\sqrt{6}\cdot10^4$$

Напон $U_{AБ}(t)$ је за 0 < t < 1 [ms] константан и износи:

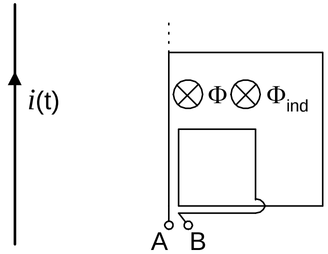
$$|u_{AB}(t)|=\mu_0\cdot\frac{a}{2\cdot\pi}\cdot\ln\sqrt{6}\cdot10^4=4\cdot\pi\cdot10^{-7}\cdot\frac{0.1}{2\cdot\pi}\cdot\ln\sqrt{6}\cdot10^4=180\,[\mu V]$$

$$u_{AB}(t)=+180\,[\mu V]$$

За 1 [ms] < t< 2 [ms] струја је константна па је напон $U_{AБ}(t)$:

$$u_{AB}(t)=0$$

У времену 2 [ms] < t < 3 [ms] струја i(t) пада:



$$i(t)=-10^4\cdot t+30\,[\mathrm{A}]$$

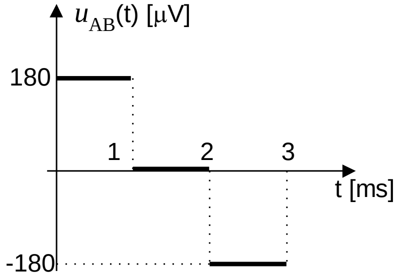
$$i\downarrow\ \Rightarrow\ \Phi\downarrow$$

$$|u_{ab}(t)|=\mu_0\cdot\frac{a}{2\cdot\pi}\cdot\ln\sqrt{6}\,\frac{di}{dt}=\mu_0\cdot\frac{a}{2\cdot\pi}\cdot\ln\sqrt{6}\cdot\left|-10^4\right|$$

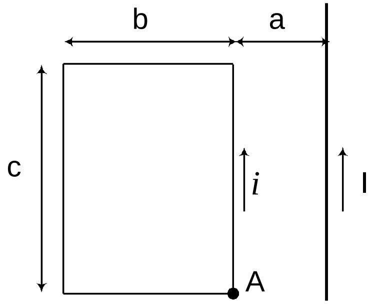
$$|u_{AB}(t)|=180\,[\mu V]$$

$$u_{AB}(t)=-180\,[\mu V]$$

Напон $u_{AБ}(t)$ за $0 < t < 3$ [ms] изгледа као на графику:



11. Танка завојница правоуглог пресјека с N завоја налази се у магнетном пољу равног дугог проводника. Одредите промјену енергије укупног магнетног поља система ако завојницу заротирамо око тачке A за 90º супротно од смјера казаљке на сату. Систем се налази у зраку, а завојница је у равнини с проводником.



Задано:

a = 10 [cm]
b = 20 [cm]
c = 30 [cm]
I = 10 [kA]
i = 0.5 [A]
N = 50 [завоја]

Решење:

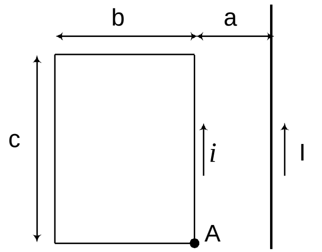
Укупна енергија магнетног поља система дефинисана је као:

$$W = \frac{L_1 \cdot I_1^2}{2} + \frac{L_2 \cdot i^2}{2} \pm M \cdot I_1 \cdot i$$

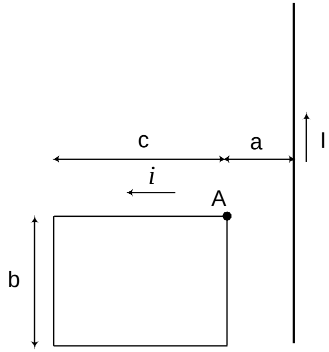
± предзнак зависи о томе да ли су ток самоиндукције и ток међуиндукције истог смјера или не

За приказани систем, за први и други случај, смјерови тока самоиндукције и међуиндукције су исти.

$$W_2 = \frac{L_1 \cdot I^2}{2} + \frac{L_2 \cdot i^2}{2} + M_2 \cdot I \cdot i$$



$$W_1 = \frac{L_1 \cdot I^2}{2} + \frac{L_2 \cdot i^2}{2} + M_1 \cdot I \cdot i$$



Разлика енергија дефинисана је као:

$$\Delta W = W_2 - W_1$$

$$\Delta W = \frac{L_1 \cdot I^2}{2} + \frac{L_2 \cdot i^2}{2} + M_2 \cdot I \cdot i - \frac{L_1 \cdot I^2}{2} - \frac{L_2 \cdot i^2}{2} - M_1 \cdot I \cdot i$$

$$\Delta W = M_2 \cdot I \cdot i - M_1 \cdot I \cdot i$$

Међуиндуктивитети у првом и другом случају:

$$M_1 = \frac{N \cdot \Phi_1}{I} = \frac{N \cdot \mu_0 \cdot \frac{I \cdot c}{2 \cdot \pi} ln \frac{a+b}{a}}{I} = N \cdot \mu_0 \cdot \frac{c}{2 \cdot \pi} ln \frac{a+b}{a}$$

$$M_2 = \frac{N \cdot \Phi_2}{I} = \frac{N \cdot \mu_0 \cdot \frac{I \cdot b}{2 \cdot \pi} ln \frac{a+c}{a}}{I} = N \cdot \mu_0 \cdot \frac{b}{2 \cdot \pi} ln \frac{a+c}{a}$$

Промјена енергије онда износи:

$$\Delta W = I \cdot i \cdot (M_2 - M_1) = \frac{I \cdot i \cdot N \cdot \mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \left(b \cdot ln \frac{a+c}{a} - c \cdot ln \frac{a+b}{a} \right)$$

$$\Delta W = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0.5 \cdot 50 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot \pi} \cdot \left(20 \cdot 10^{-2} \cdot ln \frac{40}{10} - 30 \cdot 10^{-2} \cdot ln \frac{30}{10} \right)$$

$$\Delta W = -2.3 [\mathrm{mW}]$$

12. Задан је магнетски круг с торусном језгром од феромагнетног материјала. Уколико кроз ту торусну језгру протиче магнетски ток од 0.7 [mVs] колико износи струја која протиче завојницом? Ако се направи зрачни распор у торусној језгри ширине 1 mm колика струја треба тећи завојницом да би магнетски ток остао непромијењен?

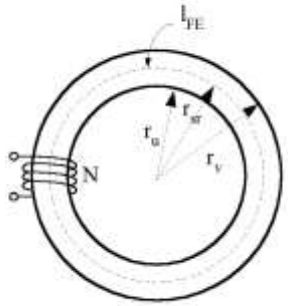
Задано је: N = 100 завоја l_{FE} = 20 [cm]
S_{FE} = 5 [cm2] F = 7·10-4 [Vs]

Таблица магнетизирања

B [T]	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
H [A/m]	380	500	750	1200	1900

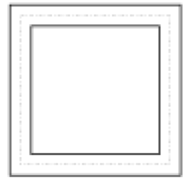
Уводни појмови:

Феромагнетна језгра



$$l_{FE} = 2 \cdot \pi \cdot r_{sr}$$

$$r_{sr} = \frac{r_u + r_v}{2}$$



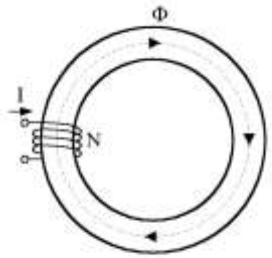
Слично вриједи и за друге облике:

Веза између магнетног поља и струје која га ствара - закон протицања:

$$H \cdot l = I \cdot N$$

$$\sum_i H_i \cdot l_i = \sum_j I_j \cdot N_j$$ $\Rightarrow$ Општи случај

Без зрачног распора



$$H_{FE} \cdot l_{FE} = I \cdot N$$

Познато: N, l_{FE}, Φ

Φ (Φ_{FE}) ⇒ B_{FE} ⇒ таблица ⇒ H_{FE}

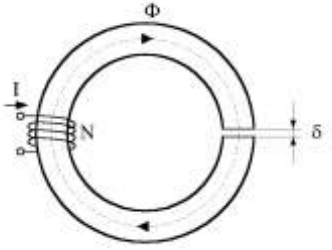
$$B_{FE} = \frac{\Phi_{FE}}{S_{FE}} = \frac{7 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-4}} = 1.4 [\mathrm{T}]$$

$$B_{FE} \Rightarrow \text{ттаблиц магнетизир ања} \Rightarrow H_{FE} = 1200 \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right]$$

$$H_{FE} \cdot l_{FE} = I \cdot N$$

$$I = \frac{H_{FE} \cdot l_{FE}}{N} = \frac{1200 \cdot 0.2}{100} = 2.4 [\mathrm{A}]$$

Са зрачним распором



$$l_{FE}-\delta \approx l_{FE}$$

$$I\cdot N = H_{FE}\cdot l_{FE}+H_{\delta}\cdot l_{\delta}$$

Ток који протиче језгром затвара се преко зрачног распора:

$$\Phi_{FE}=\Phi_{\delta}$$

Због великог отпора који представља вакум (зрак) за магнетски ток сав ток се затвара на мјесту гдје је размак између отворених крајева феромагнетне језгре најмањи - зрачни распор.

Због тога се може рећи да је површина кроз коју тај ток пролази једнака површини феромагнетне језгре:

$$S_{FE}=S_{\delta}$$

Из тога даље слиједи да су и магнетне индукције једнаке:
$$B_{FE}=B_{\delta}$$

Познавајући горе наведено може се доћи до коначног рјешења:

$$\Phi_{FE}=\Phi_{\delta}=\Phi=7\cdot 10^{-4}\,[\mathrm{Vs}]$$

$$B_{\delta}=B_{FE}=\frac{\Phi_{FE}}{S_{FE}}=\frac{7\cdot 10^{-4}}{5\cdot 10^{-4}}=1.4\,[\mathrm{T}]$$

$$H_{FE}=1200\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right]$$

$$H_{\delta}=\frac{B_{\delta}}{\mu_0}=\frac{1.4}{4\cdot\pi\cdot 10^{-7}}=1.114\cdot 10^{6}\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right]$$

$$I\cdot N=H_{FE}\cdot l_{FE}+H_{\delta}\cdot l_{\delta}$$

$$I=\frac{H_{FE}\cdot l_{FE}+H_{\delta}\cdot l_{\delta}}{N}=\frac{1200\cdot 0.2+1.1\cdot 10^{6}\cdot 1\cdot 10^{-3}}{100}=\frac{240+1114}{100}$$

$$I=13.54\,[\mathrm{A}]$$

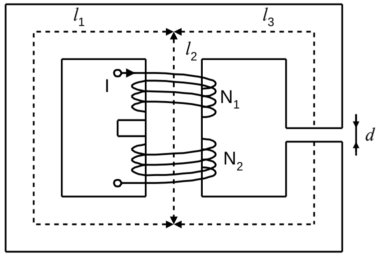
Успоређујући ову вриједност с претходном може се видјети да за одржавање заданог тока у зрачном распору ширине 1 mm отпада чак 13.54-2.4=11.14 A !!!

То је за више од 4x већа вриједност од оне за одржавање тока у феромагнетној језгри 200x веће дужине.

---

13. Задан је магнетски круг с језгром од феромагнетног материјала. Одредите струју I која протиче кроз завојницу ако је познато да је у распору нагомилана магнетна енергија W_d. Карактеристика магнетног материјала задана је помоћу таблице.

Wd = 9.6 [mJ]
l_1 = l3 = 20 [cm]
l_2 = 20 [cm]
d = 0.1 [mm]
S_1 = S3 = S_0 = 2 [cm2]
S_2 = 4 [cm2]
N_1 = 200 [завоја]
N_2 = 100 [завоја]



B(T)	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.45	1
H(A/m)	200	240	300	380	500	818	1202	1350	15

Уводни појмови:

При решавању сложених магнетских кругова користимо два закона:

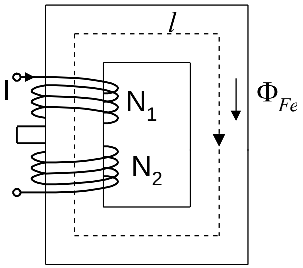
1. Алгебарска сума токова у сваком чвору магнетног круга једнака је нули

$$alg\sum_i \Phi_i=0$$

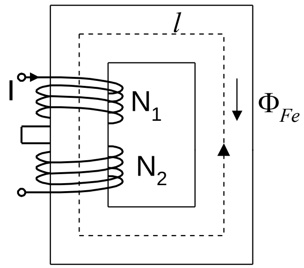
2. Збир падова магнетских напона дуж било којег затвореног пута (контуре) магнетног круга једнак је магнетомоторној сили у тој контури

$$alg\sum_i H_i\cdot l_i=alg\sum_j N_j\cdot I_j$$

Примјери различитог смјера обилажења контуре:



$$N_1\cdot I-N_2\cdot I=H_{Fe}\cdot l$$



$$N_2\cdot I-N_1\cdot I=-H_{Fe}\cdot l$$

Решење:

Из познатог интензитета магнетне енергије у зрачном распору могуће је израчунати магнетску индукцију B_o:

$$W_0=\frac{B_0^2}{2\cdot\mu_0}\cdot V \quad\Rightarrow\quad B_0=\sqrt{\frac{W_0\cdot 2\cdot\mu_0}{S\cdot d}}$$

$$B_0=\sqrt{\frac{9.6\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 4\cdot\pi\cdot 10^{-7}}{2\cdot 10^{-4}\cdot 0.1\cdot 10^{-3}}}=1.1\,[\mathrm{T}]$$

Магнетски ток који се затвара кроз зрачни распор једнак је магнетном току у трећем ступу:

$$\Phi_0=\Phi_{Fe3}$$

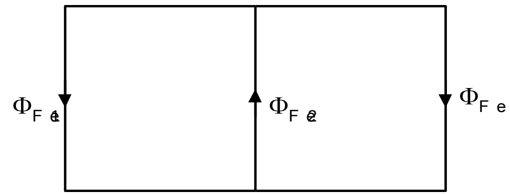
$$B_0\cdot S_0=B_{Fe3}\cdot S_{Fe3}$$

$$B_{Fe3}=B_0=1.1\,[\mathrm{T}]$$

Из таблице магнетизирања може се одредити маг. поље у трећем ступу:

$$H_{Fe3}=380\,[\mathrm{A/m}]$$

Струја I текући кроз завојнице ствара магнетски ток Φ_{Fe2} који се грана на следећи начин:



$$\Phi_{Fe2}=\Phi_{Fe3}+\Phi_{Fe1}$$

$$B_{Fe2}\cdot S_2=B_{Fe3}\cdot S_3+B_{Fe1}\cdot S_1$$

$$B_{Fe2}=\frac{B_{Fe3}+B_{Fe1}}{2}$$

Из закона протицања слиједи

$$H_{Fe1}\cdot l_1=H_{Fe3}\cdot l_3+H_0\cdot d$$

$$H_{Fe1}=\frac{H_{Fe3}\cdot l_3+\frac{B_0}{\mu_0}\cdot d}{l_1}=\frac{380\cdot 20\cdot 10^{-2}+\frac{1.1}{4\cdot\pi\cdot 10^{-7}}\cdot 0.1\cdot 10^{-3}}{20\cdot 10^{-2}}$$

$$H_{Fe1}=818\,[\mathrm{A/m}] \quad\Rightarrow\quad B_{Fe1}=1.3\,[\mathrm{A/m}]$$

Маг. индукција и поље у другом ступу:

$$B_{Fe2}=\frac{1.1+1.3}{2}=1.2\,[\mathrm{T}] \quad\Rightarrow\quad H_{Fe2}=500\,[\mathrm{A/m}]$$

$i(t)$

а I одређује се:

$$-N_2)=H_{Fe1}\cdot l_1+H_{Fe2}\cdot l_2=H_{Fe3}\cdot l_3+H_0\cdot d+H_{Fe2}\cdot l_2$$

$$I=\frac{H_{Fe1}\cdot l_1+H_{Fe2}\cdot l_2}{N_1-N_2}=\frac{818\cdot 20\cdot 10^{-2}+500\cdot 15\cdot 10^{-2}}{200-100}$$

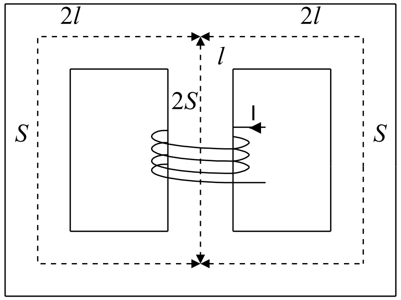
$$I=2.4[\mathrm{A}]$$

---

14. Магнетски круг према слици израђен је од феромагнетног материјала чија је кривуља магнетизирања задана табеларно. Одредите колика се магнетна енергија накупила у кругу.

Задано:

l = 10 [cm]
S = 12 [cm2]
N = 30 [zavoja]
I = 1 [A]



B(T)	0.1	0.4	0.65	0.8	1.2	1.3
H(A/cm)	0.4	1	1.5	2	5	6

Решење:

За крајње ступове вриједи:

$$H_{Fe1}\cdot 2\cdot l=H_{Fe3}\cdot 2\cdot l \;\Rightarrow\; H_{Fe1}=H_{Fe3}=H \;\Rightarrow\; B_{Fe1}=B_{Fe3}=B$$

Магнетски токови:

$$\Phi_{Fe2}=\Phi_{Fe1}+\Phi_{Fe2}$$

$$B_{Fe2}\cdot 2\cdot S=B_{Fe1}\cdot S+B_{Fe2}\cdot S$$

$$B_{Fe2}=B_{Fe1}=B_{Fe2}=B$$

Из закона протицања:

$$I\cdot N=H_{Fe2}\cdot l+H_{Fe3}\cdot 2\cdot l$$

$$I\cdot N=H_{Fe2}\cdot l+H_{Fe1}\cdot 2\cdot l=H\cdot l+H\cdot 2\cdot l$$

$$H=\frac{I\cdot N}{3\cdot l}=\frac{1\cdot 30}{3\cdot 10}=1[\mathrm{A/cm}]$$

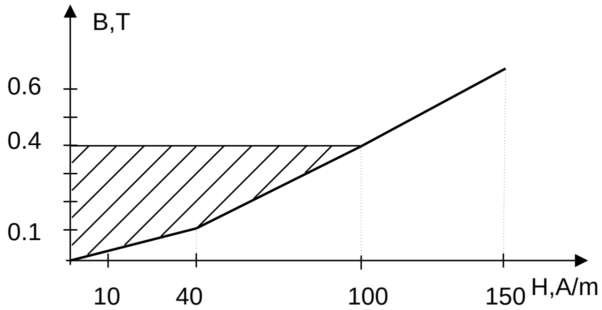
Из таблице магнетизирања маг. индукција:

$$B=0.4[\mathrm{T}]$$

ω је густоћа енергије по волумену накупљена у свакој тачки материјала и дефинисан је као:

$$\omega=\int_0^{\mathrm{B}}\mathrm{H}\,d\mathrm{B};\quad \omega=\int_0^{0.4}\mathrm{H}\,d\mathrm{B}$$

Интеграл се може ријешити само уколико претпоставимо линеарну зависност H-B по дијеловима:



Густоћа енергије једнака је означеној површини:

$$\omega=\frac{0.1\cdot 40}{2}+40\cdot(0.4-0.1)+\frac{(100-40)\cdot(0.4-0.1)}{2}$$

ω је једнака:

$$\omega=2+12+9=23\left[\mathrm{VAs/m^3}\right]$$

Укупна енергија износи

$$d\mathrm{W}=\omega\cdot d\mathrm{V}$$

$$\mathrm{W}=\omega\cdot\mathrm{V}=\omega\cdot\left(\mathrm{S}\cdot(2\cdot l+2\cdot l)+2\cdot S\cdot l\right)=\omega\cdot 6\cdot S\cdot l$$

$$\mathrm{W}=6\cdot 23\cdot 12\cdot 10^{-4}\cdot 0.1=16.56[\mathrm{mVAs}]$$