

Stacionarno magnetsko polje

Magnetsko polje nepromenljivih struja

- Magnetske pojave, u smislu činjenice da neki materijali privlače sitne komadiće gvožđa, zapažene su veoma davno, još u antičko doba.
- Ta osobina je uočena prvo kod rude gvožđa magnetita, koja je prvobitno, vađena kod maloazijskog grada Magnezije.
- Oko 120 godina prije nove ere je, u Kini, uočeno da se magnet u obliku šipke, obješen o konac tako da mu se dozvoljava kretanje u horizontalnoj ravni, uvijek postavlja u isti položaj. Jedan pol magnetita je uvijek bio okrenut ka sjevernom, a drugi ka južnom Zemljinom polu, pa su, zbog toga, polovi magnetita i nazvani sjeverni i južni.

Magnetizam – definicija

- Svojstvo materije koje je posebno izraženo kod tzv. magnetskih materijala.
- Razlikujemo permanentne (feromagnete) i povremene magnete

ee07_8

3

Magnetizam - definicija

- Kod permanentnih magneta svojstvo je uzrokovano elementarnim strujama na razini molekula samog materijala.
- Magnetska svojstva se gube sa temperaturom (Curieva točka)

ee07_8

4

Magnetizam – definicije

- Električna struja dok protječe vodičem uzrokuje u prostoru oko sebe magnetsko polje.
- U prirodi uvijek postoje zajedno i električno i magnetsko polje (elektromagnetsko polje).

ee07_8

5

Magnetizam - pojave

- Magnetske pojave su
 - sile kojima jedan magnet djeluje na drugi
 - elektromagnetska indukcija

ee07_8

6

Magnetski polovi

- Magnetsko polje ima dva pola – sjeverni i južni.
- U prirodi ne postoje izolirani magnetski polovi

ee07_8

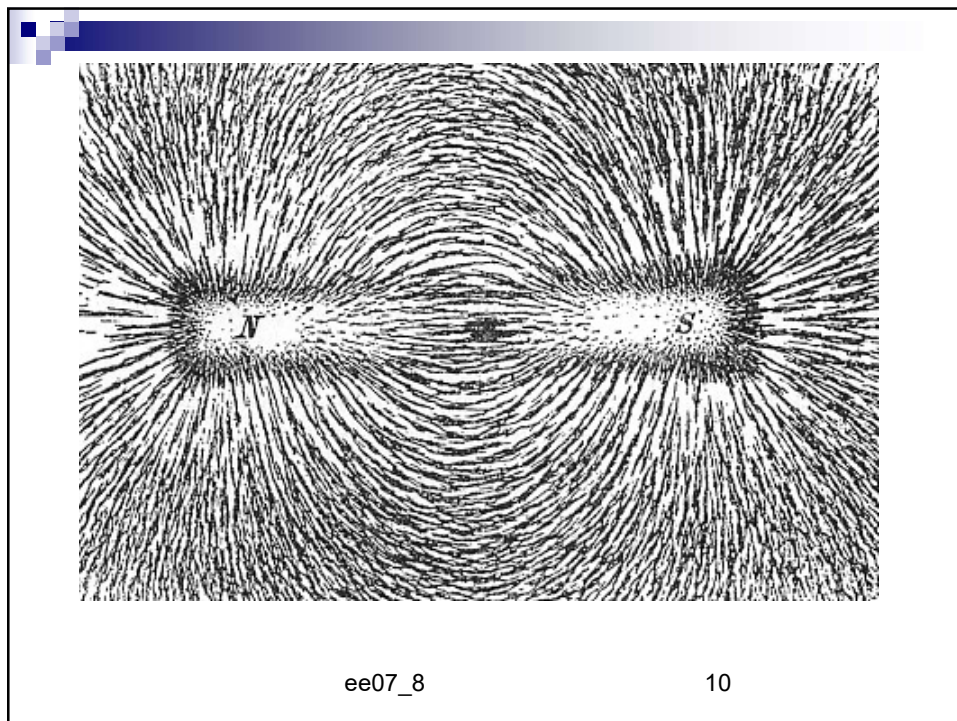
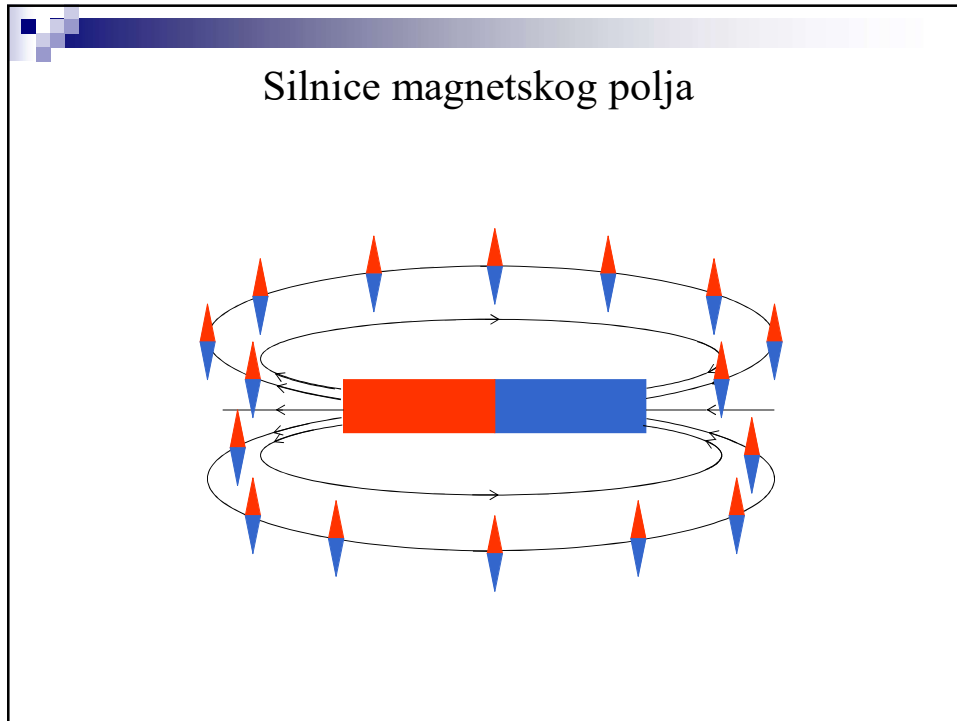
7

Magnetske silnice

- Zamišljene linije koje prate smjer i jakost magnetskog polja nazivaju se **magnetske silnice**
- Smjer sile je dogovoren kao smjer otklona N (sjever) u magnetske igle u magnetskom polju.

ee07_8

8



Magnetski tok

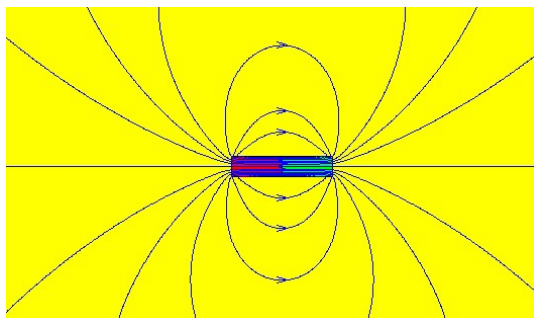
- Magnetski tok je mjera ukupnog broja magnetskih silnica koje prolaze kroz neku površinu.
- Jedinica za mjerenje magnetskog toka u SI sustavu je veber (Wb).
- Ime je dobila po fizičaru Weberu.

ee07_8

11

Magnetska sila i magnetsko polje

- Magnet
 - pojam magneta
 - postojanje dva pola koja se ne mogu razdvojiti
 - magnet je dipol
 - kompas
- Magnetsko polje stalnog magneta

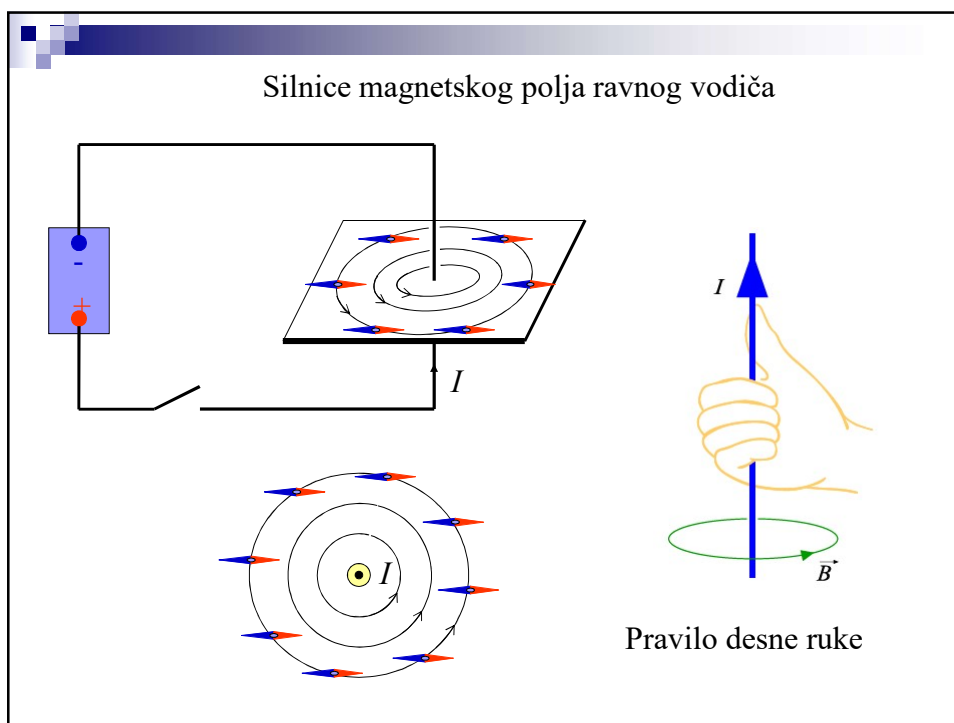
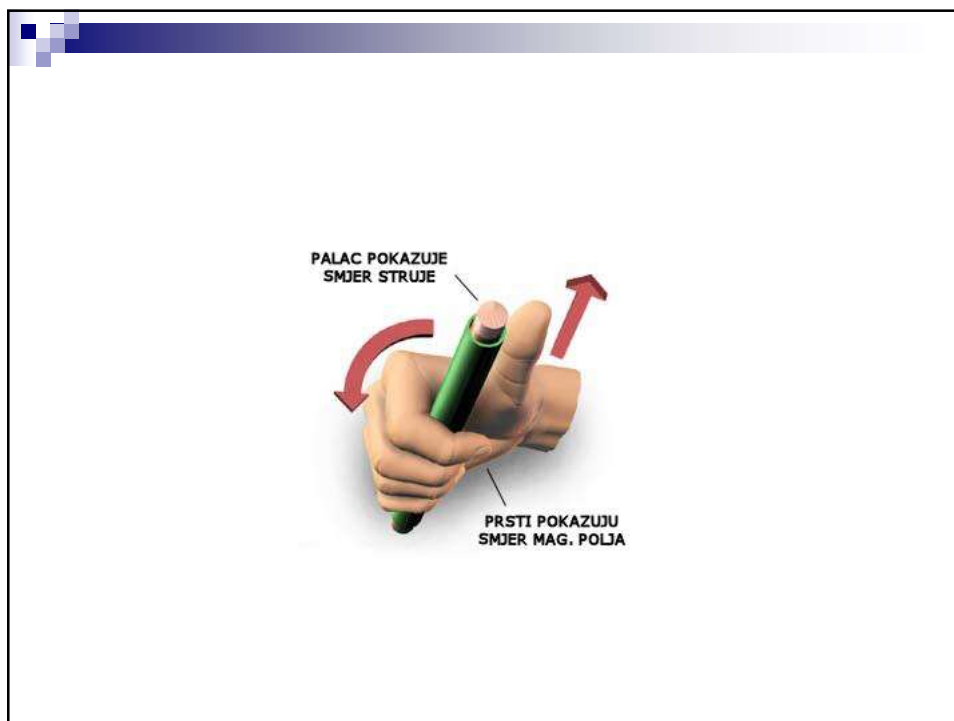


- Linije sila magnetskog polja su **zatvorene** koncentrične linije !!!
- Ne postoji početna i završna tačka linije sila magnetskog polja
- Magnet
 - pojam magneta (mnoštvo naelektrisanja u kretanju)!!!!!!!!!!!!
 - postojanje dva pola koja se ne mogu razdvojiti
 - magnet je dipol
 - kompas

Značaj relacije $F=IlB$

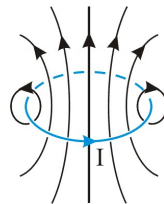
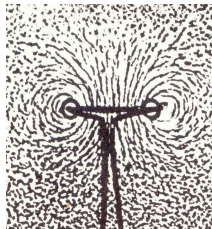
- Vektor B je glavna karakteristika magnetnog polja-Vektorska velicina koja je uvek tangencijalna na linije sile u tacki gde predstavlja polje
- Povezuje mehaničke F , električne I i magnetne B veličine.
- $B= F/ I * l$ magnetna indukcija = sila/ duzina * struja
- Jedinica je $T=N/mA$





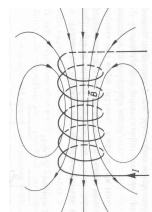
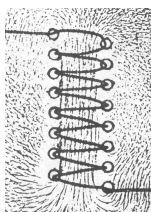
Magnetsko polje električne struje 3

Magnetske silnice kružnog zavoja:



Magnetizam

Magnetske silnice zavojnice:



Unutar zavojnice → polje homogeno; izvan zavojnice → slabo

- Tesla (simbol: T) je SI izvedena jedinica za gustinu magnetnog fluksa ili magnetnu indukciju. Na Generalnoj konferenciji težina i mera u Parizu 1960. godine, jedinica je nazvana u čast Nikoli Tesli.

Oznaka jedinice (T), kao i kod svih drugih SI jedinica koje su nazvane po imenima poznatih naučnika piše se velikim slovom, dok se naziv piše malim početnim slovom (tesla), osim ako se ne nalazi na početku rečenice.

■ Primeri

u svemiru, magnetna indukcija je između 10-10 T i 10-8 T
u Zemljinom magnetnom polju na geografskoj širini od 50° je $5,8 \cdot 10^{-5}$ T, a na ekvatoru (0° geografske širine) je $3,1 \cdot 10^{-5}$ T

u magnetnom polju potkovičastog magneta je 0.001 T
u medicini, na magnetnoj rezonanciji iznosi do 3 T za standardne preglede i do 12 T za istraživanja

U spektrometrima za nuklearna magnetna rezonancija iznosi do 21 T

na sunčevim pegama je 10 T

najjače stalno magnetno polje postignuto je u laboratoriji (Florida državni univerzitet: Nacionalna laboratorija za velika magnetna polja [1] u Talahasiju) je 45 T [2]

najjači puls magnetnog polja dobijen nedestruktivnim metodama u laboratoriji (Koiči Kindo na Osaka Univerzitetu [3]) je 80 T

- Planeta Zemlja takođe poseduje svoje magnetno polje. Ono nas štiti od štetnih uticaja koji dolaze iz svemira, a prevashodno od jonizovanih čestica koje dolaze od Sunca.

U uobičajnom primenama u tehnici koriste se jačine magnetne indukcije do 3-4 T. Kao gravitaciono i električno polje i jačina magnetnog polja opada sa rastojanjem, a samim tim i jačina magnetne indukcije. Intenziteti magnetne indukcije prirodnih izvora magnetnog polja na Zemlji se kreće u velikim granicama. Čovekov mozak proizvodi magnetnu indukciju jačine 100·10-15 T.

- indukcije od oko 6 T mogu da strgnu sat sa čovekove ruke na daljini od 4 metra.

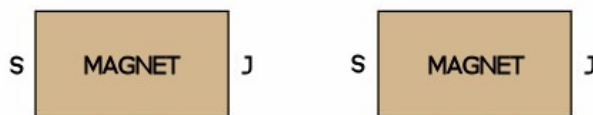
- Magnetni polovi Zemlje stvaraju magnetnu indukciju milijardu puta većeg intenziteta. Jačina magnetne idukcije koje je čovek proizveo prilikom raznih ispitivanja se kreću u mnogo većim granicama.
- Najveća ikada ostvarena magnetna indukcija na Zemlji proizvedena je kontrolisanom eksplozijom u gradu Sarov u Rusiji. Tada je ostvarena magnetna indukcija intenziteta 2800 T. Ove jačina magnetne indukcije su jako male kada se uporede sa jačinama magnetne idukcije koje postoje u svemiru. Pulsar stvara magnetnu indukciju od deset milijardi T, dok neutronska zvezda stvara magnetnu indukciju od deset biliona T. Gornja teoretska granica jačine magnetne indukcije je upravo magnetna indukcija neutronske zvezde. Inače, vrednosti magnetne

- Primijećeno je, takođe, da presjecanjem magnetne šipke ne mogu da se razdvoje polovi magneta, već svaki dio ponovo sadrži i sjeverni i južni pol.
- Zapaženo je i da magneti ne djeluju na nepokretna, već samo na pokretna naelektrisanja. Kasnije je ustanovljeno i da je vremenski promjenljivo magnetsko polje uvijek praćeno vremenski promjenljivim električnim poljem i obratno.
- Prihvaćeno je tumačenje da je priroda stalnih magneta posljedica kretanja naelektrisanih čestica na nivou atoma, tako da je zaključeno da su naelektrisanja, koja miruju ili se kreću, osnovni uzrok svih električnih i magnetskih, odnosno, elektromagnetskih pojava.

- Magnetni polovi

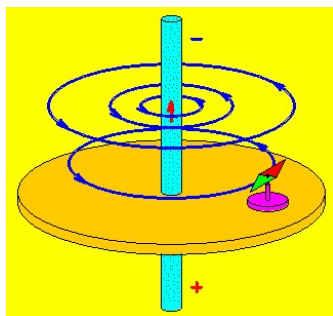


Nakon cepanja na dva dela



Magnetsko polje pravolinijskog provodnika

- Kompas reaguje u prisustvu provodnika !!! (Ersted)
- Električna stuja je izvor magnetskog polja !!!



- Linije sila magnetskog polja su **zatvorene** linije !!!
- Ne postoji početna i završna tačka linije sila magnetskog polja

VEKTOR MAGNETSKE INDUKCIJE

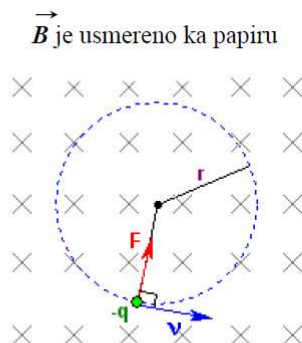
- Prema tome, kaže se da u nekom domenu postoji magnetsko polje, ako na pokretna naelektrisanja, koja se u taj domen postave, djeluje sila.
- Ustanovljeno je da je sila, kojom magnetsko polje djeluje na pokretna naelektrisanja, proporcionalna naelektrisanju Q i brzini \vec{v} , kojom se to naelektrisanje kreće, ali da ne djeluje u smjeru kretanja naelektrisanja, već normalno na taj smjer, težeći da promijeni putanju kretanja naelektrisanja

- Zbog toga je izraz za silu u magnetskom polju nešto drugačiji od izraza za silu u električnom polju i glasi:

$$\vec{F} = Q \vec{v} \times \vec{B}$$

- U gornjem izrazu koeficijent proporcionalnosti predstavlja osnovnu veličinu za opisivanje magnetskog polja i naziva se vektor magnetske indukcije. Kao i svaka druga vektorska veličina, definisan je intenzitetom, pravcem i smjerom i sve te tri veličine se, u opštem slučaju, mijenjaju u prostoru i u vremenu.

- Sila kojom magnetno polje deluje na naelektrisanu česticu je proporcionalna naelektrisanju q , brzini kretanja naelektrisanja v , i jačini magnetnog polja B
 - v, B, F su vektori
 - Mi treba da pomnožimo vektor sa vektorom i dobijemo vektor, a to je: *vektorski proizvod*
- $F = qv \times B$ (Lorencova sila)
- $\|F\| = qvB \sin\theta$, gde je θ ugao između vektora v i B



Lorencova sila

Lorencova sila je kombinacija sila kojima elektromagnetno polje deluje na naelektrisanu česticu u pokretu.

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Ima dve komponente, električnu koja je proporcionalna električnom polju, E , i naelektrisanju čestice q , i magnetnu, koja pored naelektrisanja čestice i magnetne indukcije polja, B , zavisi još i od brzine čestice, v . Zbog vektorskog karaktera sila i polja Lorencova sila se najlakše izražava vektorskom Lorencovom jednačinom:

-
- Stoga pozitivno naelektrisanu česticu je ubrzana u istom smeru u kojem deluje i E polje, ali skreće pod pravim uglom u odnosu na polje B u skladu sa pravilom desne ruke.

Magnetska indukcija 4

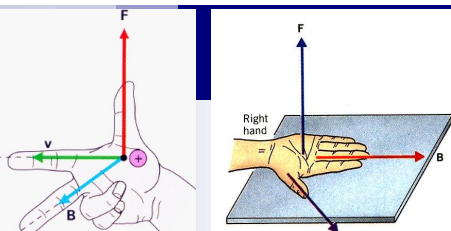
$$\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = \text{max.}$$

Smjer vektora mag. indukcije?

→ Vektori F , v i B moraju biti međusobno okomiti.

Pravilo vektorskog umnoška: → Vektor brzine prislonimo vektoru indukcije. → Smjer sile je u pravcu napredovanja desnog vijka.

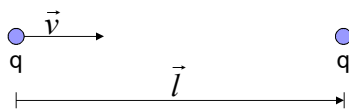


Prsti desne ruke neka pokazuju u smjeru indukcije, a palac u smjeru brzine. Tada je smjer sile iz dlana.

Magnetske silnice – Zamišljene krivulje tangente kojih u svakoj točki pokazuju smjer vektora mag. indukcije B , a njihova gustoća pokazuje iznos (veličinu) vektora B .

Lorencova sila

- Naelektrisana čestica koja se kreće je elementarna električna struja
- Magnetska sila koja deluje na naelektrisanu česticu se naziva Lorencova sila



$$\vec{F} = (I \cdot \vec{l}) \times \vec{B} = \left(\frac{q}{t} \cdot \vec{v} \cdot t\right) \times \vec{B} = (q \cdot \vec{v}) \times \vec{B}$$

$$\boxed{\vec{F} = (q \cdot \vec{v}) \times \vec{B}}$$

- Naelektrisana čestica u kretanju je elementarni magnetski naboj
- Za magnetizam je (qv) ono što je za elektricitet q
- Magnetska sila ne ubrzava naelektrisanje i ne menja mu energiju
- Ne postoji magnetski potencijal

Kružno kretanje u magnetnom polju

- Kada naelektrisana čestica uleti u magnetno polje brzinom v pod pravim uglom nastavice svoje kretanje konstantnom brzinom po kružnici precnika r

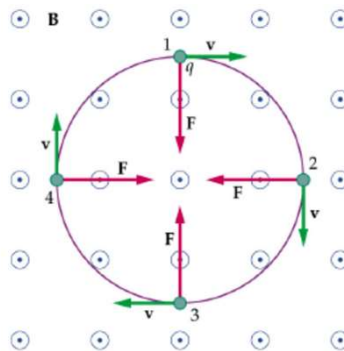
- Sila dejstva $F = q v B$

- Centripetalna sila

$$F_c = \frac{mv^2}{r}$$

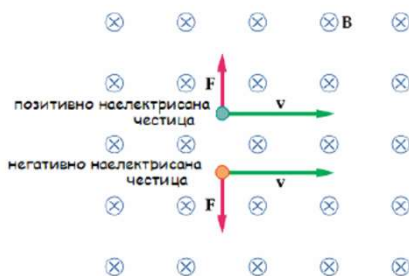
- Precnik kruznice dobijamo izjednacavanjem vrednosti sila F i F_c

$$r = \frac{m v}{q B}$$



Smer Lorencove sile

- Pri ulasku u magnetno polje dolazi do razdvajanja pozitivnih i negativnih čestica



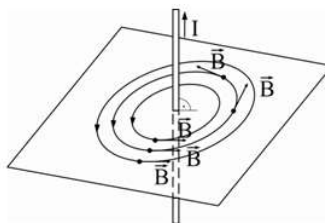
- Primenjeno je pravilo desne ruke

Izracunavanje magnetne indukcije

- Prvi zaključak o zavisnosti inteziteta vektora \underline{B} koji potice od pravolinijskih provodnika na nekom rastojanju r od inteziteta struje I u provodniku dali su Biot i Savar 1820.
- Lapalce uobicajava ove re: $B \sim I$ dopunjuje ih sa uticajem rastojanja od provodnika na jacinu vektora B i formira konacnu formu zakona

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

- Linije vektora magnetske indukcije , za nekoliko različitih struktura izvora magnetnog polja prikazane su na Sl. 4.1.,
- Jedinica za intenzitet vektora magnetske indukcije je tesla, a oznaka je T.



Sl. 4.1. Linije vektora \vec{B} u ravni normalnoj na provodnik sa strujom

- Tako je, na primjer, horizontalna komponenta Zemljinog magnetskog polja na prostoru Jugoslavije, oko 2×10^{-5} , a vertikalna oko 2×10^{-5} . Intenzitet vektora magnetske indukcije se, u okolini provodnika sa strujom, kreće, u uobičajenim situacijama do 10×10^{-2} .
- Naelektrisanja koja se kreću mogu da se predstave pomoću električnih veličina, vektora gustine struje \vec{J} i jačine struje I . Prema tome, može da se zaključi da magnetsko polje indukcije, djeluje na element zapremine dv , sa strujom gustine \vec{J} , silom

$$d\vec{F} = NQdv\vec{v} \quad \vec{B} = dv\vec{J}\vec{B},$$

pošto je, prema izrazu (3.1) poglavlja 3.2,

$$\vec{J} = NQ\vec{v}$$

- Ako struja gustine postoji u provodniku poprečnog presjeka S , elementarna zapremina dv može da se definiše kao $dv = S \cdot dl$, gdje je dl element dužine provodnika.
- Definicijom tog elementa kao vektorske veličine u smjeru vektora, sila na element dužine provodnika, u kome postoji struja jačine I , može da se izrazi na sljedeći način:

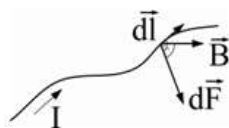
$$d\vec{F} = S \cdot dl \cdot \vec{J} \times \vec{B} = S \cdot J \cdot d\vec{l} \times \vec{B}$$

- Proizvod $I \cdot d\vec{l}$ se, u elektrotehnici, naziva strujni element i često se smatra elementarnim izvorom magnetskog polja.
- Iz izraza (4.2) i (4.3) mogu da se odrede ukupne, resultantne, sile, kojima magnetsko polje djeluje na konačno velik domen, zapremine v ,

$$\vec{F} = \int_v \vec{J} \times \vec{B} \cdot dv$$

$$\vec{F} = \int_{\text{duž konture}} I \cdot d\vec{l} \times \vec{B}$$

- Ako se kontura ne grana, tada jačina struje I može da se izvuče ispred znaka integrala, dok ostale veličine, u opštem slučaju, ostaju pod integralom.

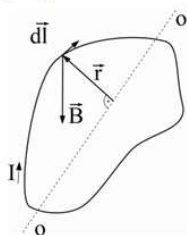


Sl. 4.4. Magnetska sila na strujni element

- Ukoliko je omogućena rotacija konture oko neke ose, kao što je prikazano na Sl.4.5., na strujni element će magnetsko polje djelovati momentom

$$d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{F} = \vec{r} \times I \cdot (d\vec{l} \times \vec{B}),$$

gdje je \vec{r} rastojanje od strujnog elementa do ose rotacije.



Sl. 4.5. Magnetski moment na strujnu konturu

Ukupan, rezultatni moment na cijelu, zatvorenu konturu, prikazanu na Sl. 4.5., dat je izrazom

$$\vec{M} = \oint_C I \cdot \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}),$$

odnosno, za konturu u kojoj nema grananja struje, jačina struje može da se izvuče ispred integrala,

$$\vec{M} = I \cdot \oint_C \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}).$$

BIO-SAVAROV ZAKON

- Ukoliko se posmatra provodnik sa strujom jačine I , tada može da se smatra da je elementarni izvor magnetskog polja strujni element. Zbog toga je, za određivanje magnetskog polja, veoma važno odrediti vektor magnetske indukcije, koji stvara strujni element.
- Do matematičkog izraza za vektor magnetske indukcije prouzrokovan strujnim elementom, eksperimentalno su, nezavisno jedan od drugog, došla dva francuska fizičara, Bio (Jean - Baptiste Biot, 1774. do 1862.) i Savar (Felix Savart, 1771. do 1841). Zbog toga se taj izraz naziva Bio-Savarov zakon

Biot –Savartov zakon

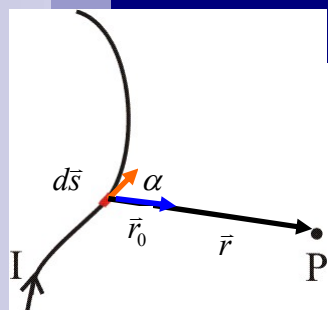
J. B. Biot (1774 – 1862); F. Savart (1791 – 1841) francuski fizičari, elektromagnetizam

Proučavali su magnetska polja za različite oblike vodiča.

U otkrivanju zakonitosti sudjelovali su i Ampere, te Lapace.

Zakon za izračunavanje jakosti magnetskog polja (mag. indukcije) za bilo koji oblik provodnika kroz koji teče električna struja:

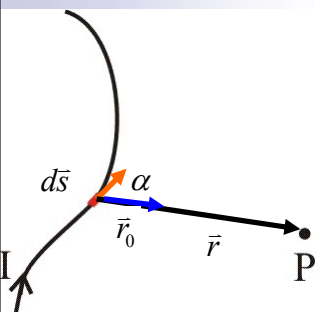
Promatramo provodnik kojim teče struja jakosti I . Gledamo doprinos komadića žice ds u točki P udaljenoj za r od elementa žice:



Postupak:

1. Izabiremo komadić provodnika ds .
2. Spajamo komadić ds i točku P u kojoj računamo B .
3. Uvedemo jedinični vektor r_0 i ugao α što ga zatvaraju r_0 i tangenta na krivulju u ds . Smjer od elementa provodnika prema točki.

Biot – Savartov zakon 2



1. Izabiremo komadić vodiča ds .
2. Spajamo komadić ds i točku P u kojoj računamo B.
3. Uvedemo jedinični vektor r_0 i kut α što ga zatvaraju r_0 i tangenta na krivulju u ds . Smjer od elementa vodiča prema točki.

Biot – Savartov zakon kaže da je magnetska indukcija u točki P (koju proizvede element vodiča ds) dana sa:

$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}_0}{r^2}$$

Smjer vektora indukcije $d\vec{B}$ određuje se pravilom desne ruke (desnog vijka).

Iznos vektora indukcije $d\vec{B}$
$$dB = \frac{\mu I ds \sin \alpha}{4\pi r^2}$$

Biot – Savartov zakon 3

Biot – Savartov zakon iskazan preko pomoću vektora jakosti mag. polja:

$$d\vec{H} = \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}_0}{4\pi r^2}$$

Kolika je mag. indukcija \vec{B} u točki P cijelog vodiča?
$$\vec{B} = \int d\vec{B}$$

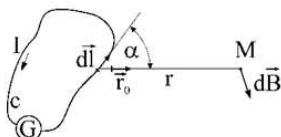
Integral mag. indukcije \vec{B} je moguće izračunati samo za nekoliko posebnih slučajeva.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2} \quad (4.4)$$

Konstanta μ_0 se naziva permeabilnost vakuuma, analogna je permitivnosti vakuuma u električnom polju, a iznosi

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{H/m}$$

- gdje je H jedinica za induktivnost, o kojoj će biti govora kasnije, i naziva se "Henri". Vektor je jedinični vektor od strujnog elementa ka tački u kojoj se određuje vektor magnetske indukcije, kao što je prikazano na Sl. 4.6. Sve ostale veličine iz Bio-Savarovog zakona su, takođe, prikazane na Sl. 4.6.



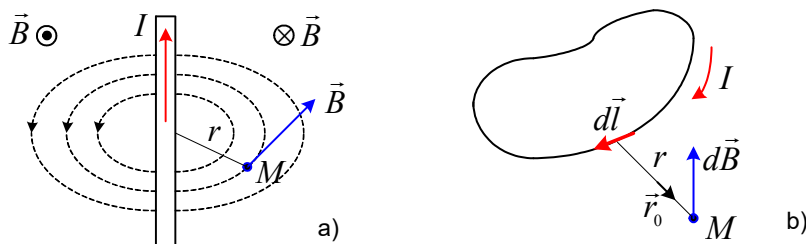
Sl. 4.6. Bio-Savarov zakon

Rezultantni vektor magnetske indukcije, koji, u tački M, stvara cijela zatvorena kontura c, će biti vektorski zbir indukcija $d\vec{B}$, koji, u tački M, stvaraju pojedini strujni elementi konture c,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \oint_c \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2}$$

I ovaj izraz, kao i izraz (4.4), predstavlja Bio-Savarov zakon.

BIO-SAVAROV ZAKON



Intenzitet magnetne indukcije u nekoj tački polja oko dugog pravolinijskog provodnika srazmeran je jačini struje, a obrnuto srazmeran rastojanju od provodnika. **Pravac** vektora magnetne indukcije se poklapa sa tangentom na magnetnu liniju u toj tački, a **smjer** se određuje po pravilu desne zavojnice u odnosu na smer struje u provodniku, sl. a).

$$B = k \frac{I}{r}$$

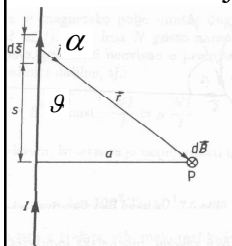
$$\vec{B} = \int_C d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2} \quad - \text{ Laplasov zakon, sl. b)}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \quad - \text{ magnetna permeabilnost vakuum}$$

Magnetsko polje ravnog vodiča

Promatramo beskonačno dug ravan vodič kojim teče struja jakosti I .
Tražimo indukciju u nekoj tački P .



Doprinos svakog dijela žice ima isti smjer indukcije $d\vec{B}$ u tački P :

$$dB = \frac{\mu I ds \sin \alpha}{4\pi r^2}$$

Jer vrijedi: $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha) = \sin \varphi = \frac{a}{r}$

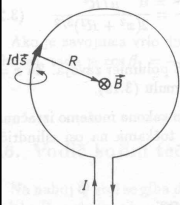
$$r^2 = a^2 + s^2 \quad \text{ctg } \varphi = \frac{s}{a} \quad \Rightarrow \quad ds = a d(\text{ctg } \varphi) = a \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}$$

$$dB = \frac{\mu I}{4\pi} \cdot \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{a^2} \quad \Rightarrow \quad dB = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{I}{a} \cdot \sin \varphi d\varphi$$

$$B = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{I}{a} \int_{\pi}^0 \sin \varphi d\varphi \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{I}{a} \cdot (\cos 0 - \cos \pi) \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu I}{2\pi a}$$

Magnetsko polje kružnog zavoja

Promatramo kružni zavoj kojim teče struja jakosti I . Tražimo indukciju u središtu petlje.



Doprinos svakog dijela petlje ima isti smjer indukcije B u središtu petlje

Za sve elemente ds je udaljenost do središta stalna i jednaka polumjeru R .

Kut $\alpha = 90^\circ$, tj $\sin \alpha = 1$.

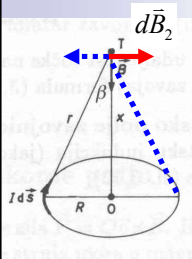
$$dB = \frac{\mu I ds \sin \alpha}{4\pi r^2} \quad \rightarrow \quad B = \int \frac{\mu I ds \sin \alpha}{4\pi r^2} \quad \rightarrow \quad B = \frac{\mu I}{4\pi R^2} \int ds$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu I}{4\pi R^2} 2R\pi \quad \rightarrow \quad B = \frac{\mu I}{2R}$$

Magnetska indukcija B u središtu petlje.

Magnetsko polje u točki T na osi kružnog zavoja

Promatramo kružni zavoj kojim teče struja jakosti I . Tražimo indukciju u točki T na osi kružnog zavoja.



Za sve elemente ds , ds je uvijek okomit na polumjer R .

Kut $\alpha = 90^\circ$, tj $\sin \alpha = 1$.

Doprinos svakog dijela petlje indukciji B rastavljamo na 2 komponente: jednu uzduž osi, a drugu okomito na os (dB_2).

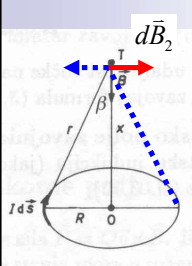
Švaki dio ds ima "kontra" dio tako se okomiti doprinosi ponište.

Preostane samo dio u smjeru osi dB_1 . $dB_1 = dB \sin \beta = dB \frac{R}{r}$

$$dB = \frac{\mu I ds \sin \alpha}{4\pi r^2} \quad \rightarrow \quad dB = \frac{\mu I ds \cdot 1}{4\pi r^2}$$

$$dB_1 = \frac{\mu I ds R}{4\pi r^2 r} \quad \rightarrow \quad dB_1 = \frac{\mu R I}{4\pi r^3} ds \quad \rightarrow \quad B = \int B_1 = \frac{\mu R I}{4\pi r^3} \int ds$$

Magnetsko polje u točki T na osi kružnog zavoja 2



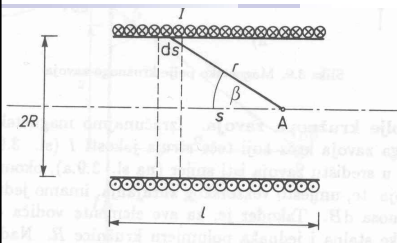
$$B = \int B_1 = \frac{\mu R I}{4\pi r^3} \int ds \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu R I}{4\pi r^3} 2R\pi$$

$$B = \frac{\mu I R^2}{2r^3} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

x – udaljenost točke na osi od središta zavojnice
 R – Polumjer zavojnice

Magnetsko polje zavojnice

Promatramo zavojnicu kojom teče struja jakosti I . Tražimo indukciju u točkama na osi zavojnice.



Neka zavojnica ima duljinu l , polumjer R , a sastoji se od N koncentričnih zavojnica.

Magnetsku indukciju B računamo kao zbroj doprinosa pojedinih zavoja.

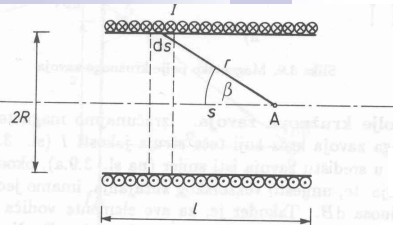
Promatramo dio zavojnice ds . U njemu se nalazi ukupno N/l zavoja, a svaki daje:

$$dB' = \frac{\mu I R^2}{2(s^2 + R^2)^{3/2}} ds \quad \Rightarrow \quad dB = \frac{\mu I R^2}{2(s^2 + R^2)^{3/2}} \frac{N}{l} ds$$

Ukupna indukcija? Treba integrirati po ds .

Magnetsko polje zavojnice 2

Promatramo zavojnicu kojom teče struja jakosti I . Tražimo indukciju u točkama na osi zavojnice.



$$dB = \frac{\mu I R^2}{2(s^2 + R^2)^{3/2}} \frac{N}{l} ds$$

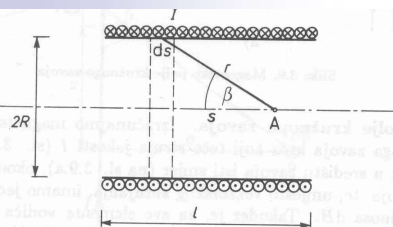
Uvodimo zamjene: $r = \frac{R}{\sin \beta}$ $s = R \operatorname{ctg} \beta$

$$\Rightarrow ds = -\frac{R d\beta}{\sin^2 \beta} \Rightarrow B = \int \frac{\mu I R^2}{2(s^2 + R^2)^{3/2}} \frac{N}{l} ds \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu N I}{2l} \int \frac{R^2}{r^3} ds \Rightarrow B = -\frac{\mu N I}{2l} \int \frac{R^2}{\left(\frac{R}{\sin \beta}\right)^3} \frac{R d\beta}{\sin^2 \beta} \Rightarrow$$

$$B = -\frac{\mu N I}{2l} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta d\beta \Rightarrow B = -\frac{\mu N I}{2l} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

Magnetsko polje zavojnice 3



$$B = -\frac{\mu N I}{2l} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

U slučaju vrlo dugačke zavojnice ($l \gg R$) vrijedi: $\beta_1 \rightarrow 0$, $\beta_2 \rightarrow \pi \rightarrow$

$$B = -\frac{\mu N I}{2l} (-1 - 1) = \mu \frac{N I}{l}$$

Sila na vodič kojim teče struja

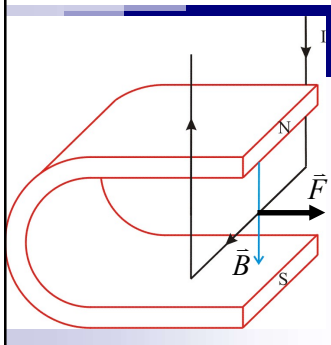
Od prije:

Na naboj koji se giba u magnetskom polju djeluje sila: $\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$

El. struja = gibanje naboja \rightarrow Na vodič kojim teče struja u mag. polju djeluje sila!

Pokus:

Promatramo ravni vodič kojim teče istosmjerna struja u homogenom magnetskom polju (potkovičasti magnet) :



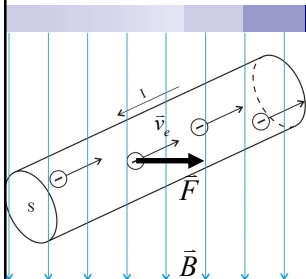
Zaključci:

- Objješena žica se otklanja (ovisno o smjeru struje). Sila je okomita na smjer struje.
- Otklon je to veći, što je jača struja kroz vodič.
- Otklon je to veći, što je jače magnetsko polje.

Sila na vodič kojim teče struja 2

Izraz za silu?

Ravni vodič duljine l , kroz koji teče struja I , smješten okomito na silnice magnetskog polja B :



elektroni u žici – nosioci naboja

\rightarrow na njih djeluje sila

$$\vec{F}_1 = -e\vec{v}_e \times \vec{B}$$

Ukupna sila na vodič = sila na 1 elektron * broj slobodnih elektrona

Uvodimo:

S – presjek vodiča

n – Gustoća slobodnih elektrona (broj u 1 m^3)

Ukupna sila:

$$\vec{F} = n\vec{F}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = n \cdot S \cdot l \cdot (-e) \cdot \vec{v}_e \times \vec{B}$$

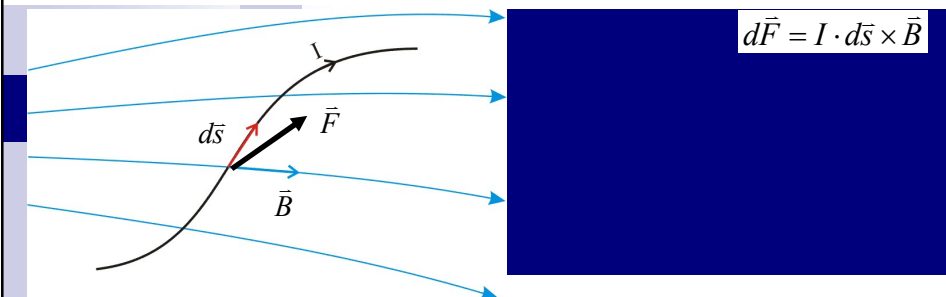
$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad F = BIl \cdot \sin \alpha$$

α = kut između smjera struje (I) i vektora B

Sila na vodič kojim teče struja 3

Što ako vodič nije ravan (polje nije homogeno)?

Vodič podijelimo na elementarne djeliće duljine ds za koje vrijedi:



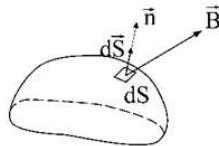
$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{s} \times \vec{B}$$

Ukupna sila = Zbroj svih sila na pojedine djeliće: $\Rightarrow \vec{F} = I \int d\vec{s} \times \vec{B}$

MAGNETSKI FLUKS

- Kao i za svaki drugi vektor, moguće je definisati fluks vektora magnetske indukcije. Međutim, dok se fluksovi ostalih vektora u elektrotehnici rjeđe koriste, fluks vektora magnetske indukcije ima veoma važnu ulogu, posebno u vremenski promjenljivom elektromagnetskom polju. Zbog toga mu je dodijeljena i posebna oznaka, Φ , a vrlo često se naziva i samo magnetski fluks ili čak samo fluks.

- Uočimo elementarnu površ , u prostoru u kome postoji magnetsko polje indukcije . Vektor je definisan u pravcu i smjeru normale , kao što je prikazano na Sl. 4.7.



Sl. 4.7. Definicija magnetskog fluksa kroz $d\vec{S}$ i kroz S

Magnetski fluks kroz elementarnu površ $d\vec{S}$ je tada definisan kao

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

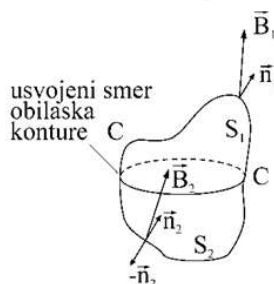
a magnetski fluks kroz cijelu površ S je algebarski zbir flukseva kroz elementarne površi,

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS \quad |\vec{n}| = 1 \quad (4.5)$$

- Zbog svoje izuzetne važnosti, magnetski fluks ima i posebnu jedinicu, koja se naziva "Veber", a oznaka joj je Wb, .
- Jedna od najvažnijih osobina magnetskog fluksa je zakon o održanju (konzervaciji) magnetskog fluksa. Taj zakon je, u stvari, posljedica zatvorenosti linija vektora magnetske indukcije i po njemu je fluks vektora magnetske indukcije , kroz zatvorenu površ S, jednak nuli,

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

(4.6)

Sl. 4.8. Određivanje magnetskog fluksa kroz površi S_1 i S_2

- Ako se uoči neka zatvorena kontura u magnetskom polju indukcije , koristeći zakon o konzervaciji magnetskog fluksa, može da se dokaže da je fluks isti kroz bilo koju površ, koja se oslanja na datu konturu.

Da bismo to dokazali, usvojimo konvenciju da se smjer normale na proizvoljnu otvorenu površ S , definiše pravilom desne zavojnice u odnosu na izabrani smjer obilaska po konturi, što prikazuju normale \vec{n}_1 i \vec{n}_2 , za površi S_1 i S_2 , na Sl. 4.8. Tada su fluksevi kroz S_1 i kroz S_2 definisani kao

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 d\vec{S}, \quad \Phi_2 = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n}_2 d\vec{S}$$

Površ S_1 i S_2 čine zatvorenu površ, sa normalom usmjerenom (po dogovoru) iz površi u polje, na koju može da se primijeni zakon o konzervaciji magnetskog fluksa,

$$\oint_{S_1+S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 = \int_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{B} \cdot (-\vec{n}_2) d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 d\vec{S} - \int_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n}_2 d\vec{S} = \Phi_1 - \Phi_2$$

odakle slijedi da je

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi_2 = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Kako su površi S_1 i S_2 izabrane proizvoljno, slijedi da je fluks isti kroz bilo koju površ, koja se oslanja na zatvorenu konturu. Iz ovoga slijedi i da magnetski fluks može da se definiše kroz konturu, pri čemu se podrazumijeva da se posmatra fluks kroz proizvoljnu površ, koja se na datu konturu oslanja.

Konzervacija magnetskog fluksa

- Fluks magnetskog polja (kroz neku površinu)

$$\Phi_M = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

- Linije magnetskog polja su zatvorene linije, nemaju početak i kraj, svaka linija koja uđe i neku zatvorenu površinu, mora iz nje i da izađe

Ukupan fluks magnetskog polja
kroz bilo koju zatvorenu površinu
jednak je nuli

$$\Phi_M^{\text{zatvoreno}} = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

SUPSTANCA U MAGNETSKOM POLJU

- U uvodu ovog dijela udžbenika je već rečeno da gvozdeni predmeti mogu da se "namagnetišu", ako se nađu u blizini permanentnih magneta,.
- S druge strane, "namagnetisano" gvožđe je izvor novog magnetskog polja, koje se superponira polju magneta, mijenjajući ga.
- Drugim riječima, postoji interaktivno djelovanje magnetskog polja na materiju, koja se u tom polju nađe i obratno.

- Polazeći od najjednostavnijeg modela atoma, uočava se da postoji kretanje elektrona oko jezgra, brzinom od oko 10^{15} obrtaja u sekundi.
- Posmatrajući izraz za gustinu struje, , jasno je da orbita, po kojoj se kreće elektron, može da se predstavi kao neka mikroskopska kontura sa strujom, jer, bez obzira na činjenicu da se kreće samo jedna naelektrisana čestica, može da se definiše vektor gustine struje .
- Na taj način, supstanca može da se predstavi kao skup velikog broja elementarnih konturica sa strujom, koje su, bez prisustva magnetskog polja, haotično raspoređene u materijalu.

- Međutim, kada se supstanca unese u magnetsko polje, tada to polje djeluje momentom na orbite kretanja elektrona, na isti način kao što djeluje i na makroskopske konture sa strujom, prouzrokujući njihovu rotaciju oko sopstvene ose.
- Na taj način dolazi do, većeg ili manjeg, usmjeravanja mikroskopskih konturica i njihovog, ne više haotičnog, djelovanja prema okolini. Kod nekih materijala se ta usmjerenost gubi odmah po prestanku djelovanja spoljašnjeg magnetskog polja, a kod drugih, opet, usmjerenost ostaje i tada dobijamo "namagnetisane" supstance ili magnete.

- Drugim riječima, zadatak permeabilnosti materijala je da pokaže koliko će se neko magnetsko polje promijeniti u materijalu, u odnosu na isto to polje u vakuumu. Zbog toga je, kao i permitivnost, permeabilnost, koja se obilježava grčkim slovom μ , prikazana u obliku proizvoda dvije veličine,

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0,$$

- Prema tome, magnetsko polje u nekoj supstanci može da se odredi tako što se, u jednačinama tog polja u vakuumu, permeabilnost vakuuma zamjenjuje permeabilnošću tog materijala,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_r \cdot \mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2}$$

- Prvu grupu materijala čine dijamagnetski materijali, koji svojim prisustvom, dijamagnetski materijali smanjuju magnetsko polje u kome se nađu, ali, u najvećem broju problema u elektrotehnici, uticaj tih materijala na magnetsko polje, može da se zanemari. Relativna permeabilnost tih materijala je manja od jedinice, ali približno jednaka jedinici

- Druga grupa materijala, paramagnetski, svoje ime je dobila zbog toga što se šipka od takvog materijala postavlja paralelno linijama magnetskog polja, u koje se postavi. To znači da ti materijali, svojim prisustvom, povećavaju magnetsko polje u kome se nađu.
- Relativna permeabilnost paramagnetskih materijala, u koje spadaju, na primjer, aluminijum, platina, kiseonik i vazduh, je veoma malo veća od jedinice,

- Treću grupu materijala čine feromagnetski materijali i u tu grupu spadaju gvožđe, nikel, kobalt, neke njihove legure, neke od rijetkih zemalja i neke legure i jedinjenja u kojima nema naprijed navedenih elemenata.
- Pošto se šipka od takvog materijala postavlja paralelno linijama magnetskog polja u kome se nađe, po nekim podjelama i ovi materijali spadaju u paramagnetske materijale.
- Međutim, za razliku od dijamagnetskih i paramagnetskih materijala, feromagnetski materijali svojim prisustvom, bitno povećavaju magnetsko polje u kome se nađu.
- Relativna permeabilnost ovih materijala je mnogo veća od jedinice, ali nije konstantna, već zavisi od vektora magnetske indukcije .

FEROMAGNETSKI MATERIJALI

- Jezgra električnih mašina (elektromagneta, transformatora, motora, generatora i sl.) skoro uvijek se prave od feromagnetskih materijala, a ti materijali se koriste i za izradu permanentnih magneta, medijuma za zapisivanje i reprodukciju informacija i u još nekoliko područja elektrotehnike.
- Između elementarnih konturica feromagnetskih materijala postoje veoma jake sprege, tako da te konturice nisu haotično raspoređene ni u slučaju kada materijal nije u magnetskom polju.
- Veliki broj susjednih konturica, unutar određenog domena, orijentisan je u istom smjeru, a bez prisustva magnetskog polja su domeni orijentisani haotično, pa se kaže da je materijal "nenamagnetisan".

- Kada se takav materijal postavi u magnetsko polje, povećanjem intenziteta polja dolazi do postepenog zakretanja čitavih domena u smjeru linija polja i taj proces traje sve dok se svi domeni ne zakrenu potpuno.
- Situacija kada su svi domeni feromagnetskog materijala orijentisani u smjeru polja, naziva se zasićenje feromagnetskog materijala.
- Usmjeravanju domena se suprotstavljaju termičke oscilacije unutar atoma i molekula supstance, tako da, pri višim temperaturama, feromagnetski materijali gube svoja magnetska svojstva

- U prethodnom poglavlju je bilo pokazano da vektor magnetske indukcije zavisi od permeabilnosti supstance u kojoj se magnetsko polje uspostavlja.
- Prema tome, kada bi se vektor magnetske indukcije podijelio sa permeabilnošću, dobio bi se vektor, čiji intenzitet, pravac i smjer ne bi zavisio od supstance. Na taj način se uvodi vektor jačine magnetskog polja,

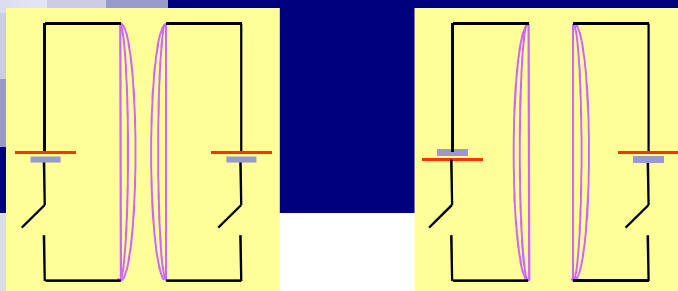
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \quad B = \mu \cdot \vec{H}$$

- Jedna od važnih karakteristika oba vektora, kojima se definiše magnetsko polje, je Amperov, koji povezuje uzrok magnetskog polja, struju jačine I , sa posljedicama, vektorima
- \vec{B} i \vec{H}
- Amperov zakon se definiše za zatvorenu konturu i proizvoljnu površ, koja se na tu konturu oslanja i kaže da je linijski integral vektora po proizvoljnoj, zatvorenoj konturi, jednak zbiru svih struja kroz bilo koju površ, koja se na tu konturu oslanja, pomnožen sa permeabilnošću vakuuma,

Djelovanje struje na struju. Definicija ampera 2.

Pokus:

- Dvije paralelne žice kojima teče struja u istom smjeru.
- Dvije paralelne žice kojima teče struja u suprotnim smjerovima.



Dvije paralelne žice kroz koje teče struja odbijaju se ako su struje protivnoga smjera, a privlače ako su struje istoga smjera.

Djelovanje struje na struju. Definicija ampera 3.

Dvije paralelne žice kroz koje teče struja odbijaju se ako su struje protivnoga smjera, a privlače ako su struje istoga smjera.

Objašnjenje: Struja I_1 proizvodi mag. polje i to polje djeluje silom na vodič kojim teče struja I_2 , ili obratno, struja I_2 proizvodi mag. polje i to polje djeluje silom na vodič kojim teče struja I_1 .

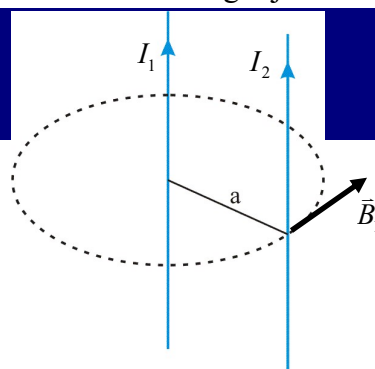
→ Obje struje proizvode mag. polja koja međusobno interagiraju.

Iznos sile? Promatramo 2 paralelna, tanka, ravna vodiča kroz koje teku struje I_1 i I_2 u vakuumu.

Biot – Savartov zakon

→ Mag. polje prvoga vodiča na mjestu gdje je drugi vodič:

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi a}$$



Djelovanje struje na struju. Definicija ampera 4.

Biot – Savartov zakon → Mag. polje prvoga vodiča na mjestu gdje je drugi vodič:

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi a}$$

Struja I_2 se nalazi u mag. polju B_1

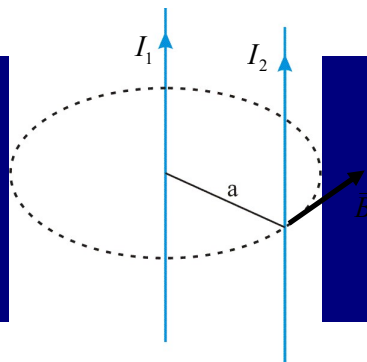
→ Sila na vodič (I_2) =

$$F = I_2 l B_1 \rightarrow$$

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{a} l$$

l = duljina vodiča

Sila kojom dvije paralelne struje djeluju jedna na drugu.



Djelovanje struje na struju. Definicija ampera 5.

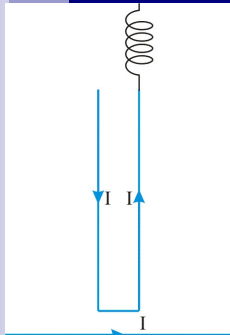
$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{a} l \quad \text{Koristi se da definiciju ampera.}$$

Jedan amper je jakost one struje koja, prolazeći kroz 2 ravna, usporedna i neizmjereno dugačka vodiča, zanemarivo maloga kružnog presjeka, u vakuumu, međusobno udaljena jedan metar, uzrokuje između njih silu od $2 \cdot 10^{-7}$ njutna po metru.

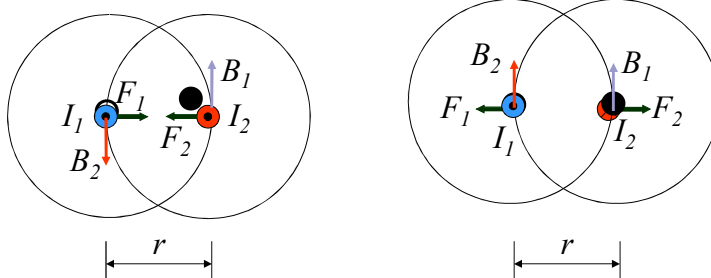
Vrijednost μ_0 $2 \cdot 10^{-7} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1 \text{ A} \cdot 1 \text{ A}}{1 \text{ m}} 1 \text{ m}$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$

Kako mjeriti 1 A?



Djelovanje struje na struju - ponavljanje



$$F_1 = F_2 = F$$

$$F = B_1 I_2 l \quad B_1 = \mu \frac{I_1}{2\pi r}$$

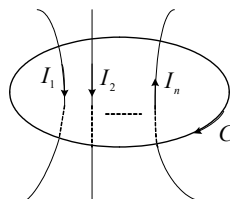
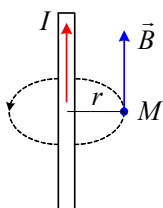
$$F = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2 l}{r}$$

AMPEROV ZAKON

$\oint_C \vec{B} d\vec{l}$ - cirkulacija vektora magnetne indukcije duž zatvorene konture

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = B \cdot 2r\pi = \frac{\mu_0 I}{2r\pi} 2r\pi = \mu_0 I$$

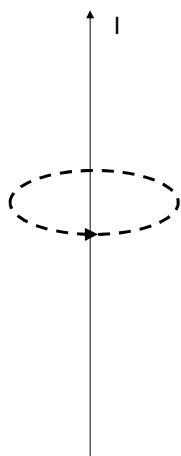
$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k$$



Cirkulacija vektora magnetne indukcije duž proizvoljne zatvorene konture C u vakuumu jednaka je proizvodu magnetne permeabilnosti vakuuma i algebarskog zbira struja obuhvaćenih tom konturom.

Cirkulacija magnetskog polja - Amperov zakon

- Linije magnetskog polja mogu da budu usaglašene sa nekom zatvorenom linijom

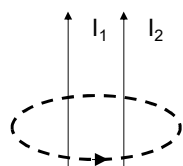


$$C_M = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl = \left(k' \cdot \frac{I}{r} \right) \cdot 2\pi r = 2\pi k' \cdot I = \mu_0 I$$

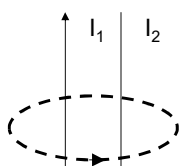
$$\mu_0 = 2\pi k' = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$$

μ_0 - magnetska propustljivost vakuuma

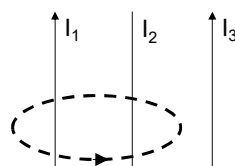
Cirkulacija magnetskog polja - Amperov zakon



$$C_M = \mu_0(I_1 + I_2)$$



$$C_M = \mu_0(I_1 - I_2)$$



$$C_M = \mu_0(I_1 - I_2)$$

$$C_M^{\text{zativoreno}} = \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_c I$$

Amperov zakon. Cirkulacija magnetskog polja

Cirkulacija vektorskog polja (def) = Linijski integral po zatvorenoj krivulji projekcije vektora na krivulju u svakoj točki te krivulje.

Primjer: Cirkulacija vektora jakosti magnetskog polja po krivulji K: $\oint_K \vec{H} d\vec{s} = \oint_K H ds \cos \vartheta$

Primjer: Cirkulacija vektora jakosti magnetskog polja dugačkog ravnog vodiča kojim teče struja jakosti I:

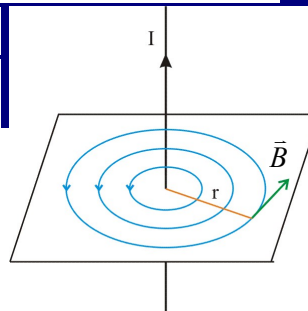
Zatvorena krivulja neka bude kružnica (silnica).

U svakoj točki kružnice, mag. polje je tangencijalno na kružnicu, a po iznosu konstantno i iznosi (Biot – Savartov zakon):

$$H = \frac{I}{2\pi a} \Rightarrow \oint_K \vec{H} d\vec{s} = \oint_K \frac{I}{2\pi a} ds = \frac{I}{2\pi a} \oint_K ds$$

$$\Rightarrow \oint_K \vec{H} d\vec{s} = I$$

Cirkulacija vektora H jednaka je jakosti struje I.



Amperov zakon. Cirkulacija magnetskog polja 2

$$\oint_K \vec{H} d\vec{s} = I \quad \text{Cirkulacija vektora } H \text{ jednaka je jakosti struje } I.$$

Formula vrijedi za bilo koju krivulju!

Ako krivulja obuhvaća više struja \rightarrow $\oint_K \vec{H} d\vec{s} = \sum I$ Ili \rightarrow

$$\oint_K \vec{B} d\vec{s} = \mu \sum I \quad \text{Amperov zakon (zakon protjecanja):}$$

Linijski integral (cirkulacija) magnetske indukcije B , po ma kojoj zatvorenoj krivulji, jednak je umnošku permeabilnosti μ i zbroja struja I koje teku kroz površinu određenu krivuljom.



Ako nema struja koje teku kroz površinu, cirkulacija je jednaka nuli.

Amperov zakon – Primjena za računanje mag. polja kada postoji simetrija koja olakšava računanje integrala.

Amperov zakon. Primjena

$$\oint_K \vec{H} d\vec{s} = \sum I$$

Magnetsko polje torusne (prstenaste) zavojnice:

Magnetsko polje izvan torusne zavojnice je nula.

Silnice – koncentrične kružnice unutar prstena.

Za krivulju integracije biramo jednu od silnica.

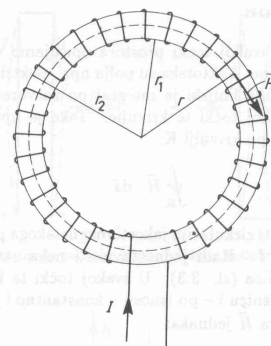
Za slučaj kružnice polumjera $r < r_1$ ili $r > r_2 \rightarrow$ cirkulacija je jednaka nuli (u oba slučaja je zbroj struja = 0).

Za slučaj kružnice polumjera $r \rightarrow$

Amperov zakon daje:

$$\oint_K \vec{H} d\vec{s} = \sum I \quad \rightarrow \quad H \oint_K ds = \sum I \quad \rightarrow \quad H \cdot 2r\pi = NI \quad \rightarrow$$

$$H = \frac{NI}{2r\pi} = \frac{NI}{l} \quad 2r\pi = l; \text{ duljina (opseg) odgovarajuće silnice}$$



Amperov zakon. Primjena 2

Magnetsko polje torusne (prstenaste) zavojnice:

$$H = \frac{NI}{2r\pi} = \frac{NI}{l} \quad \rightarrow \quad B = \mu \frac{NI}{2r\pi} \quad \mu = \text{permeabilnost jezgre zavojnice}$$

Magnetsko polje unutar torusne zavojnice nije homogeno i ovisi o udaljenosti r od središta zavojnicePoseban slučaj: Poprečni presjek zavojnice ($r_2 - r_1$) je znatno manji od duljine zavojnice (r_1). \rightarrow Smatramo da je polje homogeno i iznosi:

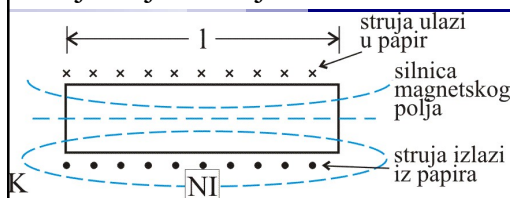
$$B = \mu \frac{NI}{l} \quad l = \text{srednja duljina zavojnice}$$

Amperov zakon. Primjena 2

$$\oint_K \vec{H} d\vec{s} = \sum I$$

Magnetsko polje cilindrične zavojnice:

Magnetsko polje unutar zavojnice je približno homogeno, a izvan zavojnice je skoro jednako nuli.



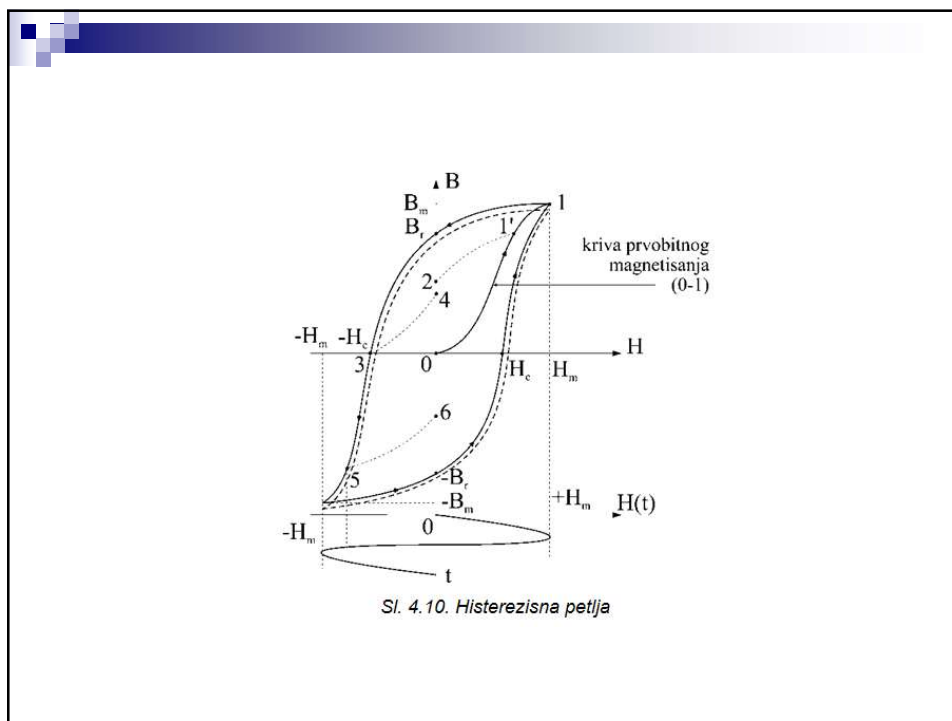
Za krivulju integracije biramo jednu od silnica.

Amperov zakon daje:

$$\oint_K \vec{H} d\vec{s} = \sum I \quad \rightarrow \quad H \oint_K ds = \sum I \quad \rightarrow \quad H \cdot l = NI$$

$$H = \frac{NI}{l}$$

Zbroj obuhvaćenih struja je NI jer vodič sa strujom I prolazi N puta kroz površinu omeđenom krivuljom. l = duljina odgovarajuće zavojnice



- Prema vrijednosti polja, feromagnetski materijali se dijele na magnetski tvrde i magnetski meke materijale.
- Magnetski tvrde materijale karakterišu relativno visoke vrijednosti koercitivnog polja H_c , koje se obično kreću u granicama od 5.000 A/m do 50.000 A/m, odnosno, široka histerezisna petlja
- U magnetski tvrde materijale spadaju kaljeni čelik, hrom-volfram čelik, hrom-molibden čelik i slično.

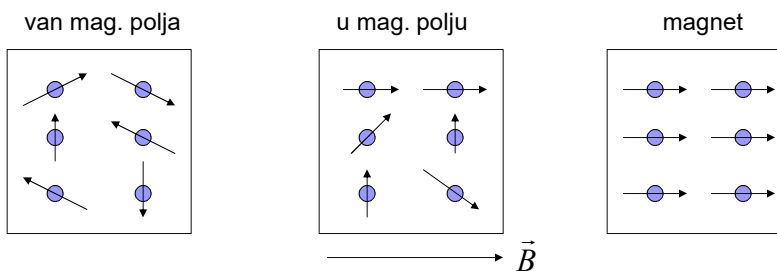
- Magnetski meki materijali imaju male vrijednosti koercitivnog polja ($5 \text{ A/m} \leq H_c \leq 150 \text{ A/m}$) i usku histerezisnu petlju
- Za razmagnetisavanje takvih materijala je dovoljno i relativno slabo polje, pa se ti materijali koriste u slučajevima cikličnog namagnetisavanja i razmagnetisavanja, prilikom redovnog rada uređaja.
- Tipični predstavnici magnetski mekih materijala su meko gvožđe, elektrolitičko gvožđe, silicijumski čelici i dr.

Magnetski materijali

- Dijamagnetici
 - $B_{un} > 0,9999 B_{sp}$
- Paramagnetici
 - $B_{un} < 1,0001 B_{sp}$
- Feromagnetici
 - $B_{un} > 10000 B_{sp}$

Feromagnetici

- odakle feromagnetizam?
- elektron u atomu je mala strujna kontura
- svaki elektron stvara magnetsko polje
- kod gotovo svih atoma, magnetska polja raznih elektrona se međusobno poništavaju (elektroni se kreću u suprotnim smerovima)
- samo kod nekih atoma (gvožđe, nikal, kobalt, ...), više elektrona se okreće na jednu stranu nego na drugu
- atomi tih elemenata su mali magneti



Feromagnetizam

$$\vec{B}_{uk} = \vec{B}_{sp} + \vec{B}_{un} = \vec{B}(\text{magnet}) + \vec{B}(\text{struja})$$

$$\oint_c \vec{B}_{uk} \cdot d\vec{l} = \oint_c \vec{B}_{sp} \cdot d\vec{l} + \oint_c \vec{B}_{un} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_c I + \oint_c \vec{B}_{un} \cdot d\vec{l}$$

$$\oint_c (\vec{B}_{uk} - \vec{B}_{un}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_c I \Rightarrow \oint_c \frac{(\vec{B}_{uk} - \vec{B}_{un})}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = \sum_c I \Rightarrow \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_c I$$

$$\vec{B}_{uk} = \vec{B}_{sp} + \vec{B}_{un} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \quad \vec{B}_{sp} = \mu_0 \vec{H} \quad \vec{B}_{un} = \mu_0 \vec{M}$$

$$\vec{B}_{un} = \mu_0 \vec{M} = \chi \vec{H} \quad \chi - \text{magnetska susceptibilnost}$$

$$\vec{B}_{uk} = (\mu_0 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad \mu_r - \text{relativna magnetska propustljivost}$$

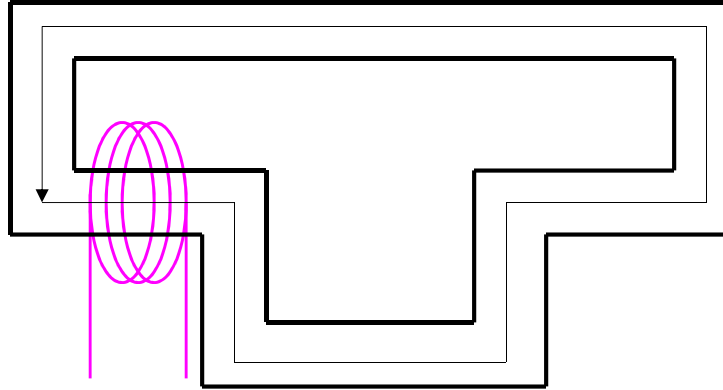
$$\vec{B}_{uk} = \mu_r \vec{B}_{sp} \quad \mu_r > 0,9999 \quad \text{dijamagnetici}$$

$$\mu_r < 1,0001 \quad \text{paramagnetici}$$

$$\mu_r > 10000 \quad \text{feromagnetici}$$

Feromagnetici

- magnetski provodnici



na svakih μ_r linija unutar feromagnetika treba nacrtati jednu liniju izvan feromagnetika

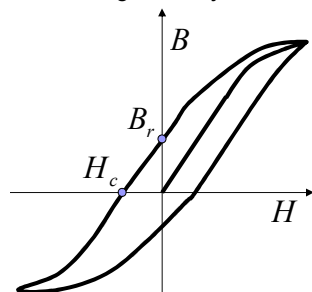
Feromagnetici

- Amperov zakon u magnetskim materijalima
- Generalisani Amperov zakon

$$C_M^{zatvoreno} = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_c I$$

Feromagnetici

- jačina magnetskog polja H opisuje uticaj struja električnih provodnika
- magnetizacija M opisuje uticaj materijala -magneta
- indukcija magnetskog polja opisuje ukupne magnetske efekte
- namagnećivanje



B_r – remanentna magnetizacija

H_c – koercitivno polje

veliko B_r – tvrdi magnetski materijali (za magnete)

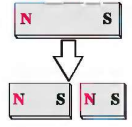
malo B_r – meki magnetski materijali (za elektromagnete)

VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

- Sve do sada električna i magnetska polja bila su posmatrana odvojeno, kao dvije potpuno nezavisne pojave.
- U slučaju elektrostatičkog polja magnetsko polje i ne postoji, dok se električno polje vremenski konstantnih struja posmatralo nezavisno od vremenski konstantnog magnetskog polja.

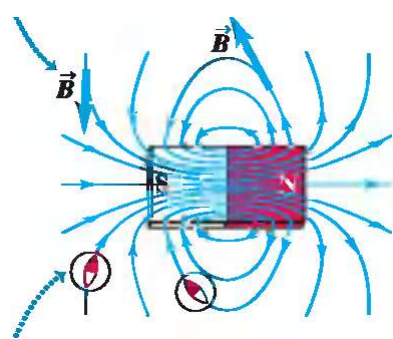
In contrast to electric charges, magnetic poles always come in pairs and can't be isolated.

Breaking a magnet in two ...



... yields two magnets, not two isolated poles.

U svakoj tački vektor magnetnog \vec{B} polja je tangenta na linije polja.



Električne interakcije možemo opisati u dva koraka:

- 1) *Statičko* naelektrisanje oko sebe stvara **električno polje** \vec{E}
- 2) Električno polje deluje silom $\vec{F} = q\vec{E}$ na bilo koje naelektrisanje q koje se nađe u električnom polju.

Na sličan način možemo opisati i magnetne interakcije:

- 1) *Naelektrisanje u pokretu* ili *struja* oko sebe stvara **magnetno polje**.
- 2) Magnetno polje deluje silom \vec{F} na bilo koje drugo naelektrisanje *u pokretu* ili *struju* koja se nađe magnetnom polju

Označimo magnetno polje sa \vec{B} . To je vektorska veličina čiji se pravac i smer poklapaju sa pravcem i smerom stalnog magneta a to znači da linije polja izviru u severnom polu a uviru u južnom polu (prethodna slika).

Jedinica za magnetno polje $[B] = 1 \text{ tesla} = 1 \text{ T} = 1 \text{ N/A} \cdot \text{m}$

Magnetno polje Zemlje je reda veličine od 10^{-4} T . Magnetno polje na površini neutronskih zvezda je reda veličine od 10^8 T .
U optičaju je i jedinica za magnetno polje gauss(G). $1\text{G}=10^{-4}\text{T}$

- Vremenski konstantno električno polje prouzrokuje električnu struju, koja, zatim, predstavlja izvor vremenski konstantnog magnetskog polja, a povratni uticaj tog magnetskog polja na struju koja ga je izazvala, se zanemaruje.
- Kao što je već rečeno u uvodu prethodnog dijela, sasvim druga situacija je sa vremenski promjenljivim električnim i magnetskim poljem.
- Vremenski promjenljivo električno polje je uvijek praćeno vremenski promjenljivim magnetskim poljem i obrnuto.

- Naime, kaže se da, u nekom domenu postoji elektromagnetsko polje, ako, u tom domenu, na naelektrisanja djeluje tzv. Lorencova sila (Hendrik Antoon Lorenz, 1853-1928):

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E} + Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

- Vremenski promjenljivo elektromagnetsko polje ima veću praktičnu važnost od prethodno proučavanih, vremenski konstantnih polja, zbog činjenice da se vremenski promjenljive struje danas mnogo češće koriste od vremenski konstantnih, počev od električne energije u domaćinstvima i industriji, pa sve do elektromagnetskih talasa, nezaobilaznih u savremenim komunikacijama.

Kada se naelektrisana čestica kreće u oblasti u kojoj postoji i električno i magnetno polje onda na nju deluju obe sile odnosno i sila električnog polja i sila magnetnog polja:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

7.9. Magnetici

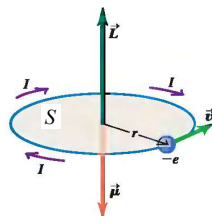
⇒ Magnetna svojstva magnetika određuju tzv. elementarne kružne struje, koje čine elektroni koji kruže oko svojih matičnih jezgara.

→ Elektron, koji se kreće po kružnoj trajektoriji oko atomskog jezgra predstavlja kružnu struju, odnosno elementarnu kružnu struju, čija je jačina:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r} \quad \mu = I \cdot S \quad \text{Magnetni moment}$$

→ Svaka električna struja stvara magnetno polje, pa ga stvaraju i te elementarne struje.

→ Osnovna fizička veličina koja karakteriše magnetna svojstva elementarnih kružnih struja nije magnetno polje, koje one stvaraju, nego njihov magnetni moment.



$$\mu = \frac{ev}{2\pi r} (\pi r^2) = \frac{evr}{2}$$

ELEKTROMAGNETSKA INDUKCIJA

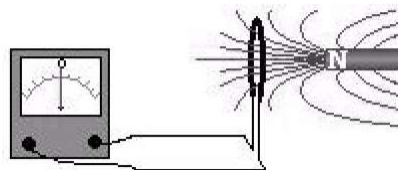
- Faradej je zaključio da bi magnetsko polje moglo da prouzrokuje električnu struju u nekoj zatvorenoj konturi. Zatvorenu konturu, sa instrumentom za indikaciju struje, postavio je u blizinu permanentnog magneta, očekujući reagovanje instrumenta.
- Očekivana reakcija, u stacionarnom položaju konture i magneta, je izostala, ali je ustanovio da dolazi do reagovanja instrumenta prilikom prinošenja ili udaljavanja magneta od konture. Iste efekte je dobio i kada je konturu pokretao ili deformisao u vremenski konstantnom magnetskom polju, pa je zaključio da je uzrok pojave struje u zatvorenoj konturi, u kojoj ne djeluje nikakav generator, vremenski promjenljiv fluks kroz tu konturu (proizvoljnu površ, koja se na konturu oslanja).

- Posmatrajući izraz za Lorencovu silu, (5.1), može da se zaključi da vektorski proizvod , takođe predstavlja neko električno polje, pošto djeluje silom na naelektrisanje Q , tako da može da se opiše vektorom jačine električnog polja .
- Za razliku od vektora , koji nastupa u prvom dijelu Lorencove sile i koji predstavlja električno polje usljed razdvojenih naelektrisanja, vektor predstavlja električno polje nastalo kao posljedica magnetskog polja i taj vektor se naziva vektor jačine indukovanog električnog polja,

$$\vec{E}_{ind} = \vec{v} \times \vec{B} .$$

Elektromagnetna indukcija, naizmjenična struja

⇒ Kada kružnom provodniku počne da se približava magnet, ampermetar registruje protok struje, čija je jačina veća, ako se magnet brže kreće.



► *Faradejev zakon elektromagnetne indukcije*: Svaka promena magnetnog fluksa indukuje elektromotornu silu koja je jednaka:

$$\varepsilon_{ind} = \frac{d\Phi_m}{dt} \qquad \frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{d(BS)}{dt} = S \frac{dB}{dt} + B \frac{dS}{dt}$$

⇒ *Lencovo pravilo*: Indukovana EMS daje indukovanu struju koja ima takav smer da stvara magnetno polje, koje teži da kompenzira promenu fluksa koja je uzrok indukcije.

⇒ Elektromagnetna indukcija se javlja i u strujnim kolima, kada se u njima isključuje ili uključuje izvor električne struje.

Između vektora \vec{E} i \vec{E}_{ind} postoji bitna razlika. Dok vektor jačine električnog polja \vec{E} , nastalog usljed razdvojenih naelektrisanja, predstavlja konzervativno polje, tj. njegov integral po zatvorenoj konturi je jednak nuli, dotle je, u opštem slučaju, integral po zatvorenoj putanji vektora \vec{E}_{ind} različit od nule. Po osnovnoj definiciji napona i elektromotorne sile, obično se taj integral naziva indukovana elektromotorna sila i obilježava malim slovom "e",

$$e = \oint_C \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \neq 0.$$

Svojim eksperimentima Faradej je utvrdio da je veličina elektromotorne sile, indukovane u zatvorenoj konturi, direktno proporcionalna promjeni fluksa kroz konturu, odnosno, formulisao tzv. Faradejev zakon elektromagnetske indukcije,

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (5.3)$$

- pri čemu je ustanovio da je potpuno svejedno da li do promjene fluksa dolazi usljed djelovanja vremenski promjenljivog magnetskog polja na nepokretnu, krutu konturu ili se kontura kreće i/ili deformiše u vremenski konstantnom ili vremenski promjenljivom magnetskom polju.
- U odnosu na razlog promjene magnetskog fluksa kroz konturu se često definišu dvije vrste indukovane elektromotorne sile.
- Statička indukovana elektromotorna sila nastaje u nepokretnoj, krutoj konturi, usljed djelovanja vremenski promjenljivog magnetskog polja, dok se dinamička indukovana elektromotorna sila javlja u konturi, koja se kreće ili deformiše.

- Iz gornjeg izraza može, takođe, da se uoči da uopšte nije bitno od kakvog materijala je kontura, tj. da indukovana elektromotorna sila može da se definiše čak i za zamišljenu zatvorenu konturu u kojoj dolazi do vremenske promjene magnetskog fluksa.
- Znak "-" u Faradejevom zakonu kaže da je smjer djelovanja indukovane elektromotorne sile uvijek suprotan promjeni fluksa, odnosno, teži da spriječi promjenu fluksa kroz konturu. Više o tome će biti riječi u sljedećem poglavlju, pri razmatranju tzv. Lencovog zakona.

- Cijela pojava da pri vremenskoj promjeni magnetskog fluksa dolazi do indukovanja elektromotorne sile naziva se elektromagnetska indukcija.
- Veliki broj uređaja, od kojih će neki biti detaljnije obrađeni u daljem tekstu, radi na principu elektromagnetske indukcije.
- Tako, na primjer, bez elektromagnetske indukcije ne bi mogli da rade transformatori, obrtni generatori, neki elektromotori, predajne i prijemne radio, televizijske i radarske antene i još mnogo drugih uređaja u elektrotehnici.
- Već samo ovo kratko navođenje uređaja, koji koriste pojavu elektromagnetske indukcije, vrlo jasno ilustruje važnost ove pojave u kompletnoj elektrotehnici

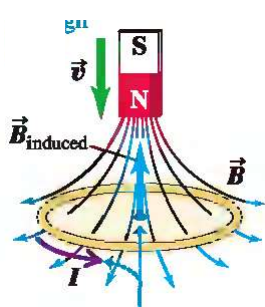
LENCOV ZAKON

- Ako u nekoj zatvorenoj konturi, od bilo kakvog materijala, dođe do promjene magnetskog fluksa, u konturi će se, prema Faradejevom zakonu, javiti indukovana elektromotorna sila.
- Ako je zatvorena kontura provodna, u njoj će se, pod djelovanjem indukovane elektromotorne sile, uspostaviti električna struja, koja se, najčešće, naziva indukovana struja.
- Drugim riječima, za razliku od vremenski konstantnih struja, u zatvorenoj, provodnoj konturi, kroz koju se mijenja magnetski fluks, dolazi do pojave električne struje i bez prisustva generatora. polja.

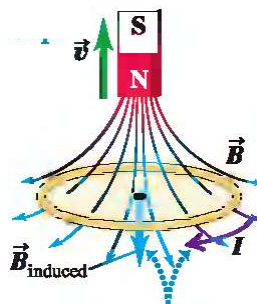
Lencovo pravilo : Indukovana EMS daje indukovanu struju koja ima takav smer da stvara indukovano magnetno polje B_{ind} , koje teži da kompenzuje promenu fluksa koja je uzrok indukcije.

Smisao Lencovog pravila lepo ilustruje primer permanentnog magneta koji se približava ili udaljava od provodne kružne konture. Pri približavanju, fluks primarnog polja (\vec{B}) kroz konturu se povećava. Indukovano polje ima (\vec{B}_{ind}) orijentaciju da spreči ovo povećanje, znači orijentaciju suprotnu od \vec{B} . Da bi B_{ind} bilo takvo struja I , odnosno Indukovana elektromotorna sila, u kružnoj konturi mora da ima naznačenu orijentaciju (Slika 1).

Pri udaljavanju permanentnog magneta od konture (slika 2), fluks magnetnog polja B kroz konturu se smanjuje. Indukovano magnetno polje B_{ind} ima orijentaciju da spreči smanjenje, znači istu orijentaciju kao primarno polje B . Zato struja I i indukovana EMS imaju orijentaciju kao na slici 2. Pravilo desne ruke određuje pravac i smer indukovano magnetnog polja B_{ind} .



Slika 1



Slika 2

Elektromagnetno polje

⇒ Električno i magnetno polje su materijalni entiteti, jer tamo gde ta polja postoje, postoje i njihove energije.

Materijalnost energije se najjednostavnije uočava u čuvenoj relativističkoj vezi između energije i mase: $E=mc^2$.

⇒ Transformacija energije električnog u energiju magnetnog polja ukazuju da se električno i magnetno polje ne mogu posmatrati kao odvojeni entiteti.

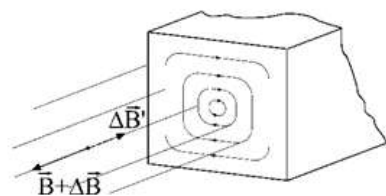
► Svako nestacionarno magnetno polje u prostoru oko sebe indukuje nestacionarno električno polje sa zatvorenim linijama sile, koje obuhvataju linije sile polja magnetnog polja i normalne su na njih

► Svako indukovano električno polje indukuje magnetno polje, čije zatvorene linije sile, takođe, obuhvataju linije sile električnog polja i normalne su na njih

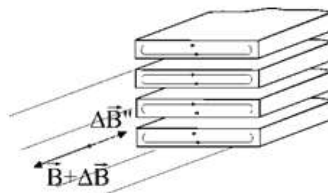
⇒ Električno i magnetno polje su dva načina ispoljavanja jedinstvenog elektromagnetnog polja.

VRTLOŽNE STRUJE

- Magnetsko polje, kako vremenski konstantno, tako i vremenski promjenljivo, u opštem slučaju, postoji i unutar provodnih materijala.
- Ako je, unutar provodnika, magnetsko polje vremenski promjenljivo, tada će se, u samom provodniku indukovati elektromotorna sila i javiće se indukovane struje.
- Te struje nisu kanalisane pojedinačnim, izolovanim konturama, već se, u obliku "vrtloga", zatvaraju unutar provodnika, pa se, zbog toga, nazivaju vrtložne, vihorne ili Fukoove struje. Kao i sve struje u provodnicima, i ove struje prouzrokuju Džulove gubitke, odnosno, zagrijavanje materijala.



Sl. 5.1. Vrtložne struje masivnom provodom feromagnetskom jezgra



Sl. 5.2. Vrtložne struje u lamelisanom jezgru

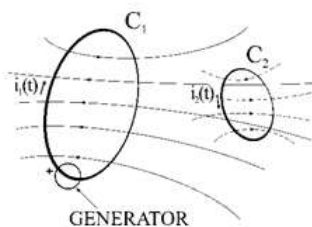
- Da bi se te struje smanjile, feromagnetskom materijalu se dodaje silicijum, kako bi se povećala njegova specifična otpornost i time smanjila jačina vrtložnih struja. Drugi način smanjivanja gubitaka usljed vrtložnih struja je takozvano "lamelisanje" feromagnetskog jezgra, što znači da se jezgro pravi od tankih, međusobno izolovanih limova.
- Ukoliko su promjene elektromagnetskog polja brže, za jezgra uređaja se koriste tzv. feriti, keramički materijali sa nešto slabijim magnetskim karakteristikama (manje vrijednosti permeabilnosti), ali bitno većim specifičnim otpornostima (od do). Oni se ne lamelišu, jer će, zbog velike specifične provodnosti, čak i relativno velike indukovane elektromotorne sile prouzrokovati vrtložne struje malih intenziteta

POVRŠINSKI EFEKAT

- U slučaju vremenski promjenljive struje, u provodniku će se javiti i indukovane struje, po Lencovom zakonu suprotnog smjera od primarnih struja, tako da će doći do neravnomjerne raspodjele struja po poprečnom presjeku provodnika i to tako da će intenzitet vektora gustine struje biti veći bliže površi provodnika.
- Izrazitost te pojave zavisi od intenziteta vrtložnih struja, pa će se, prema tome, povećavati povećanjem brzine promjene struje, tako da će, pri vrlo brzo promjenljivim strujama, struja postojati samo u tankom sloju uz površ provodnika, dok će ostatak provodnika biti, praktično, bez struje. Po tom, graničnom slučaju, cijela pojava je dobila naziv površinski efekat.

MEDUSOBNA I SOPSTVENA INDUKTIVNOST

- Posmatrajmo dvije konture proizvoljnog oblika, C_1 i C_2 , koje se nalaze u linearnoj (neferomagnetskoj) sredini, relativno blizu jedna drugoj, kao što je prikazano na Sl. 5. 3.



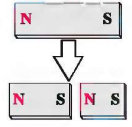
Sl. 5.3. Magnetski spregnute konture

VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

- Sve do sada električna i magnetska polja bila su posmatrana odvojeno, kao dvije potpuno nezavisne pojave.
- U slučaju elektrostatičkog polja magnetsko polje i ne postoji, dok se električno polje vremenski konstantnih struja posmatralo nezavisno od vremenski konstantnog magnetskog polja.

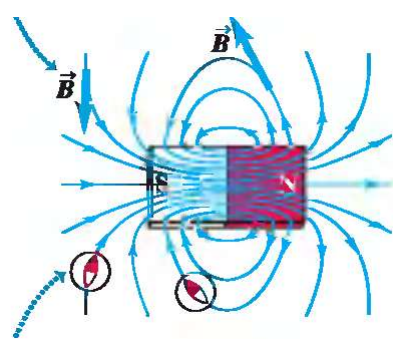
In contrast to electric charges, magnetic poles always come in pairs and can't be isolated.

Breaking a magnet in two ...



... yields two magnets, not two isolated poles.

U svakoj tački vektor magnetnog \vec{B} polja je tangenta na linije polja.



Električne interakcije možemo opisati u dva koraka:

- 1) *Statičko* naelektrisanje oko sebe stvara **električno polje** \vec{E}
- 2) Električno polje deluje silom $\vec{F} = q\vec{E}$ na bilo koje naelektrisanje q koje se nađe u električnom polju.

Na sličan način možemo opisati i magnetne interakcije:

- 1) *Naelektrisanje u pokretu* ili *struja* oko sebe stvara **magnetno polje**.
- 2) Magnetno polje deluje silom \vec{F} na bilo koje drugo naelektrisanje *u pokretu* ili *struju* koja se nađe magnetnom polju

Označimo magnetno polje sa \vec{B} . To je vektorska veličina čiji se pravac i smer poklapaju sa pravcem i smerom stalnog magneta a to znači da linije polja izviru u severnom polu a uviru u južnom polu (prethodna slika).

Jedinica za magnetno polje $[B] = 1 \text{ tesla} = 1 \text{ T} = 1 \text{ N/A} \cdot \text{m}$

Magnetno polje Zemlje je reda veličine od 10^{-4} T . Magnetno polje na površini neutronskih zvezda je reda veličine od 10^8 T .
U optičaju je i jedinica za magnetno polje gauss(G). $1\text{G}=10^{-4}\text{T}$

- Vremenski konstantno električno polje prouzrokuje električnu struju, koja, zatim, predstavlja izvor vremenski konstantnog magnetskog polja, a povratni uticaj tog magnetskog polja na struju koja ga je izazvala, se zanemaruje.
- Kao što je već rečeno u uvodu prethodnog dijela, sasvim druga situacija je sa vremenski promjenljivim električnim i magnetskim poljem.
- Vremenski promjenljivo električno polje je uvijek praćeno vremenski promjenljivim magnetskim poljem i obrnuto.

- Naime, kaže se da, u nekom domenu postoji elektromagnetsko polje, ako, u tom domenu, na naelektrisanja djeluje tzv. Lorencova sila (Hendrik Antoon Lorenz, 1853-1928):

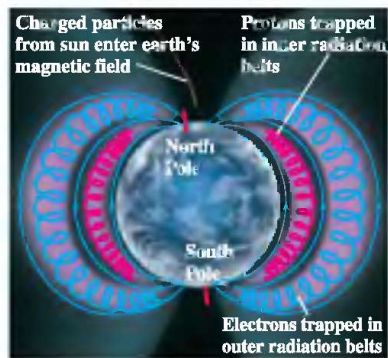
$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E} + Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

- Vremenski promjenljivo elektromagnetsko polje ima veću praktičnu važnost od prethodno proučavanih, vremenski konstantnih polja, zbog činjenice da se vremenski promjenljive struje danas mnogo češće koriste od vremenski konstantnih, počev od električne energije u domaćinstvima i industriji, pa sve do elektromagnetskih talasa, nezaobilaznih u savremenim komunikacijama.

Kada se naelektrisana čestica kreće u oblasti u kojoj postoji i električno i magnetno polje onda na nju deluju obe sile odnosno i sila električnog polja i sila magnetnog polja:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

(a)



Van Alenovi pojasi oko Zemlje



the aurora borealis.

7.9. Magnetici

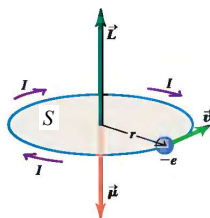
⇒ Magnetna svojstva magnetika određuju tzv. elementarne kružne struje, koje čine elektroni koji kruže oko svojih matičnih jezgara.

→ Elektron, koji se kreće po kružnoj trajektoriji oko atomskog jezgra predstavlja kružnu struju, odnosno elementarnu kružnu struju, čija je jačina:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r} \quad \mu = I \cdot S \text{ Magnetni moment}$$

→ Svaka električna struja stvara magnetno polje, pa ga stvaraju i te elementarne struje.

→ Osnovna fizička veličina koja karakteriše magnetna svojstva elementarnih kružnih struja nije magnetno polje, koje one stvaraju, nego njihov magnetni moment.



$$\mu = \frac{ev}{2\pi r} (\pi r^2) = \frac{evr}{2}$$

ELEKTROMAGNETSKA INDUKCIJA

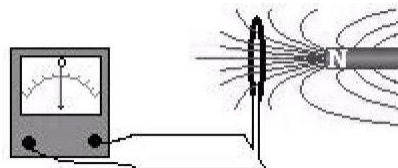
- Faradej je zaključio da bi magnetsko polje moglo da prouzrokuje električnu struju u nekoj zatvorenoj konturi. Zatvorenu konturu, sa instrumentom za indicaciju struje, postavio je u blizinu permanentnog magneta, očekujući reagovanje instrumenta.
- Očekivana reakcija, u stacionarnom položaju konture i magneta, je izostala, ali je ustanovio da dolazi do reagovanja instrumenta prilikom prinošenja ili udaljavanja magneta od konture. Iste efekte je dobio i kada je konturu pokretao ili deformisao u vremenski konstantnom magnetskom polju, pa je zaključio da je uzrok pojave struje u zatvorenoj konturi, u kojoj ne djeluje nikakav generator, vremenski promjenljiv fluks kroz tu konturu (proizvoljnu površ, koja se na konturu oslanja).

- Posmatrajući izraz za Lorencovu silu, (5.1), može da se zaključi da vektorski proizvod $\vec{v} \times \vec{B}$, takođe predstavlja neko električno polje, pošto djeluje silom na naelektrisanje Q , tako da može da se opiše vektorom jačine električnog polja \vec{E}_{ind} .
- Za razliku od vektora \vec{v} , koji nastupa u prvom dijelu Lorencove sile i koji predstavlja električno polje usljed razdvojenih naelektrisanja, vektor \vec{B} predstavlja električno polje nastalo kao posljedica magnetskog polja i taj vektor se naziva vektor jačine indukovano električnog polja,

$$\vec{E}_{ind} = \vec{v} \times \vec{B} .$$

Elektromagnetna indukcija, naizmjenična struja

⇒ Kada kružnom provodniku počne da se približava magnet, ampermetar registruje protok struje, čija je jačina veća, ako se magnet brže kreće.



► *Faradejev zakon elektromagnetne indukcije*: Svaka promena magnetnog fluksa indukuje elektromotornu silu koja je jednaka:

$$\varepsilon_{ind} = \frac{d\Phi_m}{dt} \qquad \frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{d(BS)}{dt} = S \frac{dB}{dt} + B \frac{dS}{dt}$$

⇒ *Lencovo pravilo*: Indukovana EMS daje indukovanu struju koja ima takav smer da stvara magnetno polje, koje teži da kompenzira promenu fluksa koja je uzrok indukcije.

⇒ Elektromagnetna indukcija se javlja i u strujnim kolima, kada se u njima isključuje ili uključuje izvor električne struje.

Između vektora \vec{E} i \vec{E}_{ind} postoji bitna razlika. Dok vektor jačine električnog polja \vec{E} , nastalog usljed razdvojenih naelektrisanja, predstavlja konzervativno polje, tj. njegov integral po zatvorenoj konturi je jednak nuli, dotle je, u opštem slučaju, integral po zatvorenoj putanji vektora \vec{E}_{ind} različit od nule. Po osnovnoj definiciji napona i elektromotorne sile, obično se taj integral naziva indukovana elektromotorna sila i obilježava malim slovom "e",

$$e = \oint_C \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \neq 0.$$

Svojim eksperimentima Faradej je utvrdio da je veličina elektromotorne sile, indukovane u zatvorenoj konturi, direktno proporcionalna promjeni fluksa kroz konturu, odnosno, formulisao tzv. Faradejev zakon elektromagnetske indukcije,

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (5.3)$$

- pri čemu je ustanovio da je potpuno svejedno da li do promjene fluksa dolazi usljed djelovanja vremenski promjenljivog magnetskog polja na nepokretnu, krutu konturu ili se kontura kreće i/ili deformiše u vremenski konstantnom ili vremenski promjenljivom magnetskom polju.
- U odnosu na razlog promjene magnetskog fluksa kroz konturu se često definišu dvije vrste indukovane elektromotorne sile.
- Statička indukovana elektromotorna sila nastaje u nepokretnoj, krutoj konturi, usljed djelovanja vremenski promjenljivog magnetskog polja, dok se dinamička indukovana elektromotorna sila javlja u konturi, koja se kreće ili deformiše.

- Iz gornjeg izraza može, takođe, da se uoči da uopšte nije bitno od kakvog materijala je kontura, tj. da indukovana elektromotorna sila može da se definiše čak i za zamišljenu zatvorenu konturu u kojoj dolazi do vremenske promjene magnetskog fluksa.
- Znak "-" u Faradejevom zakonu kaže da je smjer djelovanja indukovane elektromotorne sile uvijek suprotan promjeni fluksa, odnosno, teži da spriječi promjenu fluksa kroz konturu. Više o tome će biti riječi u sljedećem poglavlju, pri razmatranju tzv. Lencovog zakona.

- Cijela pojava da pri vremenskoj promjeni magnetskog fluksa dolazi do indukovanja elektromotorne sile naziva se elektromagnetska indukcija.
- Veliki broj uređaja, od kojih će neki biti detaljnije obrađeni u daljem tekstu, radi na principu elektromagnetske indukcije.
- Tako, na primjer, bez elektromagnetske indukcije ne bi mogli da rade transformatori, obrtni generatori, neki elektromotori, predajne i prijemne radio, televizijske i radarske antene i još mnogo drugih uređaja u elektrotehnici.
- Već samo ovo kratko navođenje uređaja, koji koriste pojavu elektromagnetske indukcije, vrlo jasno ilustruje važnost ove pojave u kompletnoj elektrotehnici

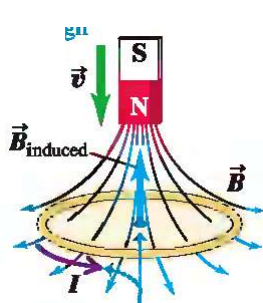
LENCOV ZAKON

- Ako u nekoj zatvorenoj konturi, od bilo kakvog materijala, dođe do promjene magnetskog fluksa, u konturi će se, prema Faradejevom zakonu, javiti indukovana elektromotorna sila.
- Ako je zatvorena kontura provodna, u njoj će se, pod djelovanjem indukovane elektromotorne sile, uspostaviti električna struja, koja se, najčešće, naziva indukovana struja.
- Drugim riječima, za razliku od vremenski konstantnih struja, u zatvorenoj, provodnoj konturi, kroz koju se mijenja magnetski fluks, dolazi do pojave električne struje i bez prisustva generatora. polja.

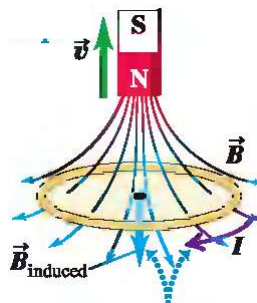
Lencovo pravilo : Indukovana EMS daje indukovanu struju koja ima takav smer da stvara indukovano magnetno polje B_{ind} , koje teži da kompenzuje promenu fluksa koja je uzrok indukcije.

Smisao Lencovog pravila lepo ilustruje primer permanentnog magneta koji se približava ili udaljava od provodne kružne konture. Pri približavanju, fluks primarnog polja (\vec{B}) kroz konturu se povećava. Indukovano polje ima (\vec{B}_{ind}) orijentaciju da spreči ovo povećanje, znači orijentaciju suprotnu od \vec{B} . Da bi B_{ind} bilo takvo struja I , odnosno Indukovana elektromotorna sila, u kružnoj konturi mora da ima naznačenu orijentaciju (Slika 1).

Pri udaljavanju permanentnog magneta od konture (slika 2), fluks magnetnog polja B kroz konturu se smanjuje. Indukovano magnetno polje B_{ind} ima orijentaciju da spreči smanjenje, znači istu orijentaciju kao primarno polje B . Zato struja i indukovana EMS imaju orijentaciju kao na slici 2. Pravilo desne ruke određuje pravac i smer indukovanog magnetnog polja B_{ind} .



Slika 1



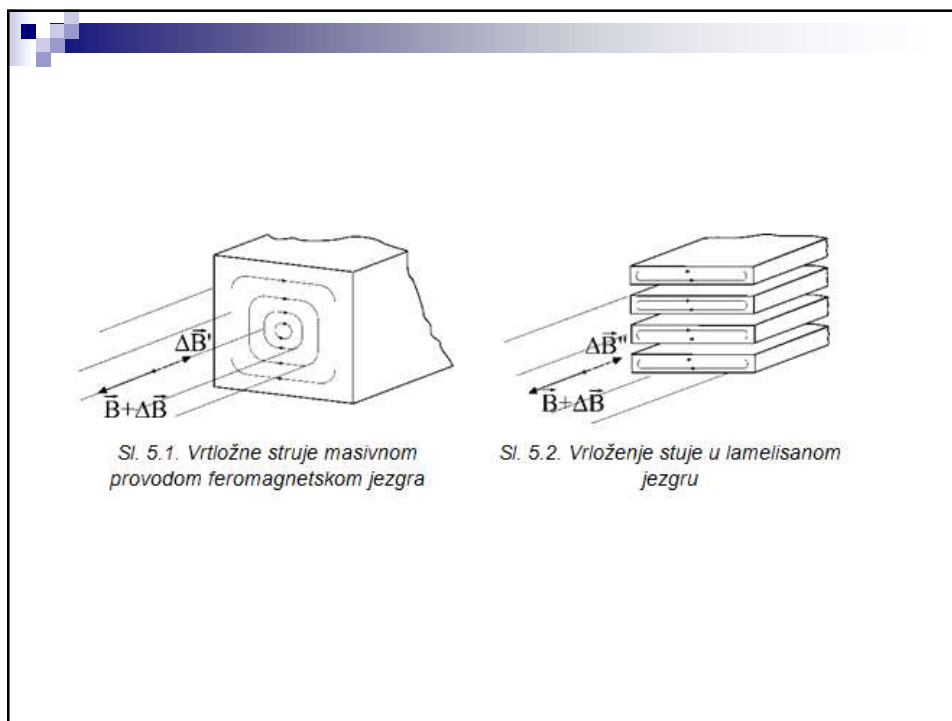
Slika 2

Elektromagnetno polje

- ⇒ Električno i magnetno polje su materijalni entiteti, jer tamo gde ta polja postoje, postoje i njihove energije.
 - Materijalnost energije se najjednostavnije uočava u čuvenoj relativističkoj vezi između energije i mase: $E=mc^2$.
- ⇒ Transformacija energije električnog u energiju magnetnog polja ukazuju da se električno i magnetno polje ne mogu posmatrati kao odvojeni entiteti.
- ▶ Svako nestacionarno magnetno polje u prostoru oko sebe indukuje nestacionarno električno polje sa zatvorenim linijama sile, koje obuhvataju linije sile polja magnetnog polja i normalne su na njih
- ▶ Svako indukovano električno polje indukuje magnetno polje, čije zatvorene linije sile, takođe, obuhvataju linije sile električnog polja i normalne su na njih
- ⇒ Električno i magnetno polje su dva načina ispoljavanja jedinstvenog elektromagnetnog polja.

VRTLOŽNE STRUJE

- Magnetsko polje, kako vremenski konstantno, tako i vremenski promjenljivo, u opštem slučaju, postoji i unutar provodnih materijala.
- Ako je, unutar provodnika, magnetsko polje vremenski promjenljivo, tada će se, u samom provodniku indukovati elektromotorna sila i javiće se indukovane struje.
- Te struje nisu kanalisane pojedinačnim, izolovanim konturama, već se, u obliku "vrtloga", zatvaraju unutar provodnika, pa se, zbog toga, nazivaju vrtložne, vihorne ili Fukoove struje. Kao i sve struje u provodnicima, i ove struje prouzrokuju Džulove gubitke, odnosno, zagrijavanje materijala.



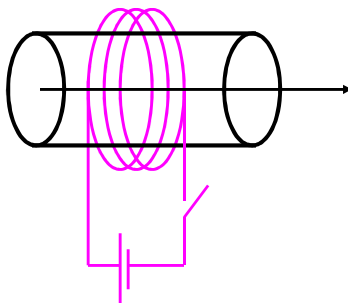
- Da bi se te struje smanjile, feromagnetskom materijalu se dodaje silicijum, kako bi se povećala njegova specifična otpornost i time smanjila jačina vrtložnih struja. Drugi način smanjivanja gubitaka usljed vrtložnih struja je takozvano "lamelisanje" feromagnetskog jezgra, što znači da se jezgro pravi od tankih, međusobno izolovanih limova.
- Ukoliko su promjene elektromagnetskog polja brže, za jezgra uređaja se koriste tzv. feriti, keramički materijali sa nešto slabijim magnetskim karakteristikama (manje vrijednosti permeabilnosti), ali bitno većim specifičnim otpornostima (od do). Oni se ne lamelišu, jer će, zbog velike specifične provodnosti, čak i relativno velike indukovane elektromotorne sile prouzrokovati vrtložne struje malih intenziteta

POVRŠINSKI EFEKAT

- U slučaju vremenski promjenljive struje, u provodniku će se javiti i indukovane struje, po Lencovom zakonu suprotnog smjera od primarnih struja, tako da će doći do neravnomjerne raspodjele struja po poprečnom presjeku provodnika i to tako da će intenzitet vektora gustine struje biti veći bliže površi provodnika.
- Izrazitost te pojave zavisi od intenziteta vrtložnih struja, pa će se, prema tome, povećavati povećanjem brzine promjene struje, tako da će, pri vrlo brzo promjenljivim strujama, struja postojati samo u tankom sloju uz površ provodnika, dok će ostatak provodnika biti, praktično, bez struje. Po tom, graničnom slučaju, cijela pojava je dobila naziv površinski efekat.

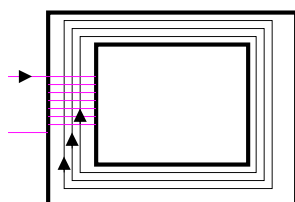
Elektromagneti

- magneti koji se uključuju i isključuju prema potrebi
- električna struja kao izvor magnetskog polja
- meki feromagnetik kao pojačavač polja

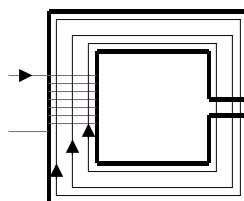


Magnetska kola

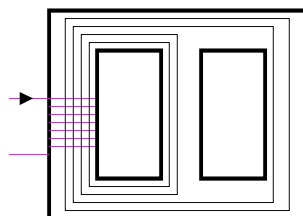
- Zatvorene feromagnetske strukture koje služe proizvodnji i prenosu magnetskog fluksa



prосто magnetsko kolo



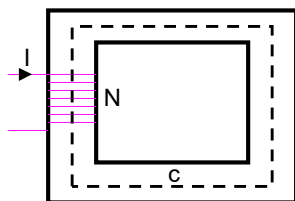
magnetsko kolo sa procepom



razgranato magnetsko kolo

Magnetska kola

- Proračun magnetskih kola
 - zadatak: izračunati fluksove magnetskih polja kroz grane kola
 - oruđe: generalisani Amperov zakon
 - Kirhofovi zakoni



$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \approx BS = \mu_0 \mu_r HS$$

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_c I$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} \approx H \cdot l_{sr} = NI \Rightarrow H = \frac{NI}{l_{sr}}$$

$$\Phi = \mu_0 \mu_r HS = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{l_{sr}} S = \frac{E_M}{R_M}$$

$$\Phi = \frac{E_M}{R_M} \quad E_M = NI \quad R_M = \rho_M \frac{l_{sr}}{S} \quad \rho_M = \frac{1}{\mu_0 \mu_r}$$

Kap Hopkinsonov zakon (Omov zakon za magnetsko kolo)

Poređenje elektrostatičkog i stacionarnog magnetskog polja

Osobina	Elektrostatičko polje	Stacionarno magnetsko polje
Oblik linija	otvorene	zatvorene
Fluks kroz zatvorenu površinu	Proporcionalan količini izvora polja u unutrašnjosti	0
Ćirkulacija po zatvorenoj liniji	0	Proporcionalna količini izvora u unutrašnjosti
Potencijal	Ima	Nema
Uticaj supstance	Slabi	Pojačava
Tip polja	Izvorno	Vrtložno

Magnetska permeabilnost

- Magnetska permeabilnost (specifična magnetska vodljivost) je karakteristika svakog materijala.
- Magnetska permeabilnost se mjeri u SI sustavu u volt sekundama po amper metru (Vs/Am).

Magnetska permeabilnost

- Magnetska permeabilnost je produkt apsolutne i relativne permeabilnosti.
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$
- Relativna permeabilnost je bezdimenzionalna konstanta koja pokazuje koliko puta će se povećati magnetski tok u nekom prostoru ako se u njemu nalazi promatrani materijal umjesto vakuuma.

ee07_8

149

Magnetska permeabilnost

- Apsolutna permeabilnost je jedna od fizikalnih konstanti koja određuje strukturu Svemira.
- Relativna permeabilnost kod feromagnetskih materijala može doći i do 300.000

ee07_8

150

Magnetska uzbuda

- Magnetska uzbuda H pokazuje mjeru magnetske uzbude prostora.
- H pokazuje koliku će uzbudu dati primijenjena magnetomotorna sila promatrana u nekoj točki ako se uklone utjecaji materijala.

ee07_8

151

VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

- Ta dva polja ne mogu da se posmatraju nezavisno jedno od drugog i predstavljaju samo dva dijela jedinstvenog elektromagnetskog polja.
- Drugim riječima, vremenski promjenljivo električno polje je uvijek praćeno vremenski promjenljivim magnetskim poljem i obrnuto.
- Naime, kaže se da, u nekom domenu postoji elektromagnetsko polje, ako, u tom domenu, na naelektrisanja djeluje tzv. Lorencova sila

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E} + Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

ELEKTROMAGNETSKA INDUKCIJA

- Od svih pojava u elektrotehnici je, vjerovatno, najvažnija pojava koja se naziva elektromagnetska indukcija.
- Do nje je, eksperimentalno, prvi došao genijalni engleski eksperimentator Majkl Faradej (Michael Faraday, 1791-1867). Na osnovu Erstedovog eksperimenta (Hans Christian Oersted, 1777-1851), koji je pokazao da, u blizini provodnika sa strujom, dolazi do pomjeranja magnetne igle kompasu, odnosno, da električna struja prouzrokuje magnetsko polje

- , Faradej je zaključio da bi magnetsko polje moglo da prouzrokuje električnu struju u nekoj zatvorenoj konturi. Zatvorenu konturu, sa instrumentom za indikaciju struje, postavio je u blizinu permanentnog magneta, očekujući reagovanje instrumenta.
- Očekivana reakcija, u stacionarnom položaju konture i magneta, je izostala, ali je ustanovio da dolazi do reagovanja instrumenta prilikom prinošenja ili udaljavanja magneta od konture.

- Posmatrajući izraz za Lorencovu silu, može da se zaključi da vektorski proizvod $\vec{v} \times \vec{B}$, takođe predstavlja neko električno polje, pošto djeluje silom na naelektrisanje Q , tako da može da se opiše vektorom jačine električnog polja \vec{E}_m .

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E} + Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

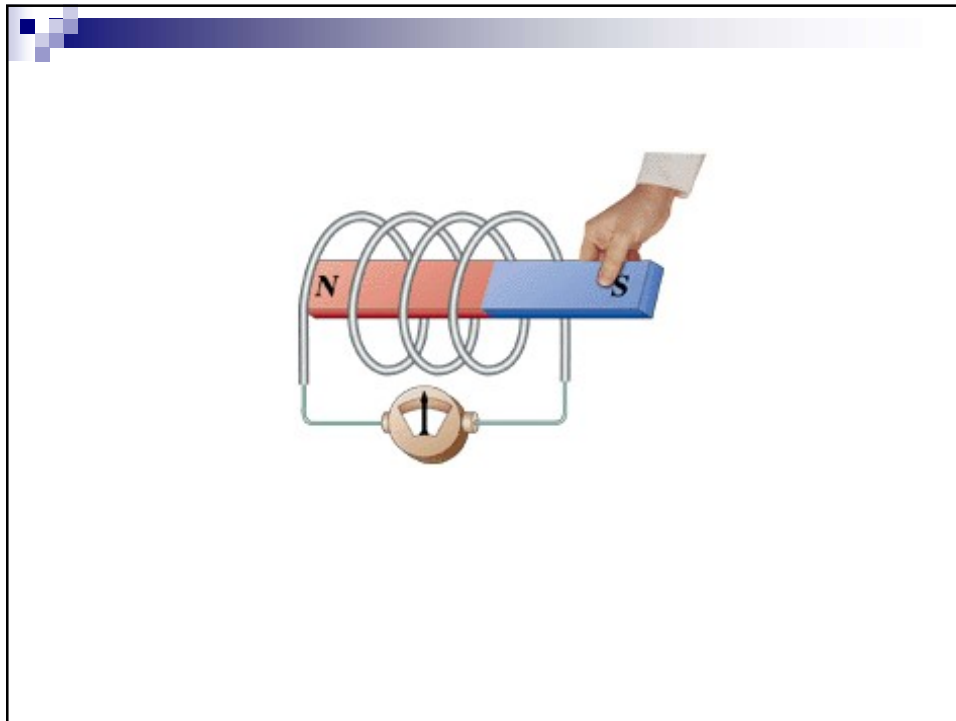
- Za razliku od vektora \vec{E} , koji nastupa u prvom dijelu Lorencove sile i koji predstavlja električno polje usljed razdvojenih naelektrisanja, vektor predstavlja električno polje nastalo kao posljedica magnetskog polja i taj vektor se naziva vektor jačine indukovano električnog polja \vec{E}_m .

- Svojim eksperimentima Faradej je utvrdio da je veličina elektromotorne sile, indukovane u zatvorenoj konturi, direktno proporcionalna promjeni fluksa kroz konturu, odnosno, formulisao tzv. Faradejev zakon elektromagnetske indukcije,

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} ,$$

- Znak "-" u Faradejevom zakonu kaže da je smjer djelovanja indukovane elektromotorne sile uvijek suprotan promjeni fluksa, odnosno, teži da spriječi promjenu fluksa kroz konturu.
- Cijela pojava da pri vremenskoj promjeni magnetskog fluksa dolazi do indukovanja elektromotorne sile naziva se elektromagnetska indukcija.
- Veliki broj uređaja, od kojih će neki biti detaljnije obrađeni u daljem tekstu, radi na principu elektromagnetske indukcije.

- Tako, na primjer, bez elektromagnetske indukcije ne bi mogli da rade transformatori, obrtni generatori, neki elektromotori, predajne i prijemne radio, televizijske i radarske antene i još mnogo drugih uređaja u elektrotehnici.
- Već samo ovo kratko navođenje uređaja, koji koriste pojavu elektromagnetske indukcije, vrlo jasno ilustruje važnost ove pojave u kompletnoj elektrotehnici i u svakodnevnom životu.



Indukcija magnetskog polja

- Fizička veličina koja opisuje silu kojom deluje magnetsko polje (Amper)
- Igra ulogu sličnu jačini električnog polja
- Izvor magnetskog polja je $(I \cdot l)$
- Magnetsko polje deluje na $(I \cdot l)$
- $(I \cdot l)$ igra ulogu "magnetskog naboja"

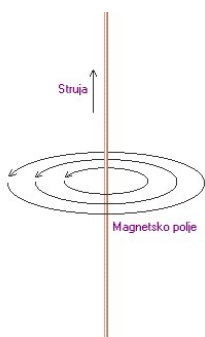
$$E = \frac{F_{el}}{Q_{probno}}$$

$$B = \frac{F_{mag}}{(I \cdot l)_{probno}}$$

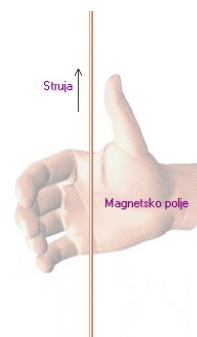
$$[B] = \frac{N}{Am} = T \quad (Tesla)$$

Indukcija magnetskog polja pravolinijskog provodnika

- Eksperimentalno odredio Amper



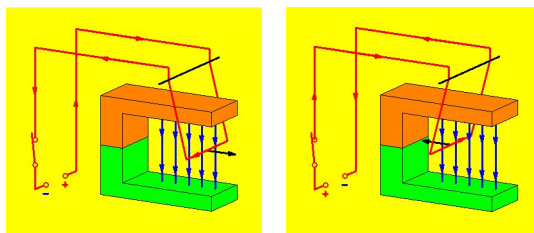
$$B = k' \frac{I}{r}$$



Elektromagnetska sila

- Na provodnik, kao na izvor magnetskog polja, mora da deluje bilo kakvo drugo magnetsko polje (Amper)
- nazvana elektromagnetska, ustvari je ono što je do sada nazivano magnetska sila

$$F = (I \cdot l) \cdot B$$

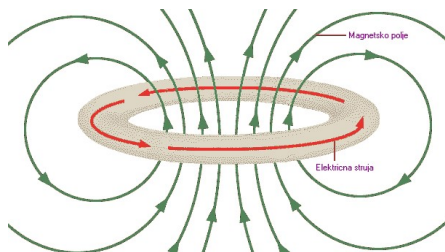


$$\vec{F} = (I \cdot \vec{l}) \times \vec{B}$$

- Elektromagnetska sila ne deluje na provodnik postavljen u pravcu magnetskog polja

Magnetsko polje strujne konture

- Nijedno strujno kolo ne može da se predstavi pravolinijskim provodnikom
- Svako kolo je zatvorena strujna kontura
- Kružna strujna kontura



$$B = \pi k' \frac{I}{r} \quad (\text{na osi konture})$$

Samoindukcija

- Pojava da se u svitku kojim protječe promjenjiva struja inducira napon zbog promjene magnetskog toka vlastite struje u svitku.

$$\frac{d\lambda}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

Samoindukcija - 2

- Iznos induciranog napona je proporcionalan s brzinom promjene struje svitka te s induktivitetom L svitka.
- U SI sustavu induktivitet se mjeri u henrijima (H) prema američkom fizičaru Henriju.
- Svitak ima induktivitet 1 H ako pri linearnoj promjeni struje od 1 A u 1 s inducira napon od 1 V .

ee07_8

165

Magnetski otpor

- Magnetski otpor magnetskog kruga je karakteristika promatranog prostora.
- Magnetski otpor je proporcionalan s duljinom prostora i obrnuto proporcionalan s presjekom prostora te ovisi o magnetskoj permeabilnosti prostora.

ee07_8

166

Magnetska permeabilnost

- Magnetska permeabilnost (specifična magnetska vodljivost) je karakteristika svakog materijala.
- Magnetska permeabilnost se mjeri u SI sustavu u volt sekundama po amper metru (Vs/Am).

ee07_8

167

Magnetska permeabilnost

- Magnetska permeabilnost je produkt apsolutne i relativne permeabilnosti.
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$
- Relativna permeabilnost je bezdimenzionalna konstanta koja pokazuje koliko puta će se povećati magnetski tok u nekom prostoru ako se u njemu nalazi promatrani materijal umjesto vakuuma.

ee07_8

168

Magnetska permeabilnost

- Apsolutna permeabilnost je jedna od fizikalnih konstanti koja određuje strukturu Svemira.
- Relativna permeabilnost kod feromagnetskih materijala može doseći i do 300.000

ee07_8

169

Magnetska uzbuda

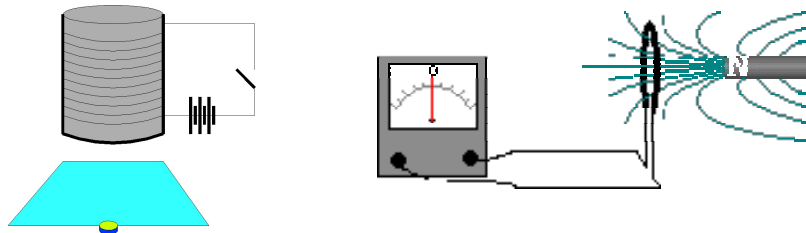
- Magnetska uzbuda H pokazuje mjeru magnetske uzbude prostora.
- H pokazuje koliku će uzbudu dati primijenjena magnetomotorna sila promatrana u nekoj točki ako se uklone utjecaji materijala.

ee07_8

170

Elektromagnetska indukcija

Faradejev zakon



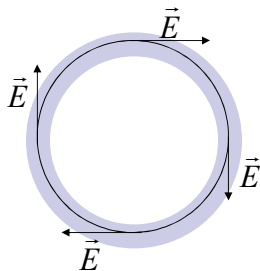
- Promena magnetskog fluksa kroz neku provodnu konturu izaziva električnu struju u toj konturi
- Električnu struju u provodnoj konturi pokreće elektromotorna sila koja nastaje u toj konturi usled promene magnetskog fluksa

Elektromagnetska indukcija je pojava nastajanja elektromotorne sile u promenljivom magnetskom polju

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Elektromotorna sila elektromagnetske indukcije

- Šta je ta elektromotorna sila?
- To je **vrtožno električno** (ne elektrostatičko) polje koje nastaje u celom provodniku
- Polje nije elektrostatičko jer ga ne stvaraju naelektrisanja, već elektromagnetsko
- Nema konzervacije, nema elektrostatičkog potencijala



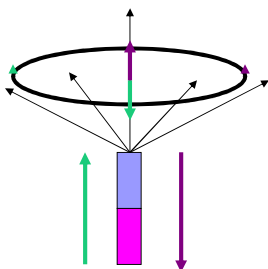
- Ako prekinemo provodnik, onda će se naelektrisanja kretati dok se njihovim nakupljanjem na kraju ne stvori elektrostatičko polje suprotno usmereno od elektromagnetskog, koje će ga poništiti
- Proces staje kada je $u=-e$

Lencovo pravilo

- Određuje smer indukovane elektromotorne sile

Indukovana elektromotorna sila teži da svojim dejstvom poništi uzrok svoga nastanka

- Izraz inercije prirode, odnosno zakona o održanju energije



- Kontura reaguje na promenu magnetskog polja stvaranjem sopstvenog magnetskog polja (indukovane struje)
- Ako se spoljašnji fluks uvećava, indukovani fluks teži da to povećanje anulira (odmaže spoljašnjem polju)
- Ako se spoljašnji fluks umanjuje, indukovani fluks teži da to umanjenje anulira (pomaže spoljašnjem polju)

Statička i dinamička indukcija

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int B \cdot dS \cdot \cos(\vec{B}, d\vec{S})$$

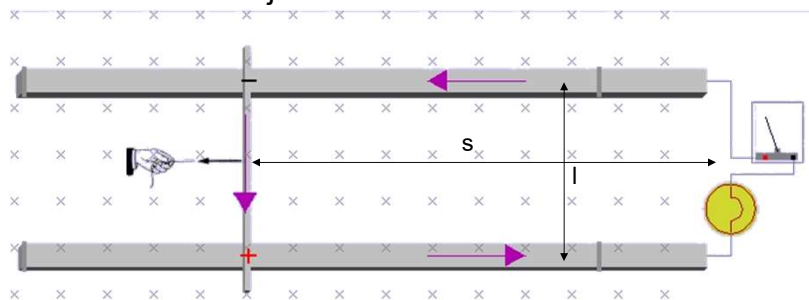
- Promena B \longrightarrow Statička indukcija
- Promena S \longrightarrow Dinamička indukcija
- Promena ugla B i S

Pri statičkoj indukciji se kontura u kojoj se indukuje ems ne kreće



Statička i dinamička indukcija

- Dinamička indukcija

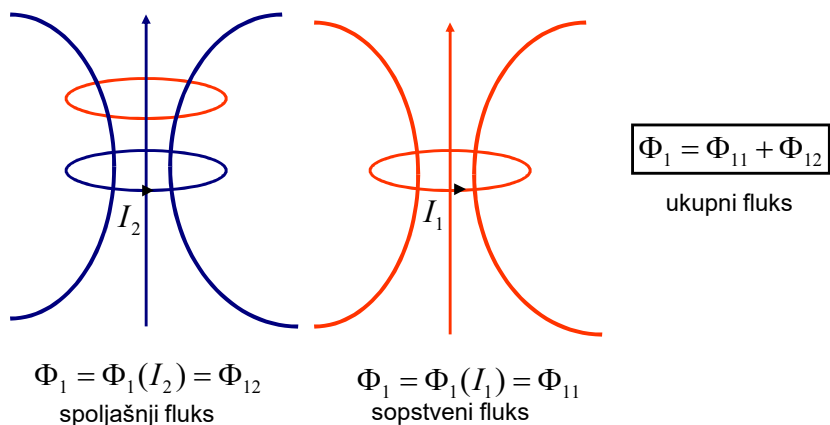


$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(BS)}{dt} = -\frac{d(Bls)}{dt} = -Bl \frac{ds}{dt} = -Blv$$

- U provodniku koji se kreće u magnetskom polju (seče linije magnetskih sila) indukuje se elektromotorna sila

Međusobna indukcija i samoindukcija

- Magnetsko polje koje stvara fluks kroz neku konturu može poticati od drugih kontura, ali može poticati i od struje same konture
 - međusobna indukcija
 - samoindukcija



Međusobna indukcija i samoindukcija

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{d\Phi_{11}}{dt} - \frac{d\Phi_{12}}{dt}$$

↑
 ems samoindukcije

← ems međusobne indukcije

- Samoindukcija je električna inercija
- Ukoliko se pokuša smanjenje jačine struje u nekoj konturi, kontura će sama indukovati ems koja će sprečavati umanjenje
- Ukoliko se pokuša povećanje jačine struje u nekoj konturi, kontura će sama indukovati ems koja će sprečavati povećanje
- Lencovo pravilo

Induktivnost

- Intenzitet magnetskog polja je proporcionalan struji koja ga izaziva
- Fluks magnetskog polja kroz bilo koju konturu u polju je proporcionalan intenzitetu magnetskog polja
- Fluks magnetskog polja kroz bilo koju konturu u polju je proporcionalan jačini struje koja stvara magnetsko polje
- Sopstveni fluks kroz neku konturu proporcionalan je jačini struje koja protiče kroz tu konturu

Induktivnost (ili koeficijent samoindukcije) je količnik sopstvenog fluksa neke konture i jačine struje koja protiče kroz konturu

$$L_1 = \frac{\Phi_{11}}{i_1}$$

$$[L] = \frac{[\Phi]}{[i]} = \frac{Wb}{A} = H$$

$$e_{11} = -\frac{d\Phi_{11}}{dt} = -\frac{d(L_1 i_1)}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt}$$

Induktivnost konture zavisi od njenog oblika i osobina sredine unutar konture

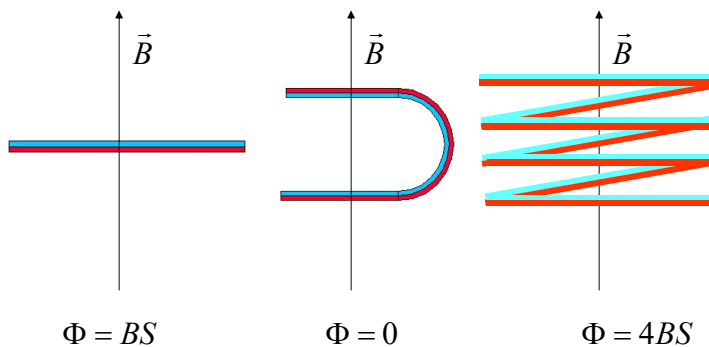
Energija magnetskog polja strujne konture

- Pri povećanju struje u strujnoj konturi stvara se magnetsko polje, suprotstavljajući se ems samoindukcije
- Za stvaranje magnetskog polja mora da se uloži rad, odnosno mora se određena količina energije izvora električne struje pretvoriti u energiju magnetskog polja
- Magnetsko polje strujne konture ima energiju

$$W = \frac{1}{2} L i^2$$

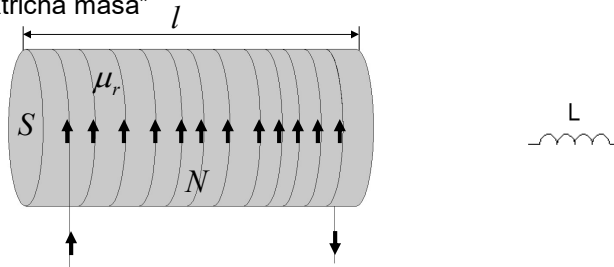
Ukupan fluks kroz konturu

- Povećanje sopstvenog fluksa – povećanje induktivnosti konture
- Fluks pokazuje koliko puta linije magnetskog polja “probadaju” površinu
- Važna caka: jedna linija magnetskog polja može više puta da prođe kroz neku površinu
- Pri računanju ukupnog magnetskog fluksa mora se voditi računa o stranama površine



Kalem

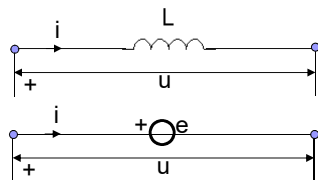
- Električna struktura koja služi nakupljanju magnetske energije u električnom kolu
- Inercijalni element električnih kola – usporivač procesa – nazivaju ga i **prigušnica**
- “Električna masa” l



$$L \approx \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S}{l}$$

- pretpostavke
 - dug kalem
 - gusto motan

Strujno naponska zavisnost kalema

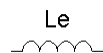


$$u_L = -e = L \frac{di}{dt}$$

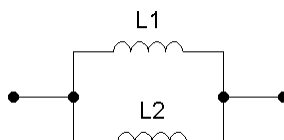
- Ako je struja jednosmerna stacionarna, napon na kalemu je jednak nuli, on je kratak spoj

Vezivanje kalemova

- Fizički veliki element
 - izbegava se njegova primena
 - manja serijska proizvodnja
- Povezivanje
 - redno
 - paralelno



$$L_e = L_1 + L_2$$



$$\frac{1}{L_e} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

Međusobna induktivnost

- Intenzitet magnetskog polja je proporcionalan struji koja ga izaziva
- Fluks magnetskog polja kroz bilo koju konturu u polju je proporcionalan intenzitetu magnetskog polja
- Fluks magnetskog polja kroz bilo koju konturu u polju je proporcionalan jačini struje koja stvara magnetsko polje
- I spoljašnji fluks kroz neku konturu proporcionalan je jačini struje koja stvara taj fluks

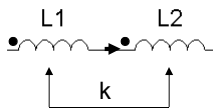
$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_2} \quad [M] = \frac{[\Phi]}{[i]} = \frac{Wb}{A} = H \quad e_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = \frac{d(M_{12}i_2)}{dt} = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$M_{12} = M_{21} = M = k\sqrt{L_1L_2} \quad k - \text{koeficijent sprege}$$

- Međusobna induktivnost dve konture zavisi od
 - oblika kontura
 - sredine u kojoj se konture nalaze
 - međusobnog položaja kontura

Sprezanje kalemova

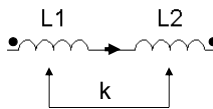
- Međusobni fluks utiče na ukupan fluks, a time i na indukovanu ems u kalemu
- Spoljašnji fluks može da se sabira ($k > 0$) ili poništava ($k < 0$) sa sopstvenim fluksom



$$M = k\sqrt{L_1L_2} \quad k > 0$$

$$u_1 = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = (L_1 + M) \frac{di}{dt} \quad L_e = L_1 + L_2 + 2M$$

$$u_2 = L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = (L_2 + M) \frac{di}{dt}$$



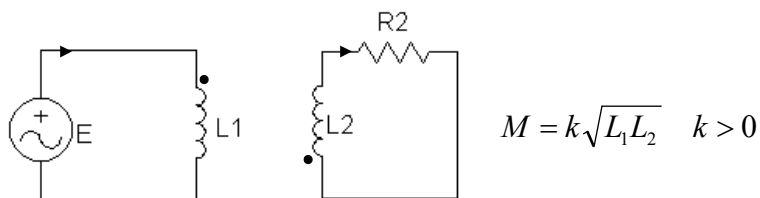
$$M = k\sqrt{L_1L_2} \quad k < 0$$

$$u_1 = L_1 \frac{di}{dt} - |M| \frac{di}{dt} = (L_1 - |M|) \frac{di}{dt} \quad L_e = L_1 + L_2 - 2|M|$$

$$u_2 = L_2 \frac{di}{dt} - |M| \frac{di}{dt} = (L_2 - |M|) \frac{di}{dt}$$

Sprezanje kalemova

- Kalemovi mogu da se nalaze u različitim granama kola
- Kalemovi mogu da se nalaze u različitim kolima (spregnuta kola)



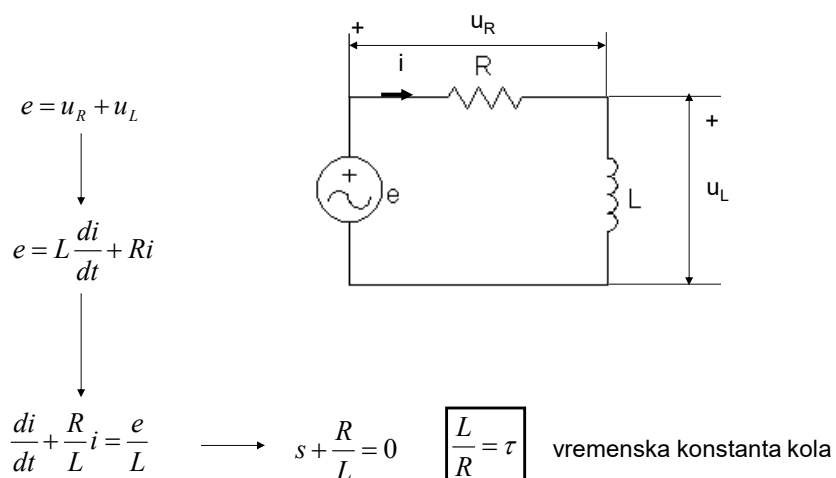
$$E - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = 0 \rightarrow \frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L_1} \left(E - M \frac{di_2}{dt} \right)$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} - R_2 i_2 = 0$$

$$\left(L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right) \frac{di_2}{dt} + \frac{ME}{L_1} - R_2 i_2 = 0$$

R-L kolo

- Kolo sa izvorom, otpornikom i kalemom



$$e = u_R + u_L$$

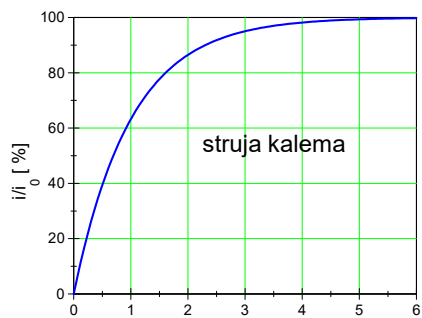
$$e = L \frac{di}{dt} + Ri$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{e}{L} \rightarrow s + \frac{R}{L} = 0 \quad \boxed{\frac{L}{R} = \tau} \text{ vremenska konstanta kola}$$

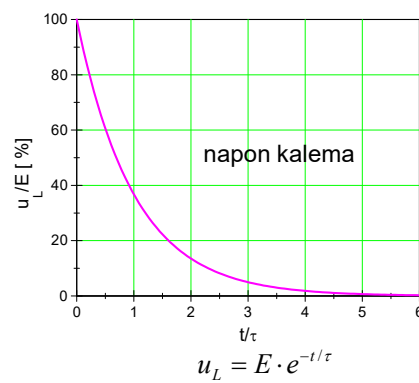
nehomogena linearna DJ prvog reda

RL kolo sa jednosmernim izvorom

- “punjenje” kabela magnetnim poljem



$$i_L = i_{krajnje} - (i_{krajnje} - i_{poc}) \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$

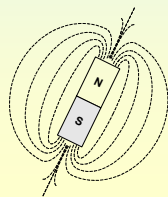


$$u_L = E \cdot e^{-t/\tau}$$

Stranica: V-1

Magnetizam

- Magnetsko polje, indukcija i tok.
- Magnetsko polje ravnog beskonačnog vodiča protjecanog strujom.
- Sila na naboj u magnetskom polju.
- Sila na vodič protjecan strujom u magnetskom polju.
- Zakon protjecanja.
- Biot-Savart -ov zakon.

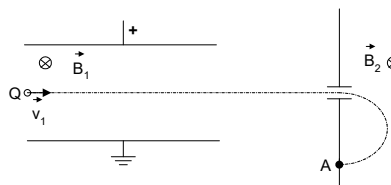


Stranica: V-2

1. zadatak

Mlaz nabijenih čestica ubacuje se u prostor u kojem djeluje električno polje E i magnetska polja indukcija B_1 i B_2 prema slici. Odredite brzinu v_1 i polaritet čestica koje udaraju u točku A. Zadano:

- $E = 140.7$ [MV/m]
- $B_1 = 0.5$ [T]
- $B_2 = 0.16$ [T]


[Početna stranica](#)


Stranica: V-3

Uvodni pojmovi

- Magnetsko polje opisuje se pomoću sljedećih osnovnih veličina:

- Jakost magnetskog polja: \vec{H} [A/m]

- Magnetska indukcija: \vec{B} [T]

- Veza jakosti magnetskog polja i indukcije:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$$

gdje je: $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ [Vs/Am]

- Kada se naboj giba u magnetskom polju tada na njega djeluje magnetska sila:

$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

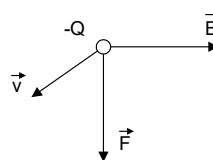
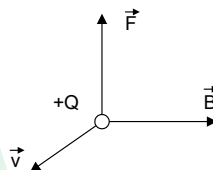
- Q - naboj
- v - brzina gibanja naboja


[Početna stranica](#)


Stranica: V-4

Uvodni pojmovi

- Smjer magnetske sile na naboj definiran je vektorskim produktom brzine i magnetske indukcije:



- Po iznosu sila ovisi o kutu između vektora v i B:

$$|\vec{F}| = Q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha$$

- ukoliko se naboj giba paralelno silnicama magnetskog polja, magnetske sila na naboj je jednaka nuli ($\sin \alpha = 0$)
- ukoliko se naboj giba okomito na silnice magnetskog polja tada je sila po iznosu jednaka: $F = Q \cdot v \cdot B$


[Početna stranica](#)


Stranica: V-5

Rješenje zadatka

- U kondenzatoru na naboj djeluju električna i magnetska sila. Da bi bio zadovoljen uvjet pravocrtnog gibanja te dvije sile po iznosu moraju biti jednake:



$$|\vec{F}_{el}| = |\vec{F}_{mag}|$$

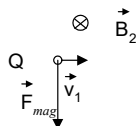
$$Q \cdot E = Q \cdot B_1 \cdot v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{E}{B_1} = \frac{140.7 \cdot 10^6}{0.5}$$

$$v_1 = 281.4 \cdot 10^6 \text{ [m/s]}$$


[Početna stranica](#)


Stranica: V-6

- Kada naboj prijeđe u područje gdje djeluje mag. indukcija B_2 , na njega djeluje samo magnetska sila pomoću čijeg smjera se može odrediti predznak naboja:



- Iz smjera magnetske sile vidljivo je da se radi o negativnom naboju.

$$Q < 0$$


[Početna stranica](#)

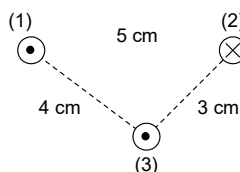

Stranica: V-7

2. zadatak

Tri vrlo duga ravna vodiča smještena u zraku prema slici protjecana su strujama I_1 , I_2 i I_3 . Odredite:

- smjer i veličinu magnetske indukcije koju vodiči (1) i (2) stvaraju na mjestu vodiča (3)
- smjer i veličinu sile koja djeluje na element dužine l vodiča (3)

- $I_1 = 100$ [A]
- $I_2 = 150$ [A]
- $I_3 = 75$ [A]
- $l = 80$ [cm]


[Početna stranica](#)


Stranica: V-8

Uvodni pojmovi

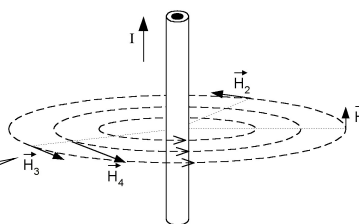
- Označavanje smjerova struje u vodiču:



- Magnetsko polje ravnog vodiča:

$$H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$



Smjer polja određuje se pravilom desne ruke:
palač - smjer struje
prsti - smjer polja


[Početna stranica](#)


Stranica: V-9

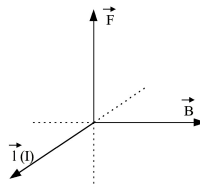
Uvodni pojmovi

- Sila na vodič protječan strujom u magnetskom polju

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B}) \text{ [N]}$$

- Smjer sile određuje se pravilom lijeve ruke:

- silnice (B) - dlan
- struja (I, l) - prsti
- sila (F) - palac



- Iznos sile:

$$F = B \cdot I \cdot l \cdot \sin \alpha \text{ [N]}$$

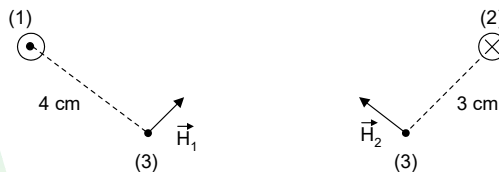
- l je duljina vodiča u magnetskom polju!!!
- kut α je kut koji zatvaraju vektori polja (indukcije) i duljine (smjer struje)
- ukoliko je vodič okomit na silnice magnetskog polja tada je magnetska sila po iznosu jednaka: $F = B \cdot I \cdot l$
- ukoliko je vodič paralelan silnicama magnetskog polja magnetska sila na vodič jednaka je nuli ($\sin \alpha = 0$)


[Početna stranica](#)


Stranica: V-10

Rješenje zadatka

- Zadatak se rješava metodom superpozicije.
- Vodič (1) na mjestu vodiča (3) stvara magnetsko polje H_1 :



- Vodič (2) na mjestu vodiča (3) stvara magnetsko polje H_2 .
- Po iznosu mag. polja:

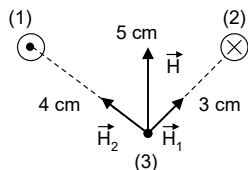
$$H_1 = \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = \frac{100}{2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 4 \text{ [A/cm]}$$

$$H_2 = \frac{I_2}{2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = \frac{150}{2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = 8 \text{ [A/cm]}$$


[Početna stranica](#)


Stranica: V-11

- Ukupno polje na mjestu vodiča (3) jednako je vektorskoj sumi magnetskih polja:



$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$$

- Budući da su vektori H_1 i H_2 pod kutem od 90° vrijedi sljedeće:

$$|\vec{H}| = \sqrt{|\vec{H}_1|^2 + |\vec{H}_2|^2}$$

$$H = \sqrt{4^2 + 8^2} = 9 \text{ [A/cm]}$$

- Kut vektora H u odnosu na vektor H_1 :

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{H}_2|}{|\vec{H}|} = \frac{8}{9} \quad \alpha = 63^\circ$$

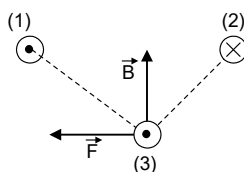
- Magnetska indukcija:

$$B = \mu_0 \cdot H = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{9}{10^{-2}} = 1.13 \text{ [mT]}$$

[Početna stranica](#)


Stranica: V-12

- Smjer sile na vodič (3) određuje se pravilom lijeve ruke:



- Budući da su vodič i smjer vektora magnetskog polja pod 90° , sila iznosi:

$$F = B \cdot I_3 \cdot l = 1.13 \cdot 10^{-3} \cdot 75 \cdot 80 \cdot 10^{-2} = 68 \text{ [mN]}$$

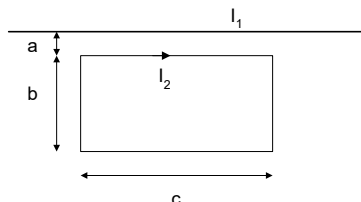

[Početna stranica](#)


Stranica: V-13

3. zadatak

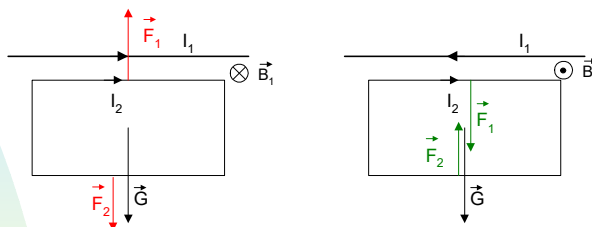
Vrlo dugi ravni vodič i kruti metalni okvir smješteni su prema slici. Okvir ima težinu G . Uz ostale navedene podatke odredite smjer i veličinu struje I_2 uz koju će okvir zadržati zadani položaj. Zadano:

- $G = 0.5$ [N]
- $I_2 = 15$ [A]
- $a = 1$ [cm]
- $b = 10$ [cm]
- $c = 50$ [cm]


[Početna stranica](#)


Stranica: V-14

- Vrlo dugi ravni vodič protjecan strujom stvara mag. polje u svojoj okolini. Za različite smjerove struje I_1 to mag. polje djeluje na okvir silama F_1 i F_2 :



- Da bi okvir ostao u istom položaju ukupan zbroj sila mora biti jednak 0:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} = 0$$

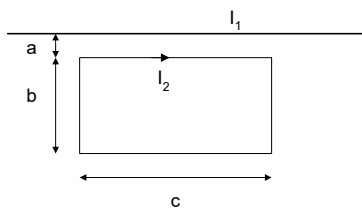
- Budući da je $F_1 > F_2$, to se može postići samo u slučaju kada struja I_2 teče s lijeva na desno (1. slučaj).

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| + |\vec{G}|$$


[Početna stranica](#)


Stranica: V-15

- Sile F_1 i F_2 određuju se kao:



$$F_1 = B_1(a) \cdot I_2 \cdot c = \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot I_2 \cdot c$$

$$F_2 = B_1(a+b) \cdot I_2 \cdot c = \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot (a+b)} \cdot I_2 \cdot c$$

- Iz uvjeta ravnoteže okvira određuje se iznos struje I_1 :

$$\mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot I_2 \cdot c = \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot (a+b)} \cdot I_2 \cdot c + G$$

$$I_1 = \frac{G \cdot 2 \cdot \pi \cdot a \cdot (a+b)}{I_2 \cdot \mu_0 \cdot c \cdot b} = \frac{0.5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot (1+10)}{15 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 10} = 3.7 \text{ [kA]}$$

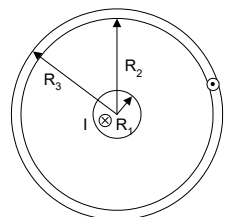

[Početna stranica](#)


Stranica: V-16

4. zadatak

Odredite veličinu struje koja teče kroz vodiče koaksijalnog kabela u suprotnim smjerovima, ako jakost magnetskog polja na udaljenosti d od središta kabela iznosi H_d . Također odredite funkciju promjene magnetskog polja, $H(r)$ za $0 < r < \infty$. Zadano:

- $R_1 = 0.5 \text{ [cm]}$
- $R_2 = 2.5 \text{ [cm]}$
- $R_3 = 2.6 \text{ [cm]}$
- $d = 2.55 \text{ [cm]}$
- $H_d = 78.8 \text{ [A/m]}$


[Početna stranica](#)


Stranica: V-17

Rješenje zadatka

- Zadatak se rješava primjenom zakona protjecanja.

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I_i$$

- Mag. polje se mijenja različito u četiri slučaja:

- Za $r < R_1$, obuhvaćen je samo dio unutarnjeg vodiča:

$$H \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = I'$$

Gustoća struje u svakoj točki je jednaka.

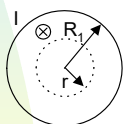
$$G = \frac{I}{R_1^2 \cdot \pi} = \frac{I'}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow I' = r^2 \cdot \frac{I}{R_1^2}$$

$$H = \frac{I'}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{I \cdot \frac{r^2}{R_1^2}}{2 \cdot r \cdot \pi} = I \cdot \frac{r}{2 \cdot \pi \cdot R_1^2}$$

- Za $R_1 < r < R_2$, linijom l obuhvaćen je vodič kroz koji teče struja I pa mag. polje iznosi:

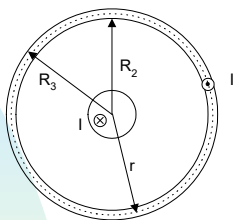
$$H \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = I \Rightarrow H = \frac{I}{2 \cdot r \cdot \pi}$$

[Početna stranica](#)



Stranica: V-18

- Za $R_2 < r < R_3$, obuhvaćen je unutrašnji vodič i dio vanjskog vodiča:



$$H \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = I - I''$$

Budući da su smjerovi struja suprotni njihovi doprinosi se oduzimaju.

$$G = \frac{I}{R_3^2 \cdot \pi - R_2^2 \cdot \pi} = \frac{I''}{r^2 \cdot \pi - R_2^2 \cdot \pi}$$

$$I'' = I \cdot \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

$$H = \frac{I}{2 \cdot r \cdot \pi} \left(1 + \frac{R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) - \frac{I}{2 \cdot (R_3^2 - R_2^2) \cdot \pi} \cdot r$$

- Za $r > R_3$:

$$H \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = I - I$$

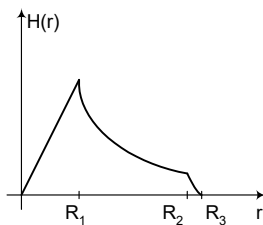
$$H = 0$$

[Početna stranica](#)



Stranica: V-19

- Funkcija promjene jakosti mag. polja izgleda kao na slici:



- Iz zadanog mag. polja na mjestu $r = d$ može se odrediti struja I :

$$H_d = H(r = d) = \frac{I}{2 \cdot d \cdot \pi} \left(1 + \frac{R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) - \frac{I}{2 \cdot (R_3^2 - R_2^2) \cdot \pi} \cdot d$$

$$I = \frac{2 \cdot \pi \cdot H_d \cdot (R_3^2 - R_2^2) \cdot d}{R_3^2 - d^2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 78.8 \cdot (2.6^2 - 2.5^2) \cdot 2.55 \cdot 10^{-2}}{2.6^2 - 2.55^2}$$

$$I = 25 \text{ [A]}$$

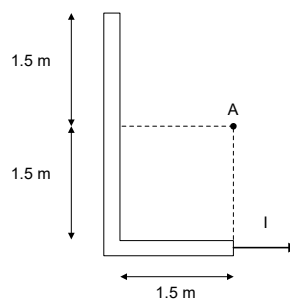

[Početna stranica](#)


Stranica: V-20

5. zadatak

Kroz vodič u obliku L profila protječe struja I . Dimenzije vodiča su zadane na slici. Odredite smjer i jakost magnetske indukcije u točki A. Zadano:

- $I = 50 \text{ [A]}$


[Početna stranica](#)


Stranica: V-21

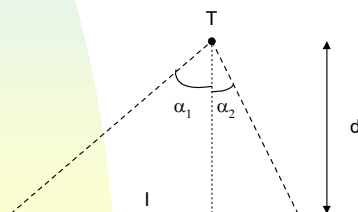
Uvodni pojmovi

- Ravni vodič konačne duljine kroz koji protječe struja I u svojoj okolini stvara magnetsko polje koje se može odrediti na sljedeći način:

$$H_T = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)$$

Smjer magnetskog polja definiran je pravilom desnog vijka.

- Primjeri:



$$H_T = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)$$

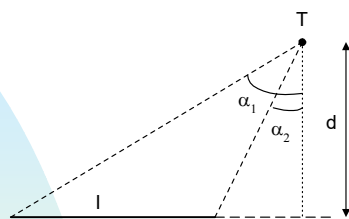
$$\alpha_1 > 0 \Rightarrow \sin \alpha_1 > 0$$

$$\alpha_2 < 0 \Rightarrow \sin \alpha_2 < 0$$


[Početna stranica](#)


Stranica: V-22

Uvodni pojmovi

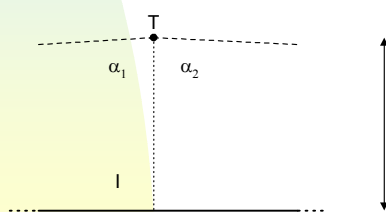


$$H_T = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)$$

$$\alpha_1 > 0 \Rightarrow \sin \alpha_1 > 0$$

$$\alpha_2 > 0 \Rightarrow \sin \alpha_2 > 0$$

- Beskonačno dugi ravni vodič :



$$H_T = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)$$

$$\alpha_1 \rightarrow +90^\circ \quad \alpha_2 \rightarrow -90^\circ$$

$$H_T = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot (\sin 90^\circ - \sin(-90^\circ))$$

$$H_T = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot (1 - (-1)) = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot d}$$


[Početna stranica](#)

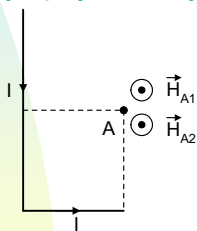

Stranica: V-23

Rješenje zadatka

- Polje u točki stvaraju dva vodiča jedan dužine 3 m, a drugi dužine 1.5 m. Ukupno polje jednako je vektorskom zbroju pojedinih komponenti polja:

$$\vec{H}_A = \vec{H}_{A1} + \vec{H}_{A2}$$

- Smjer polja određujemo pomoću pravila desnog vijka:



Budući da su polja istog smjera, ukupno polje jednako je algebarskom zbroju polja:

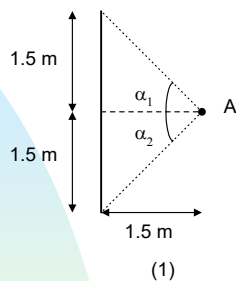
$$H_A = H_{A1} + H_{A2}$$

- Primjenom Biot-Savart-ovog zakona određuju se iznosi polja H_{A1} , odnosno polja H_{A2} .


[Početna stranica](#)


Stranica: V-24

- Polje H_{A1} :



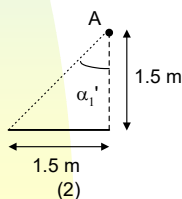
$$H_{A1} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1.5} \cdot (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)$$

$$H_{A1} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1.5} \cdot (\sin(+45^\circ) - \sin(-45^\circ))$$

$$H_{A1} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1.5} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)$$

$$H_{A1} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1.5} \cdot \sqrt{2}$$

- Polje H_{A2} :



$$H_{A2} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1.5} \cdot (\sin \alpha_1' - \sin \alpha_2')$$

$$H_{A2} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1.5} \cdot (\sin(+45^\circ) - \sin(0^\circ))$$

$$H_{A2} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1.5} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - (0) \right)$$

$$H_{A2} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1.5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$


[Početna stranica](#)


Stranica: V-25

- Ukupno polje H_A :

$$H_A = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1.5} \cdot \sqrt{2} + \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1.5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$H_A = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1.5} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}$$

- Magnetska indukcija u točki A, B_A :

$$B_A = \mu_0 \cdot H_A = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{50}{4 \cdot \pi \cdot 1.5} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$B_A = 5\sqrt{2} [\mu\text{T}]$$

- Smjer vektora mag. indukcije jednak je smjeru mag. polja.

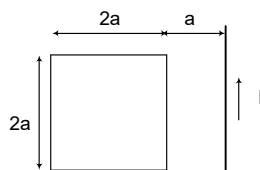

[Početna stranica](#)


Stranica: V-26

6. zadatak

Odredite magnetski tok koji se zatvara kroz zatvorenu petlju prikazanu na slici. Zadano:

- $a = 1 [\text{cm}]$
- $I = 10 [\text{A}]$


[Početna stranica](#)


Stranica: V-27

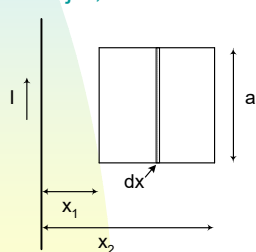
Uvodni pojmovi

- Magnetski tok je skalarna veličina kojom se opisuje magnetsko polje i definiran je kao:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

$$\Phi = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{S} \cdot d\vec{B}$$

- Primjer, tok kroz zatvorenu petlju:



$$\Phi = \oiint_S \vec{B}(x) \cdot d\vec{S} = \int_{x_1}^{x_2} B(x) \cdot a \cdot dx$$

$$\Phi = \int_{x_1}^{x_2} \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot x} \cdot a \cdot dx = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot a}{2 \cdot \pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x}$$

$$\Phi = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot a}{2 \cdot \pi} \cdot \ln x \Big|_{x_1}^{x_2}$$

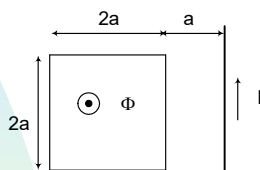
$$\Phi = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot a}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{x_2}{x_1}$$

[Početna stranica](#)


Stranica: V-28

Rješenje zadatka

- Smjer magnetskog toka određuje se pravilom desnog vijka:



Palac se stavlja u smjer struje kroz vodič i tada prsti određuju smjer magnetskog toka.

- Iznos toka:

$$\Phi = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot 2 \cdot a}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{x_2}{x_1} = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot 2 \cdot a}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{3a}{a} = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot a}{\pi} \cdot \ln 3$$

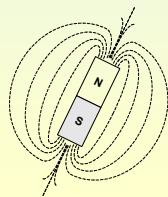
$$\Phi = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{10 \cdot 10^{-2}}{\pi} \cdot \ln 3 = 44 \text{ [nVs]}$$


[Početna stranica](#)


Stranica: VI-1

Magnetizam

- Kretanje vodiča u magnetskom polju.
- Elektromagnetska indukcija. Samoindukcija. Međui indukcija.
- Induktivitet. Međui induktivitet.
- Energija magnetskog polja.



Stranica: VI-2

1. zadatak

U homogenom magnetskom polju između polova trajnog magneta gustoće magnetskog toka (magnetske indukcije) 0.5 [T] giba se vodič duljine 50 [cm] brzinom od 30 [m/s] u smjeru

- a) okomitom na silnice magnetskog polja,
- b) pod kutem od 45 stupnjeva u odnosu na silnice magnetskog polja.

Potrebno je odrediti polaritet i iznos napona koji se na njemu inducira. Za prvi slučaj odredite kolika bi se snaga trošila na otporu R koji je spojen na vodič. Zadano:

- $B = 0.5 \text{ [T]}$
- $l_{\text{vodiča}} = 50 \text{ [cm]}$
- $v = 30 \text{ [m/s]}$
- $R = 10 \text{ [}\Omega\text{]}$



Početna stranica



Stranica: VI-3

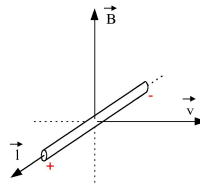
Uvodni pojmovi

- Inducirani napon u vodiču koji se giba u magnetskom polju (napon pomicanja):

$$e = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{l} \text{ [V]}$$

- Smjer induciranog napona određuje se pravilom lijeve ruke:

- silnice (B) - dlan
- gibanje (v) - prsti
- polaritet/smjer napona (e) - palac



- Iznos napona:

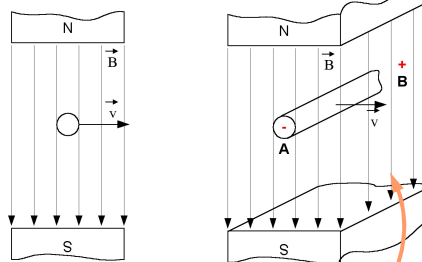
$$e = B \cdot l \cdot v \cdot \sin(\alpha) \text{ [V]}$$

- l je duljina vodiča u magnetskom polju!!!
- kut α je kut koji zatvaraju vektori polja (indukcije) i brzine (samo komponenta brzine okomita na polje stvara napon)

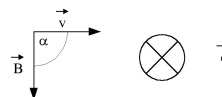

[Početna stranica](#)


Stranica: VI-4

Vodič okomit na silnice



- Polaritet napona - pravilo lijeve ruke:



- Iznos induciranog napona:

$$e = B \cdot l \cdot v \cdot \sin(\alpha) = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 30 \cdot \sin(90^\circ)$$

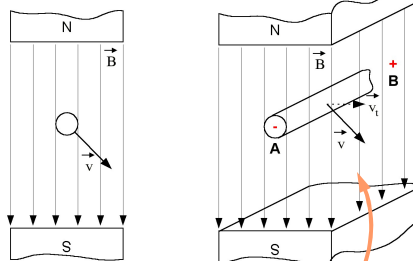
$$e = 7.5 \text{ [V]}$$

$$U_{BA} = 7.5 \text{ [V]} \text{ (B} \Rightarrow \text{+, A} \Rightarrow \text{-)}$$


[Početna stranica](#)


Stranica: VI-5

Vodič pod kutem od 45°



- Polaritet napona - pravilo lijeve ruke:



- Iznos induciranog napona:

$$e = B \cdot l \cdot v \cdot \sin(\alpha) = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 30 \cdot \sin(45^\circ)$$

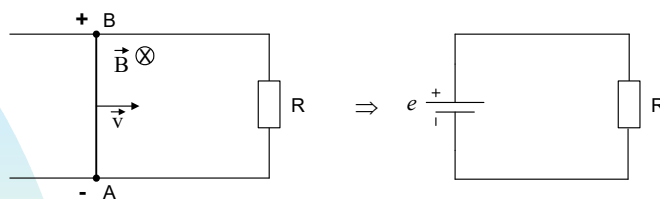
$$e = 5.3 \text{ [V]}$$

$$U_{BA} = 5.3 \text{ [V]} \text{ (B } \Rightarrow \text{ +, A } \Rightarrow \text{ -)}$$

[Početna stranica](#)


Stranica: VI-6

- Priključivanjem otpora na vodič dobivamo sljedeći sustav:



- Snaga na otporu:

$$P_R = \frac{e^2}{R} = \frac{7.5^2}{10} = 5.6 \text{ [W]}$$

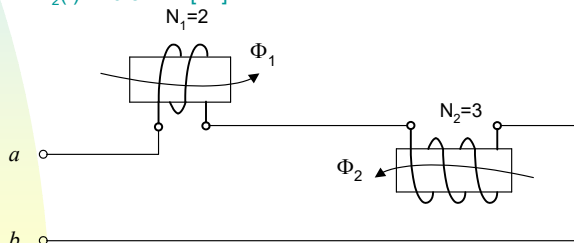
[Početna stranica](#)


Stranica: VI-7

2. zadatak

Na slici su nacrtane dvije zavojnice s dva odnosno tri zavoja, kroz koje prolaze vremenski promjenjivi magnetski tokovi. Vremenska promjena tokova postignuta je izvorima koji na slici nisu nacrtani. Koliki se napon $u_{ab}(t)$ inducira između stezaljki a i b u vremenskom intervalu $0 < t < 6$ [s]. Grafički prikazati napon za dani vremenski interval. Odredite napon u trenutku $t = 1$ [s].

- $\Phi_1(t) = 0.2 \cdot t^2 + 1$ [Vs]
- $\Phi_2(t) = -0.5 \cdot t + 4$ [Vs]



Početna stranica



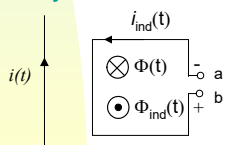
Stranica: VI-8

Uvodni pojmovi

- Elektromagnetska indukcija je pojava da se u zatvorenom zavoju stvara ili inducira napon ako se mijenja magnetski tok što ga obuhvaća zavoj.
- Smjer induciranog napona definiran je Lenzovim zakonom:
 - smjer induciranog napona je uvijek takav da se od tog napona stvorena struja svojim magnetskim učinkom protiv **vremenskoj** promjeni magnetskog toka zbog kojega je došlo do induciranja napona.

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}; \quad e = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

- Primjer:



- ako $i(t)$ raste tada i tok $\Phi(t)$, prikazanog smjera, raste
- inducirani tok, $\Phi_{ind}(t)$ suprotnog je smjera
- taj tok je stvorila inducirana struja, $i_{ind}(t)$ čiji je smjer određen pravilom desnog vijka
- tu struju je stvorio inducirani napon prikazanog polariteta; $u_{ab}(t) < 0$



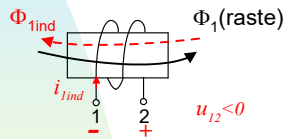
Početna stranica



Stranica: VI-9

Rješenje zadatka

- Napon $u_{ab}(t)$ jednak je algebarskom zbroju induciranih napona na prvoj i drugoj zavojnici.
- Polaritet napona na stezaljkama prve zavojnice određuje se na sljedeći način:



- budući da Φ_1 raste, inducirani tok Φ_{1ind} je suprotnog smjera
- takav tok je stvorila inducirana struja, smjera prikazana na slici
- zbog toga je inducirani napon u_{12} prikazanog polariteta

- Po iznosu napon $u_{12}(t)$:

$$\Phi_1(t) = 0.2 \cdot t^2 + 1 \text{ [Vs]}$$

$$|u_{12}(t)| = \left| N_1 \frac{d\Phi_1(t)}{dt} \right| = N_1 \cdot \left| \frac{d(0.2 \cdot t^2 + 1)}{dt} \right|$$

$$|u_{12}(t)| = N_1 \cdot 0.4 \cdot t = 2 \cdot 0.2 \cdot t = 0.8 \cdot t \text{ [V]}$$

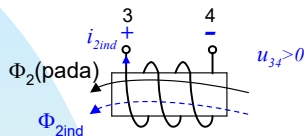


Početna stranica



Stranica: VI-10

- Polaritet napona na stezaljkama druge zavojnice određuje se na sljedeći način:



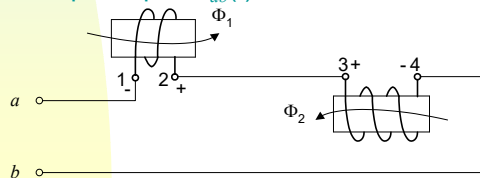
- budući da Φ_2 pada, inducirani tok Φ_{2ind} je istog smjera
- takav tok je stvorila inducirana struja prikazana na slici
- zbog toga je inducirani napon u_{34} prikazanog polariteta

- Po iznosu napon $u_{34}(t)$:

$$\Phi_2(t) = -0.5 \cdot t + 4 \text{ [Vs]}$$

$$|u_{34}(t)| = \left| N_2 \frac{d\Phi_2(t)}{dt} \right| = N_2 \cdot \left| \frac{d(-0.5 \cdot t + 4)}{dt} \right| = N_2 \cdot 0.5 = 3 \cdot 0.5 = 1.5 \text{ [V]}$$

- Ukupni napon $u_{ab}(t)$:



$$u_{ab}(t) = u_{12}(t) + u_{34}(t)$$

$$u_{ab}(t) = -|u_{12}(t)| + |u_{34}(t)|$$



Početna stranica



Stranica: VI-11

- Napon $u_{ab}(t)$:

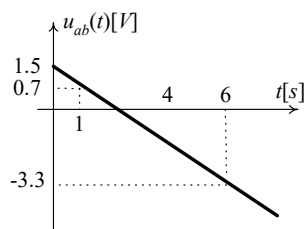
$$u_{ab}(t) = -|u_{12}(t)| + |u_{34}(t)|$$

$$u_{ab}(t) = -0.8 \cdot t + 1.5 \text{ [V]}$$

- U trenutku $t = 1 \text{ [s]}$:

$$u_{ab}(t=1\text{[s]}) = -0.8 \cdot 1 + 1.5 = 0.7 \text{ [V]}$$

- Graf promjene napona:

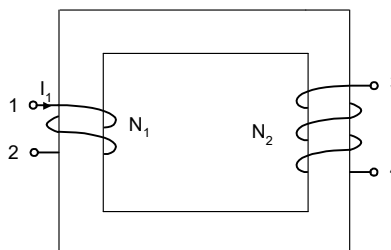

[Početna stranica](#)


Stranica: VI-12

3. zadatak

Dvije zavojnice imaju faktor magnetske veze k . Prva zavojnica ima N_1 zavoja. Pri struji I_1 kroz prvu zavojnicu stvara se tok Φ_1 . Ako se struja prve zavojnice linearno smanji na nulu u vremenu 2 [ms] u drugoj zavojnici se inducira napon 63.75 [V]. Jezgra je od neferomagnetskog materijala. Odredite induktivitet prve i druge zavojnice, međuinduktivitet, broj zavoja druge zavojnice, napon samoindukcije te nacrtajte nadomjesnu shemu.

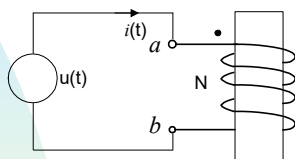
- $k = 0.85$
- $N_1 = 250$ [zavoja]
- $I_1 = 2$ [A]
- $\Phi_1 = 0.3$ [mVs]


[Početna stranica](#)


Stranica: VI-13

Uvodni pojmovi

- **Samoindukcija** je pojava da se u samom svitku kroz koji prolazi **vremenski** promjenjiva struja inducira napon samoindukcije zbog promjenjivog toka Φ što ga je proizvela vlastita struja tog svitka.



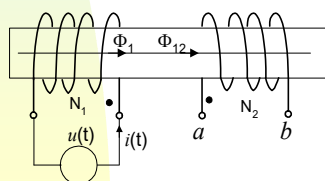
$$u_{ab} = N \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Psi}{dt}$$

$$u_{ab} = L \frac{di}{dt}$$

stezaljka označena s točkom

i(t) ulazi u stezaljku označenu s točkom

- **Međuindukcija** je pojava da se zbog promjene jakosti struje u jednom (primarnom) svitku inducira napon u nekom drugom (sekundarnom) svitku.



$$u_{ab} = N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = \frac{d\Psi_{12}}{dt}$$

$$u_{ab} = M \frac{di}{dt}$$

stezaljka označena s točkom (2. zavojnica)

i(t) ulazi u stezaljku označenu s točkom (1. zavojnica)

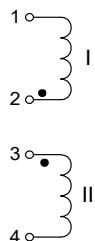
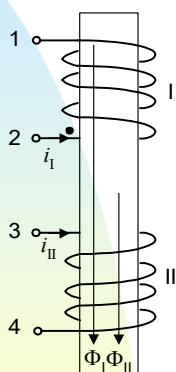
Početna stranica



Stranica: VI-14

Uvodni pojmovi

- **Simboličko označavanje smjera namatanja zavojnice:**



- Proizvoljno odaberemo stezaljku na prvoj zavojnici uz koju postavimo točku (to može biti stezaljka 1 ili 2).
- "U mislima" propustimo struju i_I da poteče zavojnicom i to tako da ona *ulazi* u stezaljku označenu s točkom.
- Odredimo smjer toka Φ_I koje stvara zamišljena struja i_I .
- Na drugoj zavojnici tražimo onu stezaljku u koju mora ulaziti struja i_{II} po kriteriju da zamišljene struje kroz zavojnicu I i II daju tokove *istog* smjera. Tu stezaljku na drugoj zavojnici označavamo s točkom.

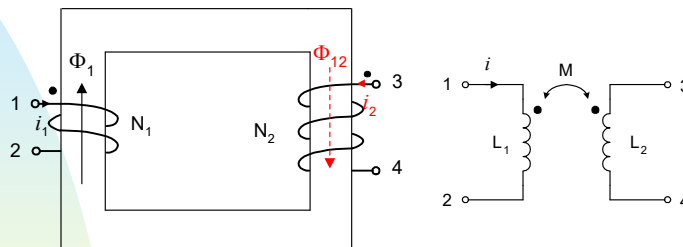
Početna stranica



Stranica: VI-15

Rješenje zadatka

- Nadomjesna shema određuje se na prethodno opisani način:



- Za prikazanu nadomjesnu shemu vrijedi:

$$u_{34} = M \frac{di}{dt}$$

$$u_{12} = L_1 \frac{di}{dt}$$


[Početna stranica](#)


Stranica: VI-16

- Određivanje L_1 :

$$L_1 = \frac{N_1 \cdot \Phi_1}{I_1} = \frac{250 \cdot 3 \cdot 10^{-4}}{2} = 37.5 \text{ [mH]}$$

- Određivanje M :

$$|u_{34}| = \left| M \frac{di_1}{dt} \right| = 63.75 \text{ [V]}$$

$$M = \frac{|u_{34}|}{\frac{di_1}{dt}} = \frac{|u_{34}|}{\frac{\Delta I_1}{\Delta t}} = \frac{|63.75|}{\frac{0-2}{2 \cdot 10^{-3} - 0}} = 63.75 \text{ [mH]}$$

- Određivanje L_2 :

$$M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} \Rightarrow L_2 = \frac{M^2}{k^2 \cdot L_1} = 150 \text{ [mH]}$$

- Određivanje N_2 :

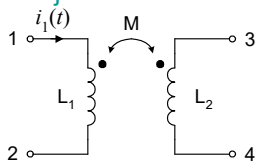
$$M = \frac{N_2 \cdot \Phi_{12}}{I_1} = \frac{N_2 \cdot k \cdot \Phi_1}{I_1} \Rightarrow N_2 = \frac{M \cdot I_1}{k \cdot \Phi_1}$$

$$N_2 = \frac{63.75 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{0.85 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 500 \text{ [zavoja]}$$


[Početna stranica](#)


Stranica: VI-17

- Za vrijeme smanjivanja struje I_1 na nulu tada će se na prvoj zavojnici inducirati napon samoindukcije, a na drugoj zavojnici (budući da je međuinaktivno vezana) napon međuinaktivacije.



- Struja $i_1(t)$:

$$i_1(t) = -10^3 \cdot t + 2 \text{ [A]}$$

- Napon samoindukcije u_{12} :

$$u_{12} = L_1 \frac{di_1}{dt} = 37.5 \cdot 10^{-3} \cdot (-10^3 + 0) = -37.5 \text{ [V]}$$

- Napon međuinaktivacije u_{34} :

$$u_{34} = M \frac{di_1}{dt} = 63.75 \cdot 10^{-3} \cdot (-10^3 + 0) = -63.75 \text{ [V]}$$



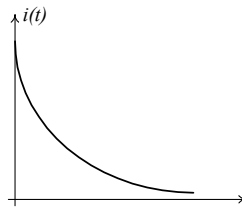
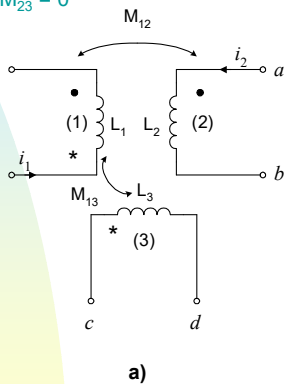
Početna stranica



Stranica: VI-18

4. zadatak

Odredite napone $u_{ab}(t)$ i $u_{cd}(t)$ ako je vremenska promjena struja $i_1(t)$ i $i_2(t)$ jednaka i zadana prema slici b). Zadano: $L_1 = L_2 = L_3 = M_{12} = M_{13}$; $M_{23} = 0$



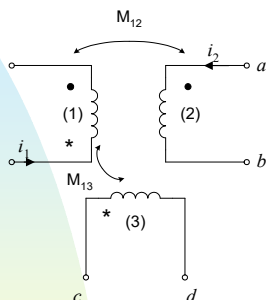
Početna stranica



Stranica: VI-19

Rješenje zadatka

- Napon u_{ab} stvara struja i_2 protječući kroz zavojnicu (2) i struja i_1 protječući zavojnicom (1):



$$u_{ab}(t) = u_{abL2}(t) + u_{abM12}(t)$$

Uvažavajući smjer i promjenu struja i_1 i i_2 te označene referentne točke vrijedi:

Napon samoindukcije:

$$u_{abL2}(t) = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt}$$

Napon međuinukcije:

$$u_{baM12}(t) = M_{12} \cdot \frac{di_1}{dt} \Rightarrow u_{abM12}(t) = -M_{12} \cdot \frac{di_1}{dt}$$

$$u_{ab}(t) = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} - M_{12} \cdot \frac{di_1}{dt} = 0$$

- Napon u_{cd} stvara samo struja i_1 protječući kroz zavojnicu (1) ($M_{23} = 0$ i kroz zavojnicu (3) ne teče struja):

$$u_{cd}(t) = M_{13} \cdot \frac{di_1}{dt} < 0$$


[Početna stranica](#)


Stranica: VI-20

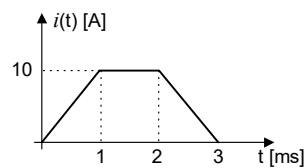
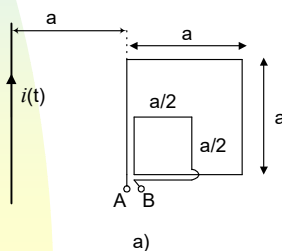
5. zadatak

U istoj ravnini s dugim vodičem nalazi se vodljiva petlja položaja i dimenzija prema slici a). Struja koja teče kroz ravni vodič mijenja se kao što je prikazano na slici b). Odredite:

- međuinuktivitet M ,
- napon $u_{AB}(t)$.

Zadano:

- $a = 0.1$ [m]


[Početna stranica](#)


Stranica: VI-21

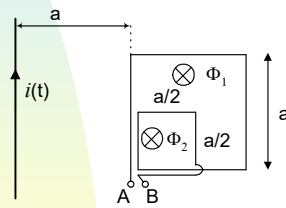
Rješenje zadatka

- Međuinduktivitet se određuje kao:

$$M = \frac{\Phi}{i}$$

Φ - tok koji se zatvara kroz zadanu petlju
 i - struja koja je uzrokovala taj tok

- Da bi se odredio međuinduktivitet mora se prvo odrediti ukupni tok. Tok se zatvara kroz dvije petlje i istoga je smjera. Ukupni tok jednak je:



$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\Phi_1 = \mu_0 \cdot \frac{i \cdot a}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{2a}{a}$$

$$\Phi_2 = \mu_0 \cdot \frac{i \cdot a}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{3a}{a}$$

$$\Phi = \mu_0 \cdot \frac{i \cdot a}{2 \cdot \pi} \cdot \ln 2 + \mu_0 \cdot \frac{i \cdot a}{4 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{3}{2} = \mu_0 \cdot \frac{i \cdot a}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \right)$$

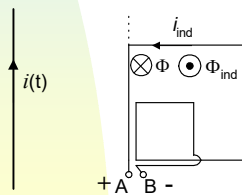

[Početna stranica](#)


Stranica: VI-22

- Međuinduktivitet onda iznosi:

$$M = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 \cdot \frac{i \cdot a}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \sqrt{6}}{i} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{0.1}{2 \cdot \pi} \cdot 0.895 = 18 \text{ [nH]}$$

- Polaritet napona u_{ab} određuje se Lenzovim pravilom, a iznos napona jednak je derivaciji toka po vremenu.
- Budući da je jedina veličina koja se mijenja u vremenu struja, o njenom obliku će ovisiti i inducirani napon u_{AB} .
- U vremenu $0 < t < 1$ [ms] struja $i(t)$ raste:



$$i(t) = 10^4 \cdot t \text{ [A]}$$

$$i \uparrow \Rightarrow \Phi \uparrow$$

$$|u_{ab}(t)| = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\left(\mu_0 \cdot \frac{i(t) \cdot a}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \sqrt{6}\right)}{dt}$$

$$|u_{ab}(t)| = \mu_0 \cdot \frac{a}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \sqrt{6} \cdot \frac{di}{dt} = \mu_0 \cdot \frac{a}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \sqrt{6} \cdot 10^4$$


[Početna stranica](#)


Stranica: VI-23

- Napon $u_{AB}(t)$ je za $0 < t < 1$ [ms] konstantan i iznosi:

$$|u_{AB}(t)| = \mu_0 \cdot \frac{a}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \sqrt{6} \cdot 10^4 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{0.1}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \sqrt{6} \cdot 10^4 = 180 [\mu V]$$

odnosno,

$$u_{AB}(t) = +180 [\mu V]$$

- Za 1 [ms] $< t < 2$ [ms] struja je konstantna pa je napon $u_{AB}(t)$:

$$u_{AB}(t) = 0$$

- U vremenu 2 [ms] $< t < 3$ [ms] struja $i(t)$ pada:

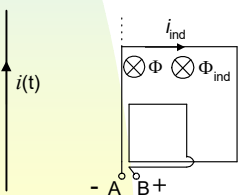
$$i(t) = -10^4 \cdot t + 30 [\text{A}]$$

$$i \downarrow \Rightarrow \Phi \downarrow$$

$$|u_{ab}(t)| = \mu_0 \cdot \frac{a}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \sqrt{6} \cdot \frac{di}{dt} = \mu_0 \cdot \frac{a}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \sqrt{6} \cdot |-10^4|$$

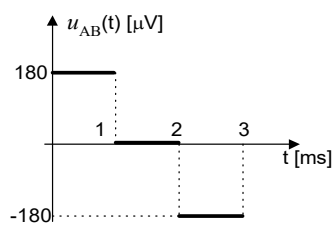
$$|u_{AB}(t)| = 180 [\mu V]$$

$$u_{AB}(t) = -180 [\mu V]$$


[Početna stranica](#)


Stranica: VI-24

- Napon $u_{AB}(t)$ za $0 < t < 3$ [ms] izgleda kao na grafu:

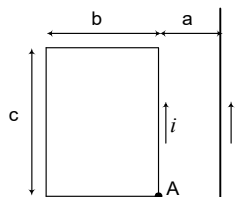

[Početna stranica](#)


Stranica: VI-25

6. zadatak

Tanka zavojnica pravokutnog presjeka s N zavoja nalazi se u magnetskom polju ravnog dugog vodiča. Odredite promjenu energije ukupnog magnetskog polja sistema ako zavojnicu zarotiramo oko točke A za 90° suprotno od smjera kazaljke na satu. Sistem se nalazi u zraku, a zavojnica je u ravnini s vodičem. Zadano:

- $a = 10$ [cm]
- $b = 20$ [cm]
- $c = 30$ [cm]
- $I = 10$ [kA]
- $i = 0.5$ [A]
- $N = 50$ [zavoja]



Početna stranica



Stranica: VI-26

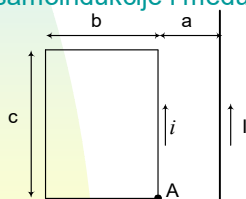
Rješenje zadatka

- Ukupna energija magnetskog polja sistema definirana je kao:

$$W = \frac{L_1 \cdot I_1^2}{2} + \frac{L_2 \cdot i^2}{2} \pm M \cdot I_1 \cdot i$$

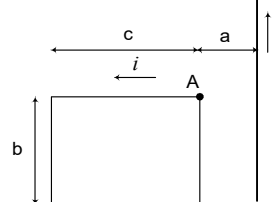
\pm predznak ovisi o tome da li su tok samoindukcije i tok međuindukcije istog smjer ili ne

- Za prikazani sistem, za prvi i drugi slučaj, smjerovi toka samoindukcije i međuindukcije su isti.



$$W_1 = \frac{L_1 \cdot I^2}{2} + \frac{L_2 \cdot i^2}{2} + M_1 \cdot I \cdot i$$

$$W_2 = \frac{L_1 \cdot I^2}{2} + \frac{L_2 \cdot i^2}{2} + M_2 \cdot I \cdot i$$



Početna stranica



Stranica: VI-27

- Razlika energija definirana je kao:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{L_1 \cdot I^2}{2} + \frac{L_2 \cdot i^2}{2} + M_2 \cdot I \cdot i - \frac{L_1 \cdot I^2}{2} - \frac{L_2 \cdot i^2}{2} - M_1 \cdot I \cdot i$$

$$\Delta W = M_2 \cdot I \cdot i - M_1 \cdot I \cdot i$$

- Međuinaktiviteti u prvom i drugom slučaju:

$$M_1 = \frac{N \cdot \Phi_1}{I} = \frac{N \cdot \mu_0 \cdot \frac{I \cdot c}{2 \cdot \pi} \ln \frac{a+b}{a}}{I} = N \cdot \mu_0 \cdot \frac{c}{2 \cdot \pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$M_2 = \frac{N \cdot \Phi_2}{I} = \frac{N \cdot \mu_0 \cdot \frac{I \cdot b}{2 \cdot \pi} \ln \frac{a+c}{a}}{I} = N \cdot \mu_0 \cdot \frac{b}{2 \cdot \pi} \ln \frac{a+c}{a}$$

- Promjena energije onda iznosi:

$$\Delta W = I \cdot i \cdot (M_2 - M_1) = \frac{I \cdot i \cdot N \cdot \mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \left(b \cdot \ln \frac{a+c}{a} - c \cdot \ln \frac{a+b}{a} \right)$$

$$\Delta W = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0.5 \cdot 50 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot \pi} \cdot \left(20 \cdot 10^{-2} \cdot \ln \frac{40}{10} - 30 \cdot 10^{-2} \cdot \ln \frac{30}{10} \right) = -2.3 [\text{mW}]$$



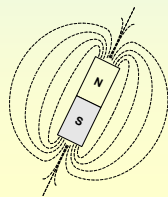
Početna stranica



Stranica: VII-1

Magnetizam

- Magnetski krug bez zračnog raspora.
- Magnetski krug sa zračnim rasporom.
- Magnetska energija u zraku.
- Magnetska energija u feromagnetskom materijalu.



Stranica: VII-2

1. zadatak

Zadan je magnetski krug s torusnom jezgrom od feromagnetskog materijala. Ukoliko kroz tu torusnu jezgru protječe magnetski tok od 0.7 [mVs] koliko iznosi struja koja protječe zavojnicom? Ako se napravi zračni raspor u torusnoj jezgri širine 1 milimetar kolika struja treba teći zavojnicom da bi magnetski tok ostao nepromijenjen? Zadano je:

- $N = 100$ zavoja
- $l_{FE} = 20$ [cm]
- $S_{FE} = 5$ [cm²]
- $\Phi = 7 \cdot 10^{-4}$ [Vs]
- tablica magnetiziranja

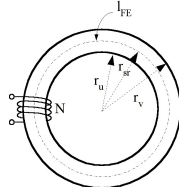
B [T]	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
H [A/m]	380	500	750	1200	1900


[Početna stranica](#)


Stranica: VII-3

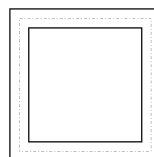
Uvodni pojmovi

Feromagnetska jezgra



$$l_{FE} = 2 \cdot \pi \cdot r_{sr}$$

$$r_{sr} = \frac{r_u + r_v}{2}$$



slično vrijedi i za druge oblike:

Veza između magnetskog polja i struje koja ga stvara - zakon protjecanja:

$$H \cdot l = I \cdot N$$

$$\sum_i H_i \cdot l_i = \sum_j I_j \cdot N_j$$

Opći slučaj

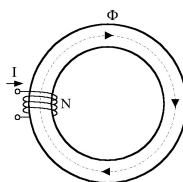


Početna stranica



Stranica: VII-4

Bez zračnog raspora



$$H_{FE} \cdot l_{FE} = I \cdot N$$

- Poznato: N , I_{FE} , Φ
- Φ (Φ_{FE}) \Rightarrow B_{FE} \Rightarrow tablica \Rightarrow H_{FE}

$$B_{FE} = \frac{\Phi_{FE}}{S_{FE}} = \frac{7 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-4}} = 1.4 \text{ [T]}$$

$$B_{FE} \Rightarrow \text{tablica magnetiziranja} \Rightarrow H_{FE} = 1200 \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$$

$$H_{FE} \cdot l_{FE} = I \cdot N$$

$$I = \frac{H_{FE} \cdot l_{FE}}{N} = \frac{1200 \cdot 0.2}{100} = 2.4 \text{ [A]}$$

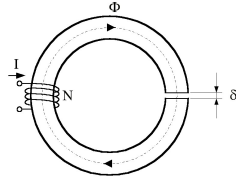


Početna stranica



Stranica: VII-5

Sa zračnim rasporom



$$l_{FE} - \delta \approx l_{FE}$$

$$I \cdot N = H_{FE} \cdot l_{FE} + H_{\delta} \cdot l_{\delta}$$

- Tok koji protječe jezgrom zatvara se preko zračnog raspora:

$$\Phi_{FE} = \Phi_{\delta}$$

- Zbog velikog otpora koji predstavlja vakuum (zrak) za magnetski tok sav tok se zatvara na mjestu gdje je razmak između otvorenih krajeva feromagnetske jezgre najmanji - zračni raspor.


[Početna stranica](#)


Stranica: VII-6

- Zbog toga se može reći da je površina kroz koju taj tok prolazi jednaka površini feromagnetske jezgre:

$$S_{FE} = S_{\delta}$$

- Iz toga dalje slijedi da su i magnetske indukcije jednake:

$$B_{FE} = B_{\delta}$$

- Poznavajući gore navedeno može se doći do konačnog rješenja:

$$\Phi_{FE} = \Phi_{\delta} = \Phi = 7 \cdot 10^{-4} \text{ [Vs]}$$

$$B_{\delta} = B_{FE} = \frac{\Phi_{FE}}{S_{FE}} = \frac{7 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-4}} = 1.4 \text{ [T]}$$


[Početna stranica](#)


Stranica: VII-7

$$H_{FE} = 1200 \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$$

$$H_{\delta} = \frac{B_{\delta}}{\mu_0} = \frac{1.4}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = 1.114 \cdot 10^6 \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$$

$$I \cdot N = H_{FE} \cdot l_{FE} + H_{\delta} \cdot l_{\delta}$$

$$I = \frac{H_{FE} \cdot l_{FE} + H_{\delta} \cdot l_{\delta}}{N} = \frac{1200 \cdot 0.2 + 1.1 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{100} = \frac{240 + 1114}{100}$$

$$I = 13.54 \text{ [A]}$$

- Uspoređujući ovu vrijednost s prethodnom može se vidjeti da za održavanje zadanog toka u zračnom rasporu širine 1 milimetar otpada čak 13.54-2.4=11.14 A !!!
- To je za više od 4x veća vrijednost od one za održavanje toka u feromagnetskoj jezgri 200x veće duljine.

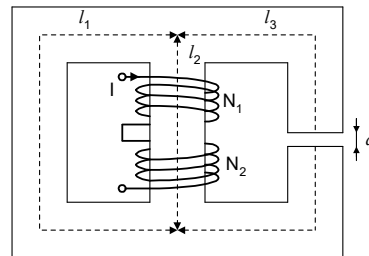

[Početna stranica](#)


Stranica: VII-8

2. zadatak

Zadan je magnetski krug s jezgrom od feromagnetskog materijala. Odredite struju I koja protječe kroz zavojnicu ako je poznato da je u rasporu nagomilana magnetska energija W_d . Karakteristika magnetskog materijala zadana je pomoću tablice.

- $W_d = 9.6 \text{ [mJ]}$
- $l_1 = l_3 = 20 \text{ [cm]}$
- $l_2 = 20 \text{ [cm]}$
- $d = 0.1 \text{ [mm]}$
- $S_1 = S_3 = S_0 = 2 \text{ [cm}^2\text{]}$
- $S_2 = 4 \text{ [cm}^2\text{]}$
- $N_1 = 200 \text{ [zavoja]}$
- $N_2 = 100 \text{ [zavoja]}$



B(T)	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.45	1.5
H(A/m)	200	240	300	380	500	818	1202	1350	1500


[Početna stranica](#)


Stranica: VII-9

Uvodni pojmovi

- Pri rješavanju složenih magnetskih krugova koristimo dva zakona:

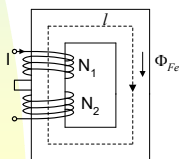
1) algebarska suma tokova u svakom čvoru magnetskog kruga jednaka je nuli

$$\text{alg} \sum_i \Phi_i = 0$$

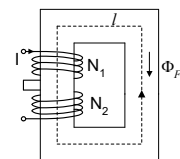
2) zbroj padova magnetskih napona duž bilo kojeg zatvorenog puta (konture) magnetskog kruga jednak je magnetomotornoj sili u toj konturi

$$\text{alg} \sum_i H_i \cdot l_i = \text{alg} \sum_j N_j \cdot I_j$$

- Primjeri različitog smjera obilaženja konture:



$$N_1 \cdot I - N_2 \cdot I = H_{Fe} \cdot l$$



$$N_2 \cdot I - N_1 \cdot I = -H_{Fe} \cdot l$$

[Početna stranica](#)


Stranica: VII-10

Rješenje zadatka

- Iz poznatog iznosa magnetske energije u zračnom rasporu moguće je izračunati magnetsku indukciju B_0 :

$$W_0 = \frac{B_0^2}{2 \cdot \mu_0} \cdot V \Rightarrow B_0 = \sqrt{\frac{W_0 \cdot 2 \cdot \mu_0}{S \cdot d}}$$

$$B_0 = \sqrt{\frac{9.6 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 0.1 \cdot 10^{-3}}}$$

$$B_0 = 1.1 [\text{T}]$$

- Magnetski tok koji se zatvara kroz zračni raspor jednak je magnetskom toku u trećem stupu:

$$\Phi_0 = \Phi_{Fe3}$$

$$B_0 \cdot S_0 = B_{Fe3} \cdot S_{Fe3}$$

$$B_{Fe3} = B_0 = 1.1 [\text{T}]$$

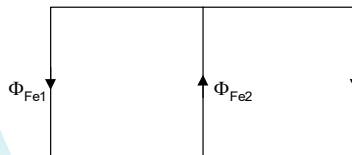
- Iz tablice magnetiziranja može se odrediti mag. polje u trećem stupu:

$$H_{Fe3} = 380 [\text{A/m}]$$

[Početna stranica](#)


Stranica: VII-11

- Struja I protječući kroz zavojnice stvara magnetski tok Φ_{Fe2} koji se grana na sljedeći način:



$$\begin{aligned}\Phi_{Fe2} &= \Phi_{Fe3} + \Phi_{Fe1} \\ B_{Fe2} \cdot S_2 &= B_{Fe3} \cdot S_3 + B_{Fe1} \cdot S_1 \\ B_{Fe2} &= \frac{B_{Fe3} + B_{Fe1}}{2}\end{aligned}$$

- Iz zakona protjecanja slijedi:

$$\begin{aligned}H_{Fe1} \cdot l_1 &= H_{Fe3} \cdot l_3 + H_0 \cdot d \\ H_{Fe1} &= \frac{H_{Fe3} \cdot l_3 + \frac{B_0}{\mu_0} \cdot d}{l_1} = \frac{380 \cdot 20 \cdot 10^{-2} + \frac{1.1}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} \cdot 0.1 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-2}} \\ H_{Fe1} &= 818 \text{ [A/m]} \Rightarrow B_{Fe1} = 1.3 \text{ [A/m]}\end{aligned}$$

- Mag. indukcija i polje u drugom stupu:

$$B_{Fe2} = \frac{1.1 + 1.3}{2} = 1.2 \text{ [T]} \Rightarrow H_{Fe2} = 500 \text{ [A/m]}$$


[Početna stranica](#)


Stranica: VII-12

- Struja I određuje se:

$$\begin{aligned}I \cdot (N_1 - N_2) &= H_{Fe1} \cdot l_1 + H_{Fe2} \cdot l_2 = H_{Fe3} \cdot l_3 + H_0 \cdot d + H_{Fe2} \cdot l_2 \\ I &= \frac{H_{Fe1} \cdot l_1 + H_{Fe2} \cdot l_2}{N_1 - N_2} = \frac{818 \cdot 20 \cdot 10^{-2} + 500 \cdot 15 \cdot 10^{-2}}{200 - 100} \\ I &= 2.4 \text{ [A]}\end{aligned}$$

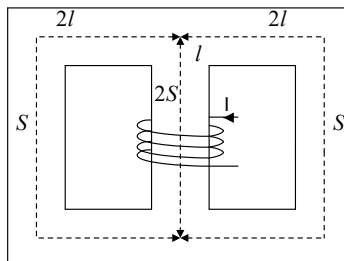

[Početna stranica](#)


Stranica: VII-13

3. zadatak

Magnetski krug prema slici izrađen je od feromagnetskog materijala čija je krivulja magnetiziranja zadana tabelarno. Odredite kolika se magnetska energija nakupila u krugu. Zadano:

- $l = 10$ [cm]
- $S = 12$ [cm²]
- $N = 30$ [zavoja]
- $I = 1$ [A]



B(T)	0.1	0.4	0.65	0.8	1.2	1.3
H(A/cm)	0.4	1	1.5	2	5	6


[Početna stranica](#)


Stranica: VII-14

Rješenje zadatka

- Za krajnje stupove vrijedi:

$$H_{Fe1} \cdot 2 \cdot l = H_{Fe3} \cdot 2 \cdot l \Rightarrow H_{Fe1} = H_{Fe3} = H \Rightarrow B_{Fe1} = B_{Fe3} = B$$

- Magnetski tokovi:

$$\Phi_{Fe2} = \Phi_{Fe1} + \Phi_{Fe2}$$

$$B_{Fe2} \cdot 2 \cdot S = B_{Fe1} \cdot S + B_{Fe2} \cdot S$$

$$B_{Fe2} = B_{Fe1} = B_{Fe2} = B$$

- Iz zakona protjecanja:

$$I \cdot N = H_{Fe2} \cdot l + H_{Fe3} \cdot 2 \cdot l$$

$$I \cdot N = H_{Fe2} \cdot l + H_{Fe1} \cdot 2 \cdot l = H \cdot l + H \cdot 2 \cdot l$$

$$H = \frac{I \cdot N}{3 \cdot l} = \frac{1 \cdot 30}{3 \cdot 10} = 1 \text{ [A/cm]}$$

- Iz tablice magnetiziranja mag. indukcija:

$$B = 0.4 \text{ [T]}$$

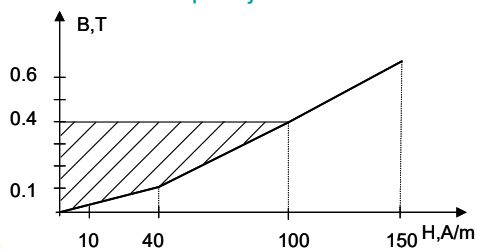

[Početna stranica](#)


Stranica: VII-15

- ω je gustoća energije po volumenu nakupljena u svakoj točki materijala i definiran je kao:

$$\omega = \int_0^B H dB; \quad \omega = \int_0^{0.4} H dB$$

- Integral se može riješiti samo ukoliko pretpostavimo linearnu zavisnost H-B po dijelovima:



- Gustoća energije jednaka je označenoj površini:

$$\omega = \frac{0.1 \cdot 40}{2} + 40 \cdot (0.4 - 0.1) + \frac{(100 - 40) \cdot (0.4 - 0.1)}{2}$$


[Početna stranica](#)


Stranica: VII-16

- ω je jednaka:

$$\omega = 2 + 12 + 9 = 23 \text{ [VAs/m}^3\text{]}$$

- Ukupna energija iznosi:

$$dW = \omega \cdot dV$$

$$W = \omega \cdot V = \omega \cdot (S \cdot (2 \cdot l + 2 \cdot l) + 2 \cdot S \cdot l) = \omega \cdot 6 \cdot S \cdot l$$

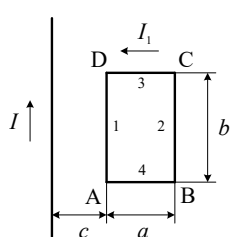
$$W = 6 \cdot 23 \cdot 12 \cdot 10^{-4} \cdot 0.1 = 16.56 \text{ [mVAs]}$$


[Početna stranica](#)

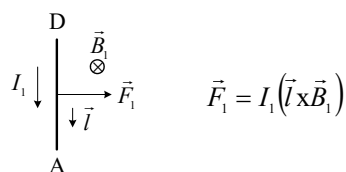

ELEKTROMAGNETIZAM VEŽBE

Zadatak 1 – Veoma dug pravolinijski provodnik sa strujom I i pravougaona kontura sa stranicama a i b , kroz koju protiče stalna struja I_1 , nalaze se u istoj ravni, u vakuumu. Rastojanje između provodnika i bliže stranice je c . Odrediti: rezultantnu elektromagnetnu silu koja deluje na provodnu konturu.

Poznato je: $I = 40\text{ A}$, $I_1 = 10\text{ A}$, $a = c = 10\text{ cm}$, $b = 20\text{ cm}$.

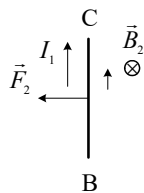


$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$



$$\vec{F}_1 = I_1 (\vec{l} \times \vec{B}_1)$$

$$F_1 = I_1 l B_1 \sin(\vec{l}, \vec{B}_1) = I_1 l B_1 \sin \frac{\pi}{2} = I_1 l B_1 = I_1 b \frac{\mu_0 I}{2\pi c}$$



$$\vec{F}_2 = I_1 (\vec{l} \times \vec{B}_2)$$

$$F_2 = I_1 l B_2 \sin(\vec{l}, \vec{B}_2) = I_1 l B_2 \sin \frac{\pi}{2} = I_1 l B_2 = I_1 b \frac{\mu_0 I}{2\pi(c+a)}$$

$$d\vec{F}_3 = I_1(d\vec{l} \times \vec{B}_1)$$

$$d\vec{F}_4 = I_1(d\vec{l} \times \vec{B}_1)$$

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$F_r = \frac{\mu_0 I I_1 b}{2\pi c} - \frac{\mu_0 I I_1 b}{2\pi(c+a)}$$

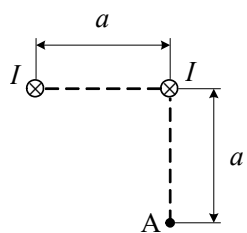
$$F_r = \frac{\mu_0 I I_1 b}{2\pi} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c+a} \right) = 8 \cdot 10^{-5} \text{ N,}$$

smer se poklapa sa smerom vektora \vec{F}_1

Zadatak 2 – Dva neograničeno duga prava provodnika, kroz koje protiču struje istog intenziteta I , postavljena su kao na slici. Odrediti vektor magnetne indukcije u tački A.

Poznato je: $I = 100 \text{ A}$, $a = 20 \text{ cm}$.

Za vežbu: 3.6



$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a \sqrt{2}},$$

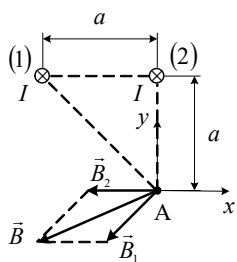
$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a},$$

$$B_{1x} = -B_1 \cos 45^\circ = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a},$$

$$B_{1y} = -B_1 \sin 45^\circ = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a},$$

$$B_{2x} = -B_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a}, \quad B_{2y} = 0,$$

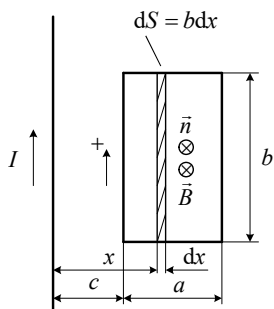
$$B_x = B_{1x} + B_{2x} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} - \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = -\frac{3\mu_0 I}{4\pi a},$$



$$B = \sqrt{(\sum B_x)^2 + (\sum B_y)^2} = \sqrt{\left(\frac{3\mu_0 I}{4\pi a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\right)^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sqrt{10}, \quad B = 0,158 \cdot 10^{-3} \text{ T.}$$

Zadatak 3 – Veoma dug pravolinijski provodnik sa strujom I i pravougaona kontura sa stranicama a i b , nalaze se u istoj ravni, u vakuumu. Rastojanje između provodnika i bliže stranice je c . Odrediti magnetni fluks kroz površinu pravougaone konture.

Da bi se odredio magnetni fluks potrebno je da se na konturu osloni jedna površina. Zatim se odabere pozitivna orijentacija konture, da bi se definisao vektor površine \vec{S} .



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

Fluks kroz površinu konture, po definiciji, je

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S \vec{B} d\vec{S} \cos(\vec{B}, d\vec{S}) = \int_S B dS \cos 0$$

Element površine treba tako odabrati da u svim njegovim tačkama (pravougaona traka male širine) magnetna indukcija ima konstantnu vrednost.

$$\Phi = \int_c^{a+c} B b dx = \int_c^{a+c} \frac{\mu_0 I b}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{a+c}{c}$$

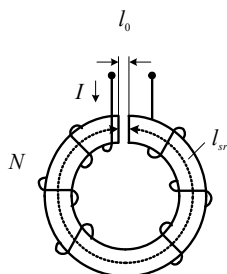
Za vežbu: 3.9

Zadatak 4 – Na torusno jezgro, kružnog poprečnog preseka, S , dužine srednje linije jezgra, l_{sr} , sa vazдушnim procepu, l_0 , gusto je namotano N navojaka žice. Jačina magnetnog polja u procepu treba da bude H_0 . Kriva magnećenja materijala od koga je jezgro napravljeno data je na slici. Magnetno rasipanje zanemariti.

Odrediti:

- vektor magnetne indukcije u vazдушnom procepu;
- struju koja protiče kroz namotaj elektromagneta.

$$S = 16 \text{ cm}^2 \quad l_{sr} = 0,8 \text{ m}, \quad l_0 = 0,1 \text{ cm} \quad H_0 = 500 \cdot 10^3 \text{ A/m}, \quad N = 2000.$$



$$B_0 = \mu_0 H_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 10^3 = 0,628 \text{ T}$$

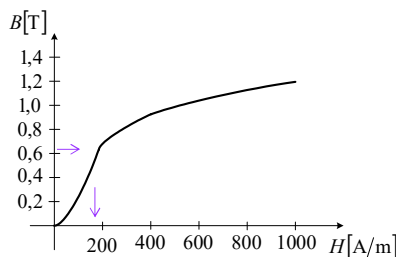
$$\Phi_0 = \Phi_1, \quad B_0 S_0 = B_1 S_1, \quad S_0 = S_1, \quad B_1 = B_0 = 0,628 \text{ T},$$

sa krive magnećenja $H_1 \approx 180 \text{ A/m}$

$$NI = H_0 l_0 + H_1 l_{sr} = 500 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} + 180 \cdot 0,8 = 644 \text{ AN}$$

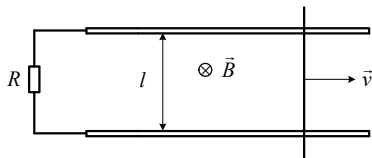
$$I = \frac{644}{2000} = 0,322 \text{ A.}$$

Za vežbu: 3.27



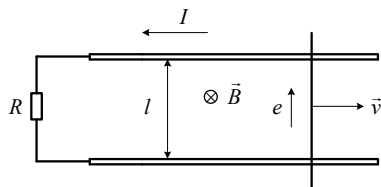
Zadatak 5 – Dve paralelne provodne šine, zanemarljivih otpornosti, nalaze se na međusobnom rastojanju l i postavljene su u homogeno magnetno polje indukcije \vec{B} usmereno normalno na ravan crteža, kao na sl. Provodnik, podužne otpornosti r , kreće se duž šina konstantnom brzinom v . Šine su spojene preko otpornika otpornosti R . Odrediti indukovanu ems uprovodniku, intenzitet struje kroz provodnik i snagu Džulovih gubitaka u kolu.

$$l = 0,4 \text{ m} \quad B = 0,5 \text{ T} \quad R = 5 \text{ } \Omega \quad r = 0,5 \text{ } \Omega/\text{m} \quad v = 5 \text{ m/s.}$$



$$e = l v B = 0,4 \cdot 5 \cdot 0,5 = 1 \text{ V}$$

$$I = \frac{e}{R + rl} = \frac{1}{5 + 0,5 \cdot 0,4} = 0,192 \text{ A}$$

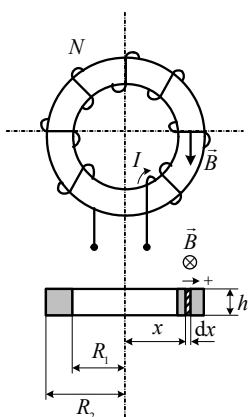


$$P = RI^2 = 5 \cdot 0,192^2 = 0,184 \text{ W}$$

Za vežbu: 3.18

Zadatak 6 – Na torus pravougaonog poprečnog preseka ravnomerno je namotano navojaka tanke žice. Odrediti koeficijent samoindukcije namotaja torusa pod pretpostavkom da je magnetna permeabilnost torusa jednaka magnetnoj permeabilnosti vakuuma.

$$R_1 = 8 \text{ cm} \quad R_2 = 10 \text{ cm} \quad h = 2 \text{ cm} \quad N = 1000$$



$$L = \frac{\Phi}{I}$$

$$dS = h dx$$

$$d\Phi_1 = B dS = \frac{\mu_0 N I}{2\pi x} h dx$$

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

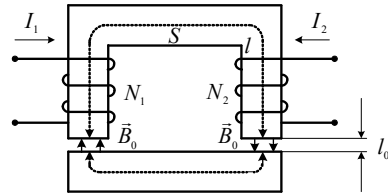
$$\Phi = N \Phi_1$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$L = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000^2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot \pi} \ln \frac{10}{8} = 0,8924 \text{ mH}$$

Za vežbu: 3.15

Zadatak za vežbu



$$\Phi_0 = \Phi, B_0 S_0 = BS, S_0 = S, B = B_0$$

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = 2H_0 l_0 + Hl$$

$$\frac{B_0}{\mu_0}$$

B	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8
H	50	75	115	145	185	275	450	1300	4000	13500