

# Naizmjenične struje

## Osnovni pojmovi

### Izmjenična struja - definicija

- Općenito -električna struja promjenjivog smjera.
- U praksi koristimo električnu struju čija amplituda se sinusoidalno periodski mijenja.

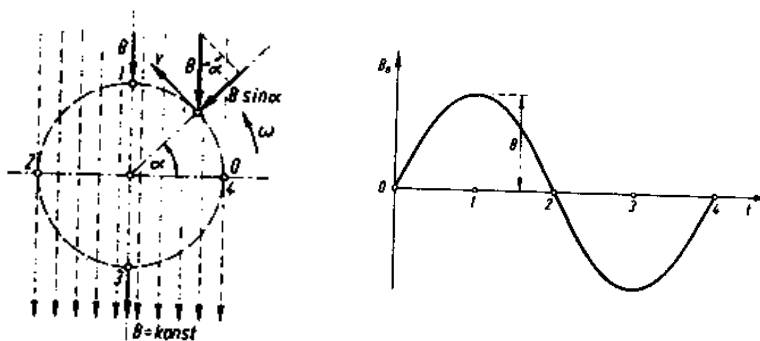
## Izmjenična struja - definicija

- Ako u homogenom magnetskom polju rotiramo zavojnicu jednolikom kutnom brzinom tada će se na njenim izvodima inducirati napon čija je trenutna vrijednost proporcionalna sa kutom što ga ravnina zavojnice zatvara sa smjerom magnetskog polja.

ee07\_10

3

## Zavojnica u promjenjivom polju



ee07\_10

4

## Zavojnica u promjenjivom polju

- $B_n = B \cdot \sin \alpha$
- $U_o$  je maksimalna amplituda induciranog napona  $\omega$  je kružna frekvencija.

$$u = U_o \cdot \sin \omega t$$

ee07\_10

5

## Frekvencija izmjenične struje

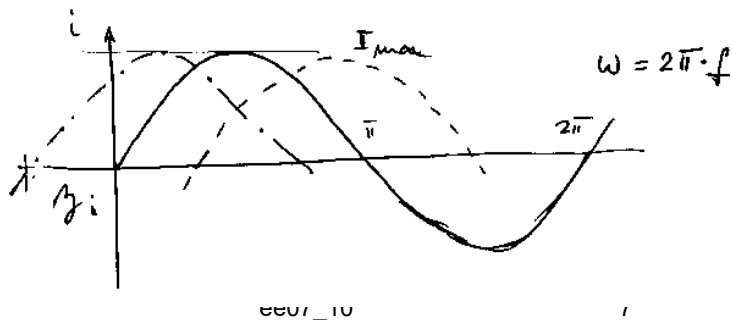
- Frekvencija izmjenične struje je mjera za brzinu promjene smjera struje.
- Normalna frekvencija gradske mreže je 50 Hz.
- U SAD se koristi frekvencija 60 Hz.
- U avionskim sustavima se koristi frekvencija od 400 Hz.

ee07\_10

6

## Fazni pomak

- Fazni pomak označava vrijeme za koje je promatrana struja (napon) pomaknuta u odnosu na neku referentnu veličinu.



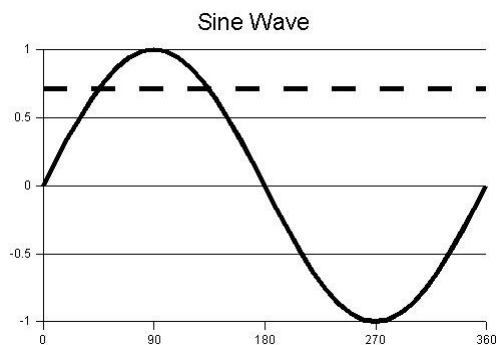
## Efektivna vrijednost

- Efektivna vrijednost (izmjenične) električne struje je onaj iznos istosmjerne struje koji daje jednak toplinski efekt kao izmjenična struja.

## Efektivna vrijednost

$$I^2 \cdot R \cdot t = R \int_0^T i^2 \cdot dt$$

$$I = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \approx 0,707I_{\max}$$



ee07\_10

9

## Snaga izmjenične struje

- Snaga izmjenične struje je produkt dvije izmjenične veličine, struje i napona koje mogu biti fazno pomaknute.

$$P = U \cdot I$$

$$u = U_{\max} \cdot \sin \omega t \quad i = I_{\max} \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

ee07\_10

10

## Faktor snage

- Fazni pomak između struje i napona naziva se **faktor snage** i proporcionalan je sa kosinusom faznog pomaka.

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

ee07\_10

11

## Prividna snaga

- Prividna snaga je produkt efektivnih vrijednosti struje i napona.

$$S = U \cdot I$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

ee07\_10

12

## Djelatna (aktivna snaga)

- Djelatna (aktivna) snaga je snaga koja stvarno vrši rad na potrošaču.

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

ee07\_10

13

## Prividna snaga

- Snaga koja ne obavlja aktivan rad na trošilu naziva se jalovom snagom.

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

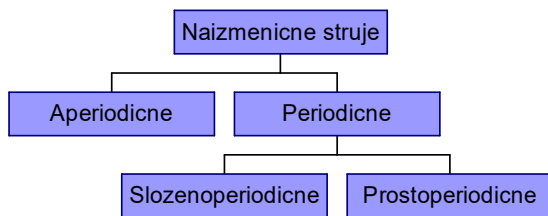
ee07\_10

14

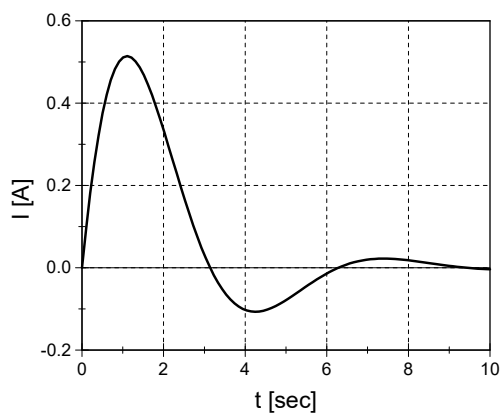
## Pojam i klasifikacija naizmjeničnih struja

Naizmjenične struje su električne struje koje tokom vremena menjaju smer

Klasifikacija naizmjeničnih struja prema vremenskoj zavisnosti jacine struje



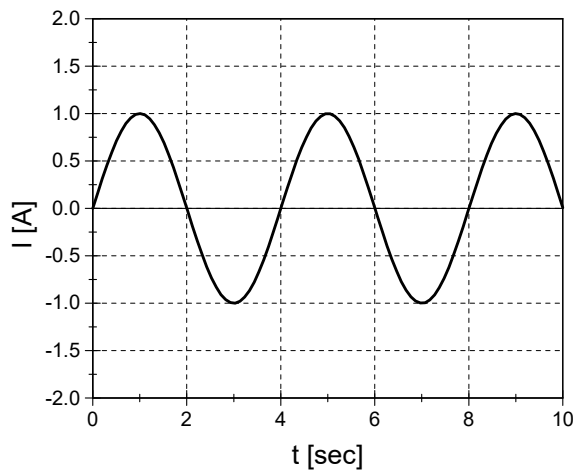
## Pojam i klasifikacija naizmjeničnih struja



aperiodična naizmjenična struja

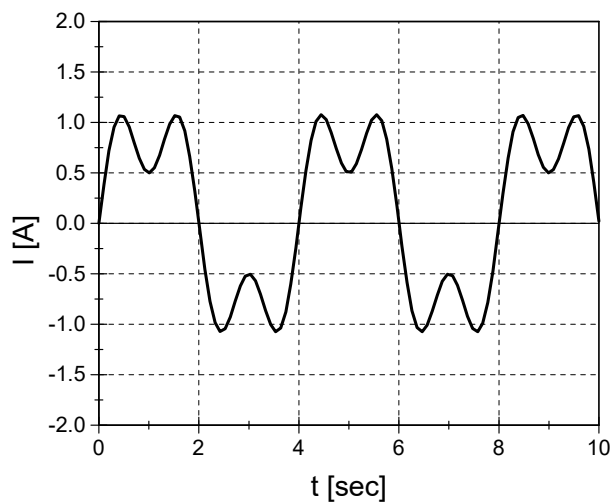


## Pojam i klasifikacija naizmjeničnih struja



prostoperiodična naizmjenična struja

## Pojam i klasifikacija naizmjeničnih struja



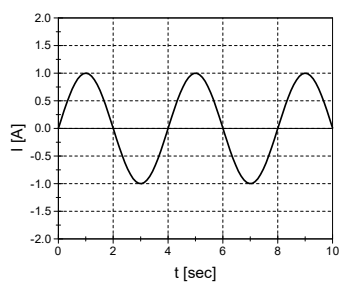
složeneriodična naizmjenična struja

## Prostoperiodične naizmenične struje

Prostoperiodične naizmenične struje su električne struje kod kojih jačina struje harmonijski osciluje

$$i = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = I_0 \cdot \sin(2\pi f \cdot t + \varphi)$$

$$i = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(2\pi f \cdot t + \varphi)$$



$I_0$  – amplituda

$I$  – efektivna vrednost

$\omega$  – kružna frekvencija (kružna učestanost)

$f$  – frekvencija (učestanost)

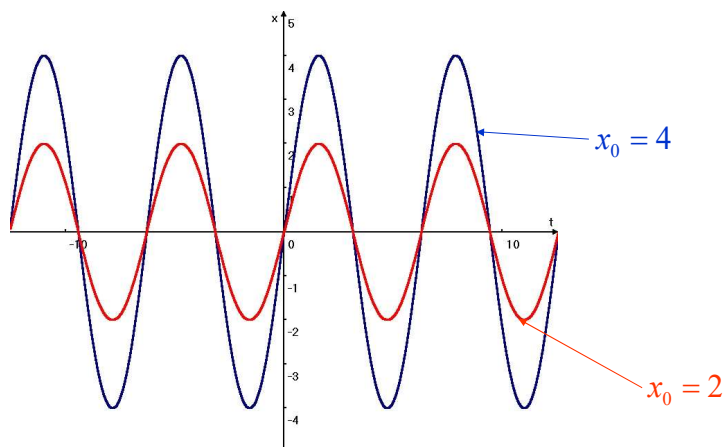
$\varphi$  – početna faza

## Prostoperiodične veličine

### ■ Amplituda i efektivna vrednost

□ mera ekstremnih vrednosti veličine

$$X = \frac{X_0}{\sqrt{2}} \quad X_0 = X\sqrt{2}$$

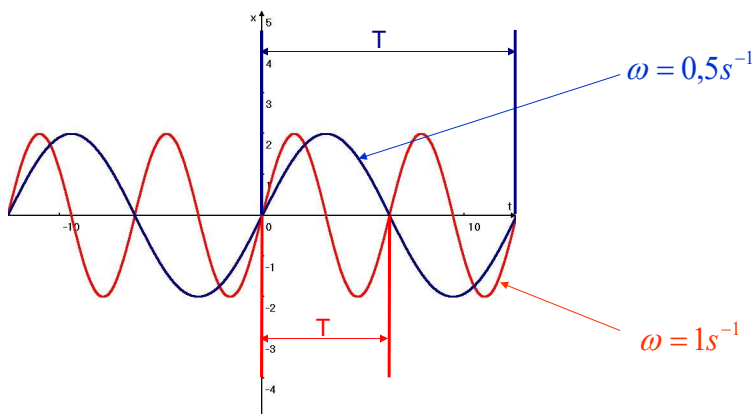


## Prostoperiodične veličine

### ■ Učestanost i kružna učestanost

- mera perioda ponavljanja promena

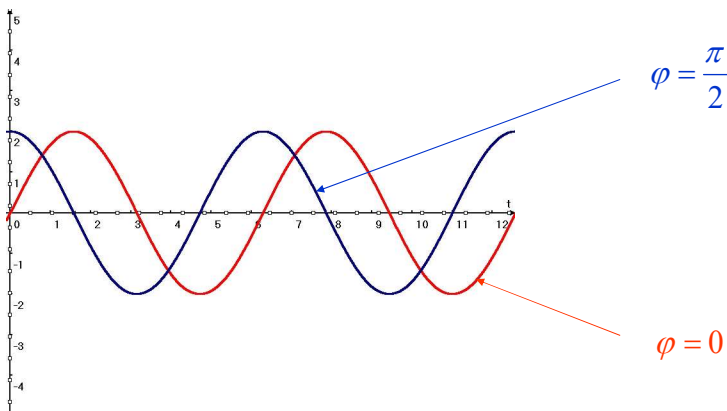
$$\omega = 2\pi \cdot f \quad f = \frac{1}{T} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$



## Prostoperiodične veličine

### ■ Početna faza

- pokazuje položaj sinusoide duž vremenske ose



# Naizmenične struje

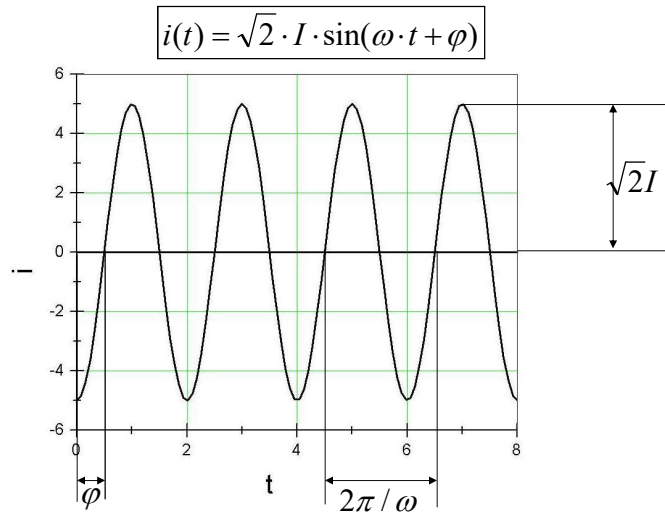
Opisivanje prostoperiodičnih veličina

## Metodi opisivanja

- Zadatak:
  - omogućiti efikasno rešavanje električnih kola
  - omogućiti efikasno proučavanje oscilatornih sistema
- Prostoperiodična veličina
  - amplituda (efektivna vrednost)
  - učestanost (kružna učestanost)
  - početna faza
- U kolima prostoperiodične struje sve veličine imaju istu frekvencu
  - amplituda (efektivna vrednost)
  - početna faza
- Metodi opisivanja
  - vremenski (trigonometrijski)
  - fazorski (geometrijski)
  - kompleksni (aritmetički)

## Vremensko opisivanje

- Analitički prikaz trigonometrijskim funkcijama



## Vremensko opisivanje

- Primer: sabiranje dve prostoperiodične veličine (Kirhofovi zakoni)

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1) \\ i_2(t) &= \sqrt{2} \cdot I_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_2) \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} i &= i_1 + i_2(t) \\ i &= \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2(t) + i_1(t) &= \sqrt{2} \cdot (I_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1) + I_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_2)) = \\ &= \sqrt{2} \cdot (I_1 \cdot [\sin(\omega \cdot t) \cos(\varphi_1) + \cos(\omega \cdot t) \sin(\varphi_1)] + \\ &\quad + I_2 \cdot [\sin(\omega \cdot t) \cos(\varphi_2) + \cos(\omega \cdot t) \sin(\varphi_2)]) = \\ &= \sqrt{2} \cdot \{ [I_1 \cos(\varphi_1) + I_2 \cos(\varphi_2)] \sin(\omega \cdot t) + [I_1 \sin(\varphi_1) + I_2 \sin(\varphi_2)] \cos(\omega \cdot t) \} \\ &= \sqrt{2} \cdot \{ [I \cdot \cos(\varphi)] \cdot \sin(\omega \cdot t) + [I \cdot \sin(\varphi)] \cos(\omega \cdot t) \} \end{aligned}$$

$$I \cos(\varphi) = I_1 \cos(\varphi_1) + I_2 \cos(\varphi_2)$$

$$I \sin(\varphi) = I_1 \sin(\varphi_1) + I_2 \sin(\varphi_2)$$

## Vremensko opisivanje

- Primer: sabiranje dve prostoperiodične veličine (Kirhofovi zakoni)

$$\begin{aligned} I \cos(\varphi) &= I_1 \cos(\varphi_1) + I_2 \cos(\varphi_2) \\ I \sin(\varphi) &= I_1 \sin(\varphi_1) + I_2 \sin(\varphi_2) \end{aligned}$$

$$I^2 = [I_1 \cos(\varphi_1) + I_2 \cos(\varphi_2)]^2 + [I_1 \sin(\varphi_1) + I_2 \sin(\varphi_2)]^2$$

$$I = \sqrt{[I_1 \cos(\varphi_1) + I_2 \cos(\varphi_2)]^2 + [I_1 \sin(\varphi_1) + I_2 \sin(\varphi_2)]^2}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{I_1 \cos(\varphi_1) + I_2 \cos(\varphi_2)}{I_1 \sin(\varphi_1) + I_2 \sin(\varphi_2)}$$

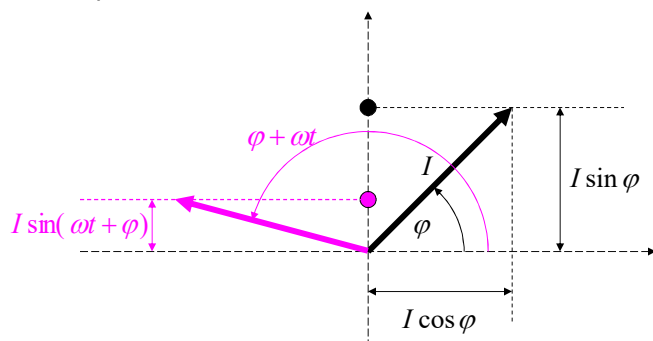
$$\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{I_1 \cos(\varphi_1) + I_2 \cos(\varphi_2)}{I_1 \sin(\varphi_1) + I_2 \sin(\varphi_2)} \right)$$

## Vremensko opisivanje

- Prednosti
  - jasan fizički smisao dobijenih rezultata
- Nedostaci
  - sporo
  - podložno greškama

## Fazorsko opisivanje

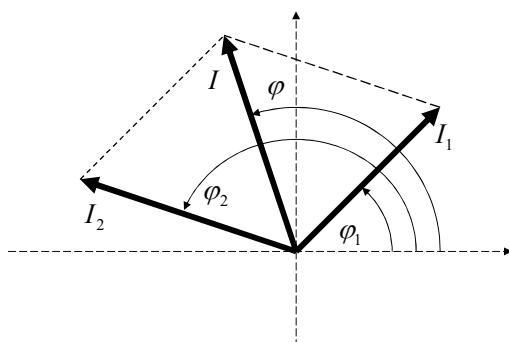
- Grafički prikaz vektorima
- Fazor je vektor koji:
  - ima napadnu tačku u koordinatnom početku
  - se okreće konstantnom ugaonom brzinom  $\omega$  oko koordinatnog početka



## Fazorsko opisivanje

- Primer: sabiranje dve prostoperiodične veličine (Kirhofovi zakoni)

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1) \\ i_2(t) &= \sqrt{2} \cdot I_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_2) \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} i &= i_1 + i_2(t) \\ i &= \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} I_x &= I_{1x} + I_{2x} \\ I_y &= I_{1y} + I_{2y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I \cos(\varphi) &= I_1 \cos(\varphi_1) + I_2 \cos(\varphi_2) \\ I \sin(\varphi) &= I_1 \sin(\varphi_1) + I_2 \sin(\varphi_2) \end{aligned}$$

## Fazorsko opisivanje

- Prednosti
  - brzo
- Nedostaci
  - ne uočava se fizička veza sa veličinama koji se proučavaju
  - crtež može da bude prenatrpan
  - problematično je precizno crtanje kada se crtane veličine mnogo razlikuju po redu veličine
  - ne uočava se lako međusobna zavisnost veličina

## Impedancija

- Električna impedancija je omjer napona i struje

- $Z_R = \frac{V_r}{I_r}$  e od realnog i imaginarnog dijela

$$z_e = \sqrt{r_e^2 + x_e^2}$$

$$\phi = \arctan \frac{x_e}{r_e}$$



## Serijski spoj impedancija

- Kod serijskog spoja impedancija zbrajaju se realne i imaginarne komponente impedancije.

$$Z_{\text{eq}} = Z_1 + Z_2 = (R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)$$

ee1006

33

## Paralelni spoj impedancija

- Vrijedi da je recipročna vrijednost paralelne impedancije jednaka sumi recipročnih vrijednosti pojedinačnih impedancija.
- No zbog kompleksnih vrijednosti, proračun je nešto složeniji.

$$Z_{\text{eq}} = Z_1 \parallel Z_2 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

ee1006

34

## Paralelni spoj impedancija

$$Z_{\text{eq}} = R_{\text{eq}} + jX_{\text{eq}}$$

$$R_{\text{eq}} = \frac{(X_1 R_2 + X_2 R_1)(X_1 + X_2) + (R_1 R_2 - X_1 X_2)(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}$$

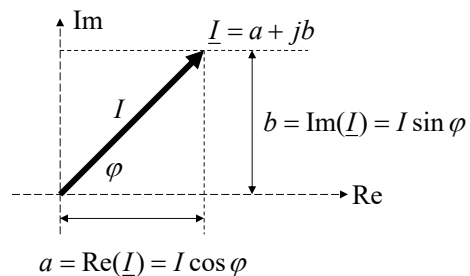
$$X_{\text{eq}} = \frac{(X_1 R_2 + X_2 R_1)(R_1 + R_2) - (R_1 R_2 - X_1 X_2)(X_1 + X_2)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}$$

ee1006

35

## Kompleksno opisivanje

- Prikaz fazora kompleksnim brojevima



$$\begin{aligned} \underline{I} &= a + jb \\ a &= I \cdot \cos \varphi \\ b &= I \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\underline{I} = I \cdot e^{j\varphi}$$

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{tg } \varphi &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

## Kompleksno opisivanje

- Primer: sabiranje dve prostoperiodične veličine (Kirhofovi zakoni)

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1) \\ i_2(t) &= \sqrt{2} \cdot I_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_2) \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} i &= i_1 + i_2(t) \\ i &= \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\underline{I}_1 = a_1 + jb_1 = I_1 \cos \varphi_1 + j \cdot I_1 \sin \varphi_1$$

$$\underline{I}_2 = a_2 + jb_2 = I_2 \cos \varphi_2 + j \cdot I_2 \sin \varphi_2$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) = a + jb$$

$$I = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

$$\text{Re}(I) = \text{Re}(I_1) + \text{Re}(I_2)$$

$$\text{Im}(I) = \text{Im}(I_1) + \text{Im}(I_2)$$

$$I \cos(\varphi) = I_1 \cos(\varphi_1) + I_2 \cos(\varphi_2)$$

$$I \sin(\varphi) = I_1 \sin(\varphi_1) + I_2 \sin(\varphi_2)$$

## Kompleksno opisivanje

- Prednosti

- brzo
- matematički jednostavno
- lako se uočavaju zavisnosti među veličinama

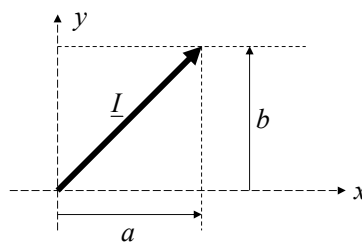
- Nedostaci

- kompleksni broj u algebarskom obliku nema direktno fizičko objašnjenje

## Transformacije opisa

- Transformacija kompleksnog oblika u fazorski oblik
  - realni deo kompleksnog broja je x projekcija fazora
  - imaginarni deo kompleksnog broja je y projekcija fazora

$$\underline{I} = a + jb$$



## Transformacije opisa

- Transformacija kompleksnog u vremenski

$$\underline{I} = a + jb$$

$$I = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \varphi = \arctg \frac{b}{a}$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(\omega t + \arctg \frac{b}{a})$$

## Transformacije opisa

- Transformacija vremenskog u kompleksni

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = I \cdot \cos \varphi \quad b = I \cdot \sin \varphi$$

## Naizmjenične struje

Električna kola naizmjenične električne struje

## ELEKTRIČNE MREŽE SA VELIČINAMA OPŠTE VREMENSKE ZAVISNOSTI

- U dosadašnjem tekstu je već više puta bilo riječi o vremenski promjenljivim veličinama.
- U uvodu trećeg dijela bila je definisana njihova osnovna podjela na jednosmjerne i naizmjenične, opisan vremenski dijagram kao način njihovog grafičkog predstavljanja i objašnjen pojam trenutne vrijednosti vremenski promjenljive veličine.
- U ovom dijelu teksta će biti detaljnije razmotrene pojave u mrežama sa vremenski promjenljivim strujama, nastalim kao posljedica djelovanja vremenski promjenljivih generatora električne energije.

- U mrežama sa vremenski konstantnim strujama je jedini pasivni element bio otpornik.
- Kondenzator je, izuzev za vrijeme kratkog procesa punjenja, predstavljao prekid u grani u kojoj se našao, a kalem bi bio zastupljen samo svojom otpornošću, opet ako se izuzme kratak period vremena do uspostavljanja trajnog, vremenski konstantnog stanja.

- Ako su, međutim, struje u mrežama vremenski promjenljive, kao pasivni elementi će, osim otpornika, nastupati i kondenzatori i kalemi.
- Vremenski promjenljiva struja će sve vrijeme izazivati djelimično ili potpuno punjenje i pražnjenje kondenzatora, pa se, zbog toga, kaže da vremenski promjenljiva struja može da se uspostavi kroz kondenzator.
- S druge strane, vremenski promjenljiva struja će u cijeloj mreži izazvati vremenski promjenljivo elektromagnetsko polje i time pojavu elektromagnetske indukcije, praćenu indukovanim elektromotornim silama samoindukcije i međusobne indukcije.

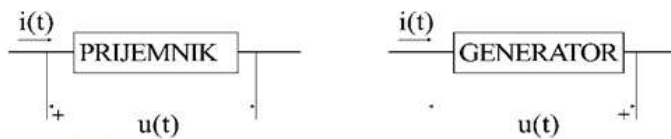
- Vremenski promjenljive struje u mrežama prouzrokuju vremenski promjenljivi generatori i to, kao i kod mreža sa vremenski konstantnim strujama, naponski generator, opisan vremenski promjenljivom elektromotornom silom  $e(t)$  i strujni generator, definisan vremenski promjenljivom strujom izvora jačine  $i_s(t)$ .
- Vremenski oblici veličina koje proizvode ti generatori mogu da budu raznovrsni, a na oblik vremenski promjenljivih veličina u mreži, u opštem slučaju, utiču i pasivni elementi.

- Napomenuto je već da se, u mrežama sa vremenski promjenljivim strujama, javljaju indukovane elektromotorne sile samoindukcije i međusobne indukcije.
- Drugim riječima, indukovane elektromotorne sile će se javljati u samim elementima mreže, ali i u provodnicima, koji povezuju pojedine elemente.
- S druge strane, u mrežama sa vremenski promjenljivim strujama promjene struje se uspostavljaju duž grane konačnom brzinom, koja je, za slučaj grane u vazduhu, približno jednaka brzini prostiranja svjetlosti u vakuumu

#### JAČINA STRUJE, NAPON I SNAGA ELEMENATA MREŽE SA VREMENSKI PROMJENLJIVIM STRUJAMA

- Kao što je već rečeno, vremenski promjenljive veličine se opisuju njihovim trenutnim vrijednostima, kojima se takođe biraju referentni smjerovi
- Pošto vremenski promjenljive struje i naponi mogu, tokom vremena, da mijenjaju smjer, za ove struje i napone se kaže da su pozitivni u onim vremenskim intervalima kada im se stvarni smjerovi poklapaju sa referentnim, a da su negativni u vremenskim intervalima kada su stvarni smjerovi suprotni od referentnih.

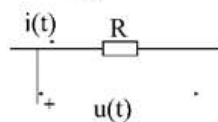




Sl. 6.1. Usklađeni referentni smjerovi na prijemniku i generatoru

$$u(t) = R \cdot i(t), \quad (6.1)$$

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} \quad (3.39)$$



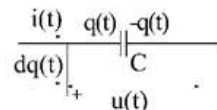
Sl. 6.2. Otpornik

Trenutne vrijednosti jačine struje i napona na kondenzatoru mogu da se odrede na sljedeći način:

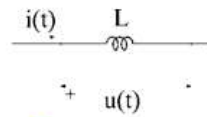
$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt}, \quad (6.2)$$

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt + U_0, \quad (6.3)$$

gdje se napon  $U_0$  dobija kao aditivna konstanta rješenju neodređenog integrala, a fizički može da predstavlja vremenski konstantan napon na koji je kondenzator prethodno bio napunjen.



Sl. 6.3. Kondenzator

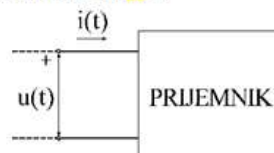


Sl. 6.4. Usamljen kalem

Pogledajmo sada kakva je situacija sa snagama u mrežama sa vremenski promjenljivim strujama.

Pogledajmo sada kakva je situacija sa snagama u mrežama sa vremenski promjenljivim strujama.

Posmatrajmo prijemnik sa dva kraja, između kojih postoji vremenski promjenljiv napon  $u(t)$  i neka u prijemniku postoji vremenski promjenljiva struja, jačine  $i(t)$ , kao što je prikazano na Sl. 6.5.



Sl. 6.5. Snaga prijemnika

U nekom vremenskom intervalu  $dt$  kroz prijemnik prođe količina naelektrisanja  $dq(t)$ , pa su, po definiciji napona, električne sile izvršile rad

$$dA(t)_{\text{el.sila}} = u(t) \cdot dq(t) = u(t) \cdot i(t) \cdot dt,$$

pošto je  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \rightarrow dq(t) = i(t) \cdot dt.$

Trenutna snaga prijemnika (brzina vršenja rada električnih sila u prijemniku) je

$$p(t) = \frac{dA(t)_{\text{el.sila}}}{dt} = u(t) \cdot i(t), \quad (6.5)$$

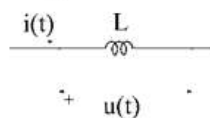
a ukupan rad koji, od trenutka  $t_1$  do trenutka  $t_2$ , izvrše električne sile u prijemniku je

$$A_{\text{el.sila od } t_1 \text{ do } t_2} = \int_{t_1}^{t_2} u(t) \cdot i(t) \cdot dt \quad (6.6)$$

$$p_g(t) = u_g(t) \cdot i_g(t), \quad (6.7)$$

dok je rad generatora, u vremenskom intervalu od  $t_1$  do  $t_2$

$$A_g(\text{od } t_1 \text{ do } t_2) = \int_{t_1}^{t_2} u_g(t) \cdot i_g(t) \cdot dt \quad (3.41)$$



Sl. 6.6. Snaga generatora

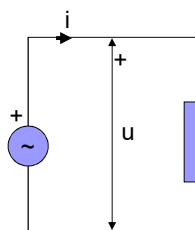
- Snaga prijemnika i snaga generatora, kod vremenski promjenljivih struja, pri usklađenim referentnim smjerovima, može, u nekim vremenskim intervalima, da bude veća od nule i tada kažemo da se, u tim vremenskim intervalima, prijemnik ponaša kao potrošač, a generator kao izvor električne energije.
- U nekim drugim vremenskim intervalima te snage mogu da budu manje od nule, što znači da se, tada, prijemnik ponaša kao generator (predaje mreži energiju, koju je, u prethodnom intervalu akumulirao), dok se generator ponaša kao potrošač, kao što je to bio slučaj i u mrežama sa vremenski konstantnim strujama.

#### KIRHOFOVI ZAKONI U MREŽAMA SA VREMENSKI PROMJENLJIVIM STRUJAMA

- Prvi i drugi Kirhofov zakon važe i u mrežama sa vremenski promjenljivim strujama i to za trenutne vrijednosti napona i jačina struja. Za bilo koji čvor mreže sa vremenski promjenljivim strujama, može da se napiše I Kirhofov zakon za trenutne vrijednosti jačina struja

## Prosta kola naizmjenične struje

- Prosto kolo naizmjenične električne struje sastoji se od izvora naizmjenične električne struje i jednog potrošača

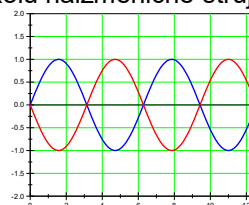


$$u = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta) \quad i = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \psi)$$

- Odrediti vezu između napona na potrošaču i struje koja protiče kroz granu sa potrošačem
  - Odrediti veze efektivnih vrednosti (U,I)
  - Odrediti veze početnih faza ( $\theta, \psi$ )
- Smisao referentnog smera struje i napona u kolu naizmjenične struje

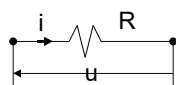
$$i = I_0 \cdot \sin(\omega t)$$

$$-i = -I_0 \cdot \sin(\omega t) = I_0 \cdot \sin(\omega t + \pi)$$



## Prosto kolo sa otpornikom

- Vremensko opisivanje - analitički prikaz



$$i_R = \frac{u_R}{R} \quad u_R = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta)$$

$$i_R = \frac{1}{R} [U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta)] = \frac{U}{R} \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta)$$

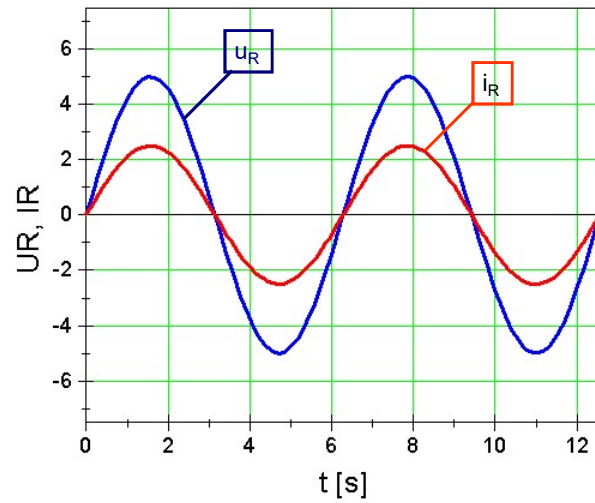
$$i_R = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \psi)$$

$$I = \frac{U}{R}$$

$$\psi = \theta$$

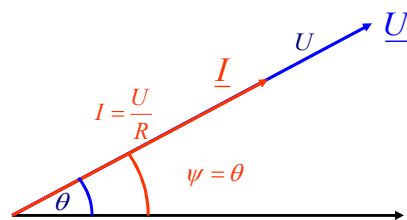
## Prosto kolo sa otpornikom

- Vremensko opisivanje - grafički prikaz



## Prosto kolo sa otpornikom

- Fazorsko opisivanje



## Prosto kolo sa otpornikom

### ■ Kompleksno opisivanje

$$u_c = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta) \mapsto \underline{U} = u_1 + ju_2 = U \cos \theta + jU \sin \theta$$

$$i_c = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \psi) \mapsto \underline{I} = i_1 + ji_2 = I \cos \psi + jI \sin \psi$$

$$\underline{I} = I \cos \psi + jI \sin \psi = \frac{U}{R} \cos \theta + j \frac{U}{R} \sin \theta$$

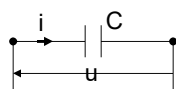
$$\underline{I} = \frac{1}{R} (U \cos \theta + jU \sin \theta)$$

$$\boxed{\underline{I} = \frac{U}{R}}$$

$$\boxed{\underline{U} = R\underline{I}}$$

## Prosto kolo sa kondenzatorom

### ■ Vremensko opisivanje - analitički prikaz



$$i_c = C \frac{du_c}{dt} \quad u_c = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta)$$

$$i_c = C \frac{d}{dt} [U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta)] = CU\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta) \cdot \omega$$

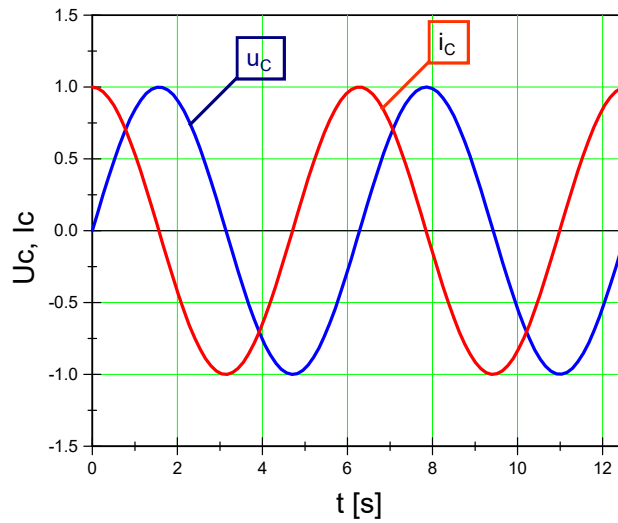
$$i_c = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \psi)$$

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \implies i_c = \omega CU\sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} I &= \omega CU \\ \psi &= \theta + \frac{\pi}{2} \end{aligned}}$$

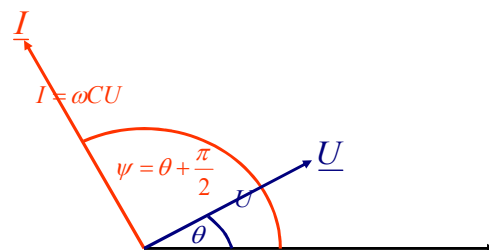
## Prosto kolo sa kondenzatorom

- Vremensko opisivanje - grafički prikaz



## Prosto kolo sa kondenzatorom

- Fazorski opisivanje





## Prosto kolo sa kondenzatorom

- Kompleksno opisivanje

$$u_c = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta) \mapsto \underline{U} = u_1 + ju_2 = U \cos \theta + jU \sin \theta$$

$$i_c = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \psi) \mapsto \underline{I} = i_1 + ji_2 = I \cos \psi + jI \sin \psi$$

$$\underline{I} = I \cos \psi + jI \sin \psi = \omega CU \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + j\omega CU \sin(\theta + \frac{\pi}{2})$$

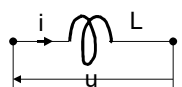
$$\underline{I} = -\omega CU \sin \theta + j\omega CU \cos \theta = j\omega C(U \cos \theta + jU \sin \theta)$$

$$\underline{I} = j\omega CU$$

$$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I}$$

## Prosto kolo sa kalemom

- Vremensko opisivanje – analitički prikaz



$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \quad i_L = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \psi)$$

$$u_L = L \frac{d}{dt} [I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \psi)] = LI\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \psi) \cdot \omega$$

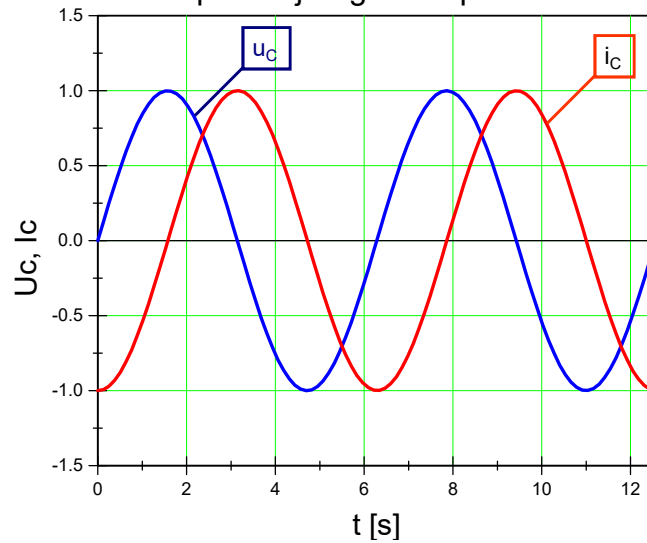
$$u_L = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta)$$

$$\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \implies u_L = \omega LI\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2})$$

$$\begin{aligned} U &= \omega LI \\ \theta &= \psi + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

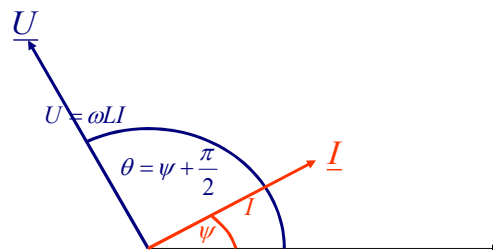
## Prosto kolo sa kalemom

- Vremensko opisivanje - grafički prikaz



## Prosto kolo sa kalemom

- Fazorsko opisivanje



## Prosto kolo sa kalemom

- Kompleksno opisivanje

$$i_c = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \psi) \mapsto \underline{I} = i_1 + ji_2 = I \cos \psi + jI \sin \psi$$

$$u_c = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta) \mapsto \underline{U} = u_1 + ju_2 = U \cos \theta + jU \sin \theta$$

$$\underline{U} = U \cos \theta + jU \sin \theta = \omega LI \cos(\psi + \frac{\pi}{2}) + j\omega LI \sin(\psi + \frac{\pi}{2})$$

$$\underline{U} = -\omega LI \sin \psi + j\omega LI \cos \psi = j\omega L(I \cos \psi + jI \sin \psi)$$

$$\underline{U} = j\omega L \underline{I}$$

$$\underline{I} = \frac{1}{j\omega L} \underline{U}$$

## Prosta električna kola naizmenične struje

- Veze između napona i struje potrošača

	Vremenski	Efektivne vrednosti	Fazni stav	Kompleksno
R	$u = Ri$	$U = RI$	$\theta = \psi$	$\underline{U} = R \underline{I}$
L	$u = L \frac{di}{dt}$	$U = \omega LI$	$\theta + \frac{\pi}{2} = \psi$	$\underline{U} = j\omega L \underline{I}$
C	$i = C \frac{du}{dt}$	$U = \frac{1}{\omega C} I$	$\theta = \psi + \frac{\pi}{2}$	$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I}$

## Impedansa

- Efektivne vrednosti napona proporcionalne su efektivnim vrednostima struje
- Slično proporcionalnosti napona i struje kod jednosmerne struje
- Odnos napona i struje ima ulogu otpornosti kod jednosmerne struje

$$U = ZI$$

$$\boxed{Z = \frac{U}{I}} \quad [Z] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{V}{A} = \Omega$$

Impedansa električnog elementa je odnos efektivnih vrednosti napona i struje

$$\boxed{Z_R = \frac{U}{I} = R}$$

$$\boxed{Z_C = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C}}$$

$$\boxed{Z_L = \frac{U}{I} = \omega L}$$

Impedansa električnog elementa zavisi od frekvence naizmenične struje

## Kompleksna impedansa

- Kompleksne vrednosti napona proporcionalne su kompleksnim vrednostima struje

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}} \quad [\underline{Z}] = \frac{[\underline{U}]}{[\underline{I}]} = \frac{V}{A} = \Omega$$

Kompleksna impedansa električnog elementa je odnos kompleksnih vrednosti napona i struje

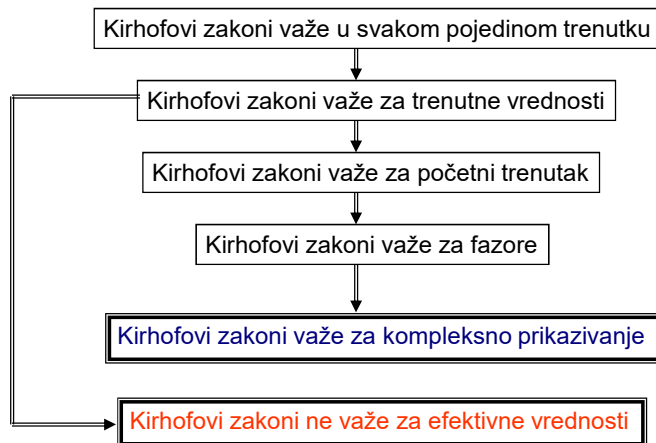
$$\boxed{\underline{Z}_R = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R}$$

$$\boxed{\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}}$$

$$\boxed{\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = j\omega L}$$

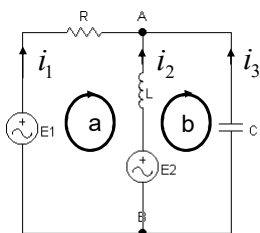
## Složena električna kola naizmjenične struje

- Osnova za rešavanje električnih kola su Kirhofovi zakoni



## Složena električna kola naizmjenične struje

- Primer



$$A: \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

$$a: \underline{E}_1 - \underline{Z}_R \underline{I}_1 + \underline{Z}_L \underline{I}_2 - \underline{E}_2 = 0$$

$$b: \underline{E}_2 - \underline{Z}_L \underline{I}_2 + \underline{Z}_C \underline{I}_3 = 0$$

---


$$A: \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

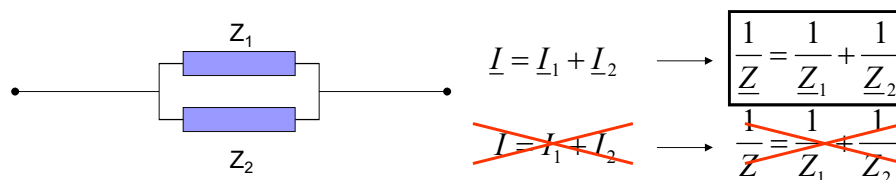
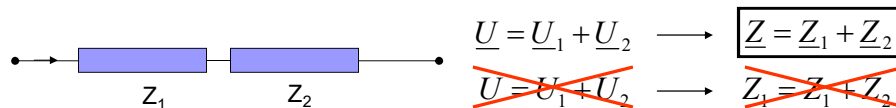
$$a: \underline{E}_1 - R \underline{I}_1 + j\omega L \underline{I}_2 - \underline{E}_2 = 0$$

$$b: \underline{E}_2 - j\omega L \underline{I}_2 - \frac{j}{\omega C} \underline{I}_3 = 0$$

## Složena električna kola naizmenične struje

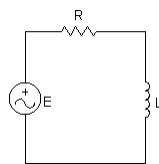
### ■ Vezivanje impedansi

- redno vezivanje
- paralelno vezivanje



## Složena električna kola

### ■ Primer



$$E = 220V \quad f = 50Hz \quad \omega = 314s^{-1} \quad R = 100\Omega \quad L = 100mH$$

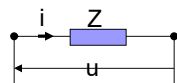
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \quad \underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L = R + j\omega L = (100 + j31,4)\Omega$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{220V}{(100 + j31,4)\Omega} = \frac{220}{100 + j31,4} A \cdot \frac{100 - j31,4}{100 - j31,4} = \frac{22000 - j6908}{100^2 + (31,4)^2} A = \frac{22000 - j6908}{10986} A$$

$$\underline{I} = (2 - j0,63)A$$

$I = \sqrt{2^2 + 0,63^2} A = 2,1 A \quad Z = \frac{U}{I} = \frac{220V}{2,1A} = 105\Omega$   
 $tg \psi = \frac{-0,63}{2} \Rightarrow \varphi = -17,5^\circ$

## Kompleksna impedansa potrošača

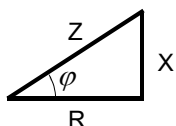


$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = z_1 + jz_2 = R + jX \quad \leftarrow \text{reaktansa}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U(\cos\theta + j\sin\theta)}{I(\cos\psi + j\sin\psi)} = \frac{Ue^{j\theta}}{Ie^{j\psi}} = \frac{U}{I} e^{j(\theta-\psi)}$$

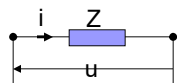
$$\underline{Z} = \frac{U}{I} e^{j(\theta-\psi)} = Ze^{j\varphi} = Z(\cos\varphi + j\sin\varphi) = R + jX$$

$$\varphi = \theta - \psi \quad R = Z \cdot \cos\varphi \quad X = Z \cdot \sin\varphi$$



Trougao impedanse  $\varphi_R = 0 \quad \varphi_C = -\frac{\pi}{2} \quad \varphi_L = +\frac{\pi}{2}$

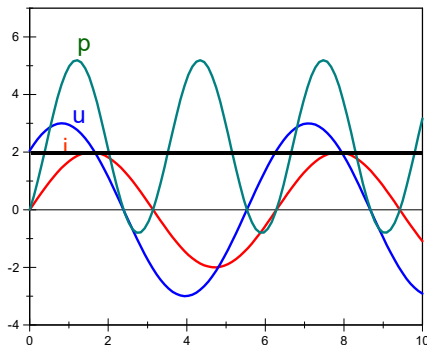
## Snaga potrošača naizmenične struje



$$p = ui = 2 \cdot UI \cdot \sin(\omega t) \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

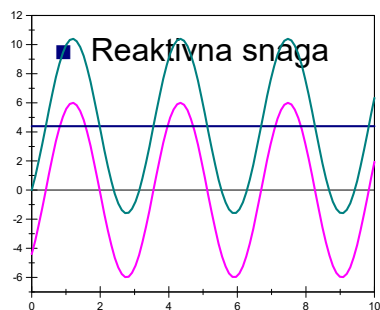
$$p = ui = UI \cos\varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi)$$



$$P = UI \cos\varphi \quad [P] = W$$

Srednja ili **aktivna** snaga

## Snaga naizmenične struje



- Snaga osciluje sa srednjom vrednošću  $UI\cos(\varphi)$  i amplitudom  $UI$
- Električni element nekad radi kao potrošač, a nekada kao generator
- Električni element u delu perioda prima energiju od izvora, a u delu perioda vraća energiju izvoru
- Deo energije koji se vraća izvoru je reaktivna energija
- Srednja vrednost reaktivne energije je nula

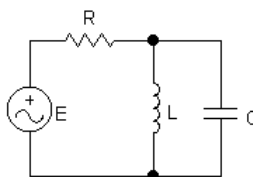
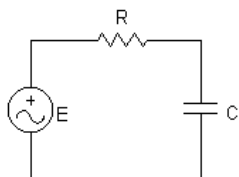
Amplituda reaktivne snage

$$Q = UI \sin \varphi \quad [Q] = \text{Var}$$

## Snaga naizmenične struje

### ■ Reaktivna snaga

- nepovoljna pojava u kolima naizmenične struje
- prenos reaktivne snage u oba smera je rasipanje energije
- mera energetske kvaliteta elementa je **faktor snage**  $\cos \varphi$
- naplaćuje se samo aktivna snaga
- distributeri električne energije uslovljavaju snabdevanje visokom vrednošću faktora snage
- postupak povećanja faktora snage se naziva **kompensacija**





## Snaga naizmenične struje

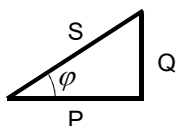
### ■ Trougao snage

$$P = UI \cos \varphi$$

$$Q = UI \sin \varphi$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI$$

prividna snaga

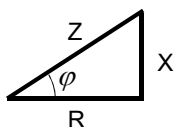


Trougao snage i trougao impedanse su slični

$$S = UI = ZI^2$$

$$P = UI \cos \varphi = ZI^2 \cos \varphi = RI^2$$

$$Q = UI \sin \varphi = ZI^2 \sin \varphi = XI^2$$

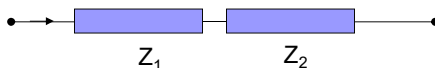


## Snaga naizmenične struje

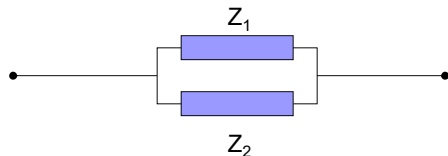
### ■ Kompleksna snaga

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*$$

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = \underline{Z} \underline{I} \underline{I}^* = \underline{Z} \underline{I}^2 = RI^2 + jXI^2 = P + jQ$$



$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = (\underline{U}_1 + \underline{U}_2) \underline{I}^* = \underline{U}_1 \underline{I}^* + \underline{U}_2 \underline{I}^* = \underline{S}_1 + \underline{S}_2$$

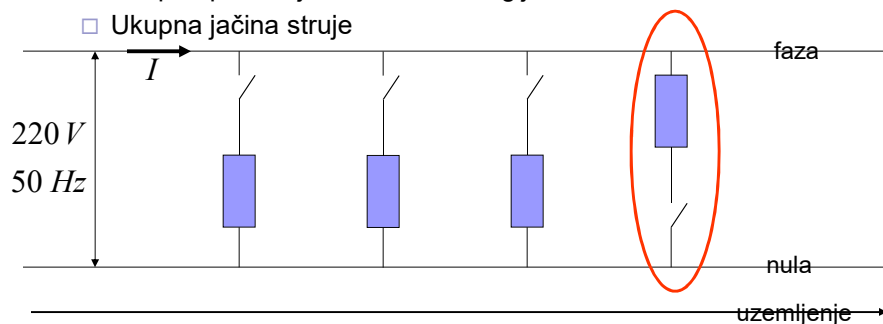


$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = \underline{U} (\underline{I}_1^* + \underline{I}_2^*) = \underline{U} \underline{I}_1^* + \underline{U} \underline{I}_2^* = \underline{S}_1 + \underline{S}_2$$

## Snaga naizmenične struje

- Proračun električne instalacije

- Ukupna potrošnja električne energije
- Ukupna jačina struje



$$\underline{S} = (\underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \dots + \underline{S}_n) = (P_1 + P_2 + \dots + P_n) + j \cdot (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n)$$

$$S = \sqrt{(P_1 + P_2 + \dots + P_n)^2 + (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n)^2}$$

$$S = UI \Rightarrow I = \frac{S}{U}$$

## Snaga naizmenične struje

- Aktivna snaga se pretvara u toplotu i mehanički rad i plaćamo je
- Reaktivnu snagu vraćamo izvorima električne energije i ne plaćamo je
- Prividna snaga se koristi za dimenzionisanje električnih instalacija

# Jednosmerna i naizmjenična električna struja

Poređenje

## Prednosti naizmjenične struje u odnosu na jednosmernu

- Mogućnost transformisanja
- Mogućnost polifaznih sistema za prenos energije
- Mogućnost formiranja obrtnog magnetnog polja
- Mogućnost konstrukcije motora bez kolektorskog sklopa

### Prednosti jednosmerne struje u odnosu na naizmjeničnu

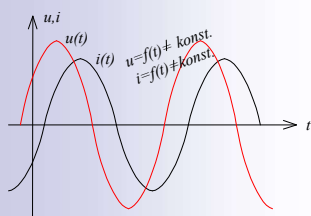
- Brzinom rada rednog motora sa jednosmernom strujom se upravlja jednostavno
- Jednosmerni motori mogu da menjaju smer okretanja promenom smera struje koja teče kroz induktor (namotaj na statoru)

### Ispravljanje naizmjenične struje

- Grupa motor-generator
  - naizmjenični motor pokreće jednosmerni generator
  - skupo rešenje
  - mali koeficijent korisnog dejstva
  - koristi se za velike snage
- Ispravljači
  - elektronski uređaji
  - male snage

# Izmjenični krugovi

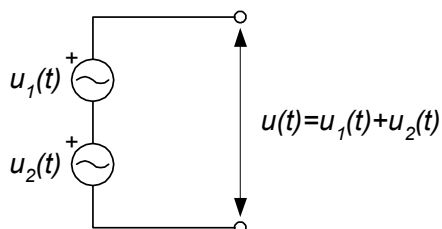
- Sinusoidalne veličine - amplituda, frekvencija, fazni pomak.
- Vektori - kompleksni račun.
- Otpor, induktivitet i kapacitet u izmjeničnom strujnom krugu.
- Ohmov zakon u izmjeničnom strujnom krugu.
- I i II Kirchhoffov zakon u izmjeničnom strujnom krugu.
- Vektorski dijagram napona i struja.
- Topografski dijagram.



## 1. zadatak

Dva izvora izmjeničnog sinusoidalnog napona spojena su u seriju. Odredite ukupni napon kojeg daju ovi izvori.

- $f = 50$  [Hz]
- $U_{\text{MAX1}} = U_{\text{MAX2}} = 100$  [V]
- $\varphi_1 = 30$  [°]
- $\varphi_2 = 60$  [°]



## Uvodni pojmovi

- Matematička funkcija koja opisuje sinusoidalnu veličinu:

$$x(t) = A \cdot \sin[\alpha(t)]$$

gdje je:

- $x$  promatrana veličina koja se mijenja po sinusoidalnom zakonu,
- $A$  predstavlja maksimalnu vrijednost (amplitudu) koju ta veličina može poprimiti,
- $\alpha(t)$  argument funkcije *sinus*, koji je funkcija vremena  $t$ .

- U strujnim krugovima radi se o naponima i strujama:

$$u(t) = U_{MAX} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u) \text{ [V]}$$

$$i(t) = I_{MAX} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i) \text{ [A]}$$

gdje je:

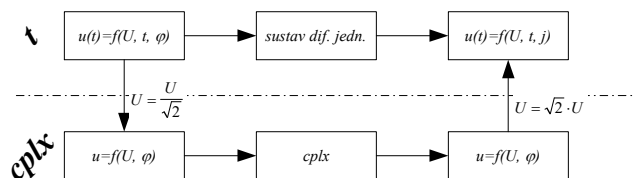
- $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$  [rad/s] - kružna frekvencija,
- $f$  [Hz], - frekvencija ( $f = 1/T$ ,  $T$ [s] - period),
- $\varphi$  [rad], [°] - fazni pomak.



## Uvodni pojmovi

- Rješavanje zadataka s vremenski promjenljivim (sinusoidalnim) veličinama:

- direktno rješavanje problema u vremenskom području - vrlo komplicirano (rješavanje sustava dif. jednačbi),
- rješavanje problema preslikavanjem u kompleksno područje čime se izbjegava vremenska dimenzija problema i pojednostavljuje proračun.



- Preslikavanje u kompleksno područje vrši se odgovarajućim matematičkim postupkom.

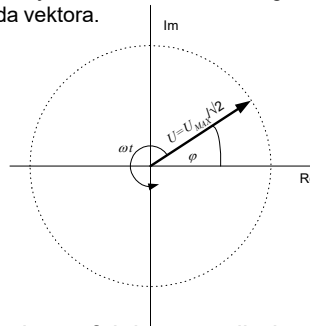


## Uvodni pojmovi

- Može se pokazati da vrijedi izraz:

$$U_{MAX} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = \text{Im}\{U_{MAX} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}\}$$

- Izraz u vitičastoj zagradi na desnoj strani može se predočiti s rotirajućim vektorom, pri čemu je:
  - $\omega$  - kutna brzina kojom vektor rotira oko svog hvatišta,
  - $U_{MAX}$  - amplituda vektora.

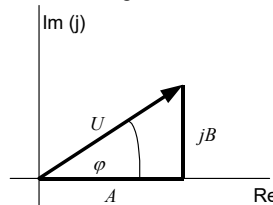


- Kako bi se baratalo s efektivnom vrijednosti sinusoidalne veličine vrši se dijeljenje amplitude s faktorom  $\sqrt{2}$ .



## Uvodni pojmovi

- Budući da se radi o dvodimenzionim vektorima oni se najčešće zapisuju uz pomoć kompleksnih brojeva:
  - x os označava se kao realna os,
  - y os označava se kao imaginarna os i sve veličine dobivaju prefiks j.



- Pri tome je:

$$A = U \cdot \cos(\varphi)$$

$$B = U \cdot \sin(\varphi)$$

odnosno:

$$U = \sqrt{A^2 + B^2}; \quad \varphi = \arctg\left(\frac{B}{A}\right)$$



## Uvodni pojmovi

- Stoga vrijede sljedeći načini zapisa vektora:

$$\dot{U} = A + jB$$

$$\dot{U} = U \angle \varphi$$

- Pri tome je zbrajanje lakše provesti s prvim načinom zapisa:

$$\dot{U}_1 \pm \dot{U}_2 = (A_1 + jB_1) \pm (A_2 + jB_2) = (A_1 \pm A_2) + j(B_1 \pm B_2)$$

dok je množenje i dijeljenje jednostavnije s drugim načinom zapisa:

$$\dot{U}_1 \cdot \dot{U}_2 = (U_1 \angle \varphi_1) \cdot (U_2 \angle \varphi_2) = U_1 \cdot U_2 \angle (\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{U_1 \angle \varphi_1}{U_2 \angle \varphi_2} = \frac{U_1}{U_2} \angle (\varphi_1 - \varphi_2)$$



## Rješenje u vremenskoj domeni

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

$$u(t) = 100 \cdot \sin(\omega \cdot t + 30^\circ) + 100 \cdot \sin(\omega \cdot t + 60^\circ)$$

- Upotrebom trigonometrijskih formula (zbroj i razlika kuteva):

$$u(t) = 100 \cdot [\sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(30^\circ) + \sin(30^\circ) \cdot \cos(\omega \cdot t)] \\ + 100 \cdot [\sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(60^\circ) + \sin(60^\circ) \cdot \cos(\omega \cdot t)]$$

- Kad se izračunaju vrijednosti sin i cos za kuteve 30° i 60°:

$$u(t) = 100 \cdot \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) \cdot [\sin(\omega \cdot t) + \cos(\omega \cdot t)]$$

$$u(t) = 100 \cdot \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left[ \sin(\omega \cdot t) + \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \right]$$





- Daljnjom primjenom trigonometrijskih formula (zbroj i razlika funkcija):

$$u(t) = 100 \cdot \left( \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) \cdot 2 \cdot \sin\left( \frac{\omega \cdot t + \omega \cdot t + \frac{\pi}{2}}{2} \right) \cdot \cos\left( \frac{\omega \cdot t - \omega \cdot t - \frac{\pi}{2}}{2} \right)$$

$$u(t) = 100 \cdot \left( \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) \cdot 2 \cdot \sin\left( \omega \cdot t + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos\left( -\frac{\pi}{4} \right)$$

$$u(t) = 100 \cdot \left( \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) \cdot 2 \cdot \sin\left( \omega \cdot t + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$u(t) = 50 \cdot \sqrt{2} \cdot (1+\sqrt{3}) \cdot \sin\left( \omega \cdot t + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$u(t) = 193 \cdot \sin(\omega \cdot t + 45^\circ) \text{ [V]}$$



- Zamislite složenost izračunavanja sume/umnoška proizvoljnog broja napona  $u_i(t)$  s različitim amplitudama i fazama!

## Rješenje u kompleksnoj domeni

- Upotrebom kompleksnog računa proračun se znatno pojednostavnjuje:

$$u_1(t) = 100 \cdot \sin(\omega \cdot t + 30^\circ) \Rightarrow \dot{U}_1 = \frac{100}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ \text{ [V]}$$

$$u_2(t) = 100 \cdot \sin(\omega \cdot t + 60^\circ) \Rightarrow \dot{U}_2 = \frac{100}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ \text{ [V]}$$

- Budući da se traži suma napona:

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$

koristit će se za to odgovarajući oblik:

$$\dot{U}_1 = \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \cos(30^\circ) + j \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \sin(30^\circ)$$

$$\dot{U}_2 = \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \cos(60^\circ) + j \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \sin(60^\circ)$$



- Zbroj tih napona jednak je:

$$\dot{U} = \left[ \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \cos(30^\circ) + j \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \sin(30^\circ) \right] + \left[ \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \cos(60^\circ) + j \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \sin(60^\circ) \right]$$

$$\dot{U} = \frac{100}{\sqrt{2}} [\cos(30^\circ) + \cos(60^\circ)] + j \frac{100}{\sqrt{2}} [\sin(30^\circ) + \sin(60^\circ)]$$

$$\dot{U} = \frac{100}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right] + j \frac{100}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

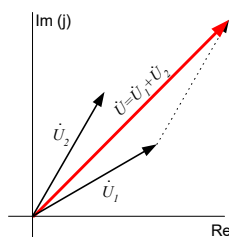
$$\dot{U} = 96.5 + j96.5 \text{ [V]}$$

ili

$$\dot{U} = 136.5 \angle 45^\circ \text{ [V]}$$



- Vektorski dijagram dobije se ucrtavanjem izračunatih vektora napona:



- Provjera:

$$u(t) = 193 \cdot \sin(\omega \cdot t + 45^\circ) \text{ [V]} \Leftrightarrow \dot{U} = 136.5 \angle 45^\circ \text{ [V]}$$

$$U_{MAX} = 193 \Leftrightarrow \frac{193}{\sqrt{2}} = 136.5 \Leftrightarrow U = 136.5$$

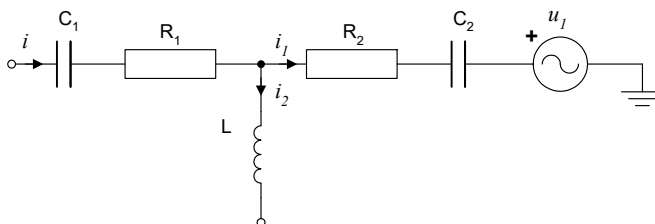
$$\varphi = 45^\circ \Leftrightarrow \varphi = 45^\circ$$



## 2. zadatak

Odredite izraz za trenutnu vrijednost napona na kondenzatoru  $C_1$ .  
Zadano:

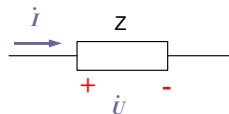
- $u_1(t) = 15 \cdot \sin(314 \cdot t - \pi/2)$  [V]
- $i_1(t) = 2 \cdot \sin(314 \cdot t + \pi/6)$  [A]
- $i_2(t) = 3 \cdot \sin(314 \cdot t - \pi/3)$  [A]
- $R_1 = 5$  [ $\Omega$ ]
- $R_2 = 3$  [ $\Omega$ ]
- $C_1 = 1$  [mF]
- $C_2 = 200$  [ $\mu$ F]
- $L = 7$  [mH]



## Uvodni pojmovi

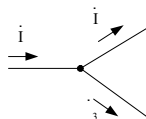
- Ohmov zakon:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z} [\text{A}]$$



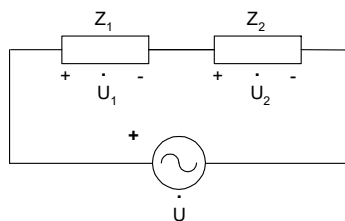
- I Kirchhoffov zakon:

$$\sum_{i=1}^n \dot{i}_i = 0$$



- II Kirchhoffov zakon:

$$\sum_{i=0}^n \dot{U}_i = 0$$



## Rješenje zadatka

- Napon na kondenzatoru  $C_1$  iznosi:

$$\dot{U}_{C1} = \dot{I} \cdot \dot{X}_{C1}$$

- Impedancija kondenzatora:

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega \cdot C_1} = \frac{1}{314 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 3.2 [\Omega]$$

$$\dot{X}_{C1} = -jX_{C1} = -j3.2 [\Omega]$$

- Za čvor vrijedi I Kirchhoffov zakon:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

- Struje u kompleksnom području:

$$i_1(t) = 2 \cdot \sin(314 \cdot t + \pi/6) \Rightarrow \dot{I}_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ$$

$$i_2(t) = 3 \cdot \sin(314 \cdot t - \pi/3) \Rightarrow \dot{I}_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \angle -60^\circ$$



- Ukupna struja:

$$\dot{I} = \frac{2}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ + \frac{3}{\sqrt{2}} \angle -60^\circ$$

$$\dot{I} = \frac{2}{\sqrt{2}} (\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) + \frac{3}{\sqrt{2}} (\cos(-60^\circ) + j \sin(-60^\circ))$$

$$\dot{I} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2} + j \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$$

$$\dot{I} = 1.23 + j0.71 + 1.06 - j1.83$$

$$\dot{I} = 2.29 - j1.12 = \sqrt{2.29^2 + (-1.12)^2} \angle \arctg \frac{-1.12}{2.29}$$

$$\dot{I} = 2.6 \angle -26^\circ [\text{A}]$$

- Po iznosu napon na kondenzatoru  $C_1$ :

$$\dot{U}_{C1} = (2.6 \angle -26^\circ) \cdot (3.2 \angle -90^\circ) = 8.3 \angle -116^\circ [\text{V}]$$

$$u_{C1}(t) = 8.3 \cdot \sqrt{2} \sin(314 \cdot t - 116^\circ) [\text{V}]$$

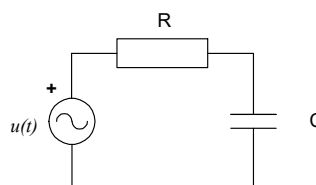


### 3. zadatak

Serijski spojeni otpor (R) i kondenzator (C) priključeni su na izvor izmjeničnog napona  $u(t)=150\cdot\sin(10^4\cdot t)$  [V]. Potrebno je odrediti:

- impedanciju Z
- struju koja teče strujnim krugom u kompleksnom obliku
- struju u obliku  $i(t)$
- nacrtajte prikaz U/I veličina u kompleksnoj ravnini

- $R = 20$  [ $\Omega$ ]
- $C = 5$  [ $\mu\text{F}$ ]
- $u(t) = 150\cdot\sin(10^4\cdot t)$  [V]



### Uvodni pojmovi

- Strujno-naponske prilike na otporu, induktivitetu i kapacitetu kod sinusoidalnih napona i struja (kompleksno područje):

- Otpor (R):

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R}$$

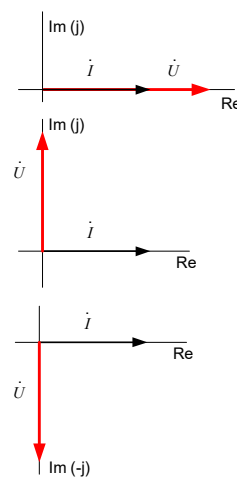
$R$  - radni otpor ( $R; R\angle 0^\circ$ )

- Induktivitet (L):  $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{jX_L}$

$jX_L = j\omega \cdot L$  - ind. otpor ( $X_L\angle 90^\circ$ )

- Kapacitet (C):  $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{-jX_C}$

$-jX_C = \frac{1}{j\omega \cdot C}$  - kap. otpor ( $X_C\angle -90^\circ$ )



## Rješenje zadatka

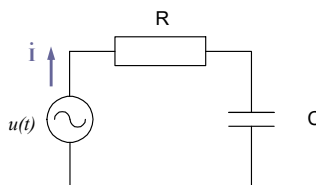
- Impedancija kruga određuje se na sljedeći način:

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + \frac{1}{j\omega \cdot C} = R + \frac{1}{j\omega \cdot C} \cdot \frac{j}{j} = R - j \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$Z = 20 - j \frac{1}{10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 20 - j20 [\Omega]$$

$$Z = 20 \cdot \sqrt{2} \angle -45^\circ [\Omega]$$

- Krug se sastoji od serije otpora i kondenzatora pa u krugu teče ista struja  $I$  kroz sve elemente.

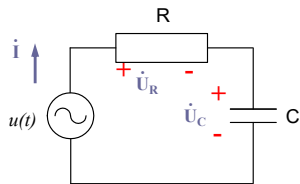


Napon izvora u kompleksnom obliku:

$$u(t) = 150 \cdot \sin(10^4 \cdot t)$$

$$\dot{U} = \frac{150}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ$$

- Tako definirana struja stvara padove napona na pojedinim elementima.



Struja se određuje pomoću Ohmovog zakona u kompleksnom obliku.

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{\frac{150}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{20\sqrt{2} \angle -45^\circ} = \frac{150}{20\sqrt{2}} \angle 0^\circ - (-45^\circ)$$

$$\dot{I} = 3.75 \angle +45^\circ [\text{A}]$$

- U vremenskoj domeni struja ima oblik:

$$i(t) = I \cdot \sqrt{2} \sin(\omega \cdot t + \varphi_i) = 3.75 \cdot \sqrt{2} \sin(10^4 \cdot t + 45^\circ) [\text{A}]$$

- Naponi na otporu i kondenzatoru :

$$\dot{U}_R = \dot{I} \cdot R = (3.75 \angle 45^\circ) \cdot (20 \angle 0^\circ) = 75 \angle 45^\circ [\text{V}]$$

$$\dot{U}_C = \dot{I} \cdot (-jX_C) = (3.75 \angle 45^\circ) \cdot (20 \angle -90^\circ) = 75 \angle -45^\circ [\text{V}]$$



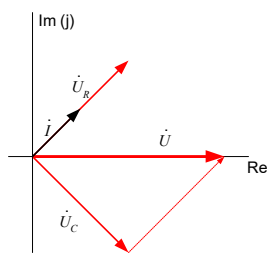
- Napon na izvoru jednak je zbroju napona na otporu i kondenzatoru:

$$\dot{U}_R + \dot{U}_C = (75 \angle 45^\circ) + (75 \angle -45^\circ)$$

$$\dot{U}_R + \dot{U}_C = [75 \cdot \cos(45^\circ) + j75 \cdot \sin(45^\circ)] + [75 \cdot \cos(-45^\circ) + j75 \cdot \sin(-45^\circ)]$$

$$\dot{U}_R + \dot{U}_C = 2 \cdot 75 \cdot \cos(45^\circ) = 75 \cdot \sqrt{2} [\text{V}] = \dot{U}$$

- Crtanjem dobivenih vektora napona i vektora struje dolazi se do vektorskog dijagrama:



Dijagram prikazuje odnose koji su već ranije objašnjeni:

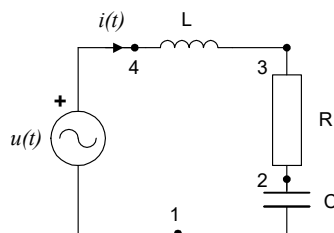
- Na otporu su struja i napon *u fazi*.
- Na kapacitetu struja prethodi naponu za četvrtinu periode.
- Ukupan napon izvora jednak je **vektorskoj** sumi napona na pojedinim elementima.



## 4. zadatak

Za spoj prema slici nacrtajte vektorski i topografski dijagram. Zadano:

- $u(t) = 20 \cdot \sin \omega \cdot t$  [V]
- $R = 10$  [ $\Omega$ ]
- $X_L = 20$  [ $\Omega$ ]
- $X_C = 10$  [ $\Omega$ ]







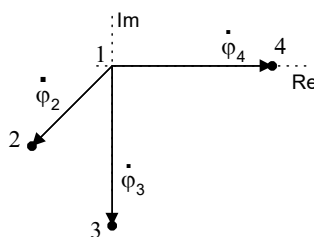
- Topografski dijagram predstavlja prikaz potencijala mreže u kompleksnoj ravnini.
- Za određivanje topografskog dijagrama potrebno je odrediti referentnu točku.
- Ako odaberemo točku 1 za referentnu vrijedi:

$$\dot{\phi}_1 = 0$$

$$\dot{\phi}_2 = \dot{U}_{21} = \dot{I} \cdot \dot{X}_C = (1 \angle -45^\circ) \cdot (10 \angle -90^\circ) = 10 \angle -135^\circ [\text{V}]$$

$$\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}_2 + \dot{I} \cdot R = (10 \angle -135^\circ) + (1 \angle -45^\circ) \cdot (10 \angle 0^\circ) = 10\sqrt{2} \angle -90^\circ [\text{V}]$$

$$\dot{\phi}_4 = \dot{\phi}_3 + \dot{I} \cdot \dot{X}_L = (10\sqrt{2} \angle -90^\circ) + (1 \angle -45^\circ) \cdot (20 \angle 90^\circ) = 10\sqrt{2} \angle 0^\circ [\text{V}]$$



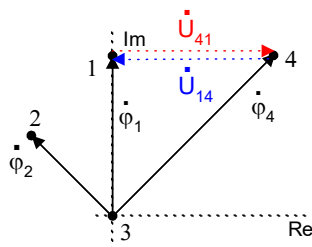
- Ako odaberimo točku 3 za referentnu vrijedi:

$$\dot{\phi}_3 = 0$$

$$\dot{\phi}_4 = \dot{U}_{43} = \dot{I} \cdot \dot{X}_L = (1 \angle -45^\circ) \cdot (20 \angle 90^\circ) = 20 \angle 45^\circ [\text{V}]$$

$$\dot{\phi}_2 = \dot{U}_{23} = -\dot{I} \cdot R = -(1 \angle -45^\circ) \cdot (10 \angle 0^\circ) = 10\sqrt{2} \angle 135^\circ [\text{V}]$$

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 - \dot{I} \cdot \dot{X}_C = (10 \angle 135^\circ) - (1 \angle -45^\circ) \cdot (10 \angle -90^\circ) = 10\sqrt{2} \angle 90^\circ [\text{V}]$$



Napon između dvije točke definiran je kao:

$$\dot{U}_{41} = \dot{\phi}_4 - \dot{\phi}_1$$

$$\dot{U}_{14} = \dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_4$$

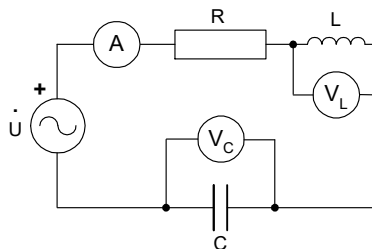
- Iz dijagrama je vidljivo da bez obzira koju referentnu točku odabrali razlika potencijala između dviju točki predstavlja isti vektor.



## 5. zadatak

Krug se sastoji od elemenata RLC. Na induktivitetu vlada pad napona  $U_L$ , a na kondenzatoru  $U_C$  uz napon na stezaljkama kruga  $U$ . U krugu teče struja  $I$ . Odredite RLC i  $\cos \varphi$ . Zadano:

- $U_L = 660$  [V]
- $U = 220$  [V]
- $U_C = 500$  [V]
- $R = 10$  [ $\Omega$ ]
- $f = 50$  [Hz]
- $I = 11$  [A]



## Rješenje zadatka

- Zadatak započinjemo crtanjem vektorskog dijagrama:

Pretpostavimo proizvoljnu fazu struje  $I$ , odnosno:

$$\dot{I} = 11 \angle 0^\circ$$

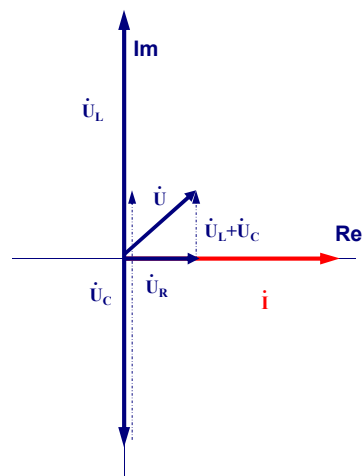
Napon na kondenzatoru kasni za strujom  $I$  za  $90^\circ$ .

Napon na zavojnici prethodi struji za  $90^\circ$ .

Napon na otporu je u fazi sa strujom.

Napon izvora jednak je vektorskom zbroju napona na svim elementima u krugu.

$$\dot{U} = \dot{U}_C + \dot{U}_L + \dot{U}_R$$



- Iz vektorskog dijagrama slijedi:

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2$$

- Napon na otporu R:

$$U_R = I \cdot R$$

- Poznavajući prethodno, R se može odrediti na sljedeći način:

$$R = \sqrt{\frac{U^2 - (U_L - U_C)^2}{I^2}} = \sqrt{\frac{200^2 - (660 - 500)^2}{11^2}} = 14 [\Omega]$$

- Kapacitet kondenzatora i induktivitet zavojnice određujemo:

$$U_C = I \cdot X_C = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} \Rightarrow C = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot U_C} = \frac{11}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 500} = 70.8 [\mu\text{F}]$$

$$U_L = I \cdot X_L = I \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \Rightarrow L = \frac{U_L}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot I} = \frac{660}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 11} = 0.19 [\text{H}]$$

- $\cos \varphi$  određuje se iz vektorskog dijagrama.

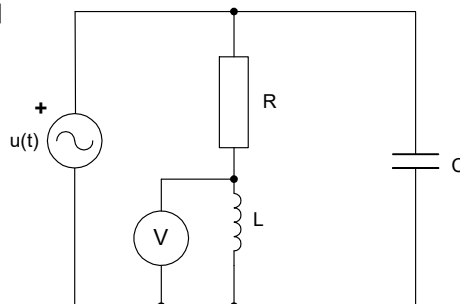
$$\cos \varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{I \cdot R}{U} = \frac{11 \cdot 14}{200} = 0.7 \text{ (induktivno)}$$



## 6. zadatak

Kombinacija prema slici priključena je na izvor napajanja  $u(t)$ . Ako voltmetar mjeri napon  $U_V$ , a između napona i ukupne struje u krugu ne postoji fazni pomak, izračunajte vrijednosti  $R_L$  i  $X_L$ . Zadáno:

- $u(t) = 100 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \omega \cdot t [\text{V}]$
- $U_V = 60 [\text{V}]$
- $X_C = 10 [\Omega]$



## Rješenje zadatka

- Zadatak započinjemo crtanjem vektorskog dijagrama:

Prvo ucrtavamo napon izvora i vektor struje koji su u fazi.

Budući da se radi o paralelnom spoju, napon na seriji R i L te na kondenzatoru je jednak naponu izvora. Iz toga slijede vektori struja u granama.

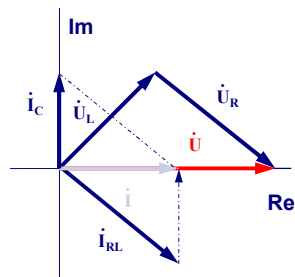
$$\dot{U} = \dot{U}_{RL} = \dot{U}_C$$

Zbroj struja u granama mora dati ukupnu struju u krugu, koja mora biti u fazi s ukupnim naponom u krugu.

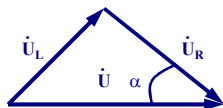
$$\dot{I} = \dot{I}_{RL} + \dot{I}_C$$

Zbroj padova napona na zavojnici i otporu daju napon na izvoru.

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L$$



- Iz vektorskog dijagrama napona slijedi:



$$U^2 = U_R^2 + U_L^2$$

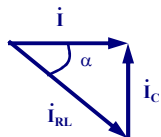
$$U_R = \sqrt{U^2 - U_L^2} = \sqrt{100^2 - 60^2} = 80 \text{ [V]}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{U_L}{U_R} = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}$$

- Struju kroz kondenzator moguće je odrediti iz:

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{\dot{X}_C} = \frac{100 \angle 0^\circ}{10 \angle -90^\circ} = 10 \angle 90^\circ \text{ [A]}$$

- Iz vektorskog dijagrama struja slijedi:



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{I_C}{I} \Rightarrow I = \frac{I_C}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{10}{\frac{3}{4}} = 13.3 \text{ [A]}$$

$$I_{RL} = \sqrt{I^2 + I_C^2} = \sqrt{13.3^2 + 10^2} = 16.7 \text{ [A]}$$

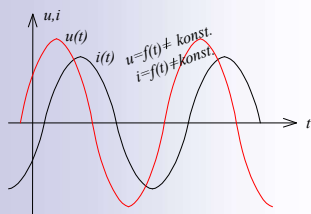
- Sada je moguće odrediti R i  $X_L$ .

$$R = \frac{U_R}{I_{RL}} = \frac{80}{16.7} = 4.8 \text{ [\Omega]} \quad X_L = \frac{U_L}{I_{RL}} = \frac{60}{16.7} = 3.6 \text{ [\Omega]}$$



# Izmjenični krugovi

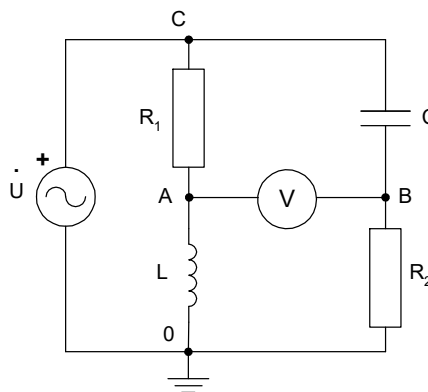
- Vektorski dijagram.
- Topografski dijagram.
- Snaga u izmjeničnim strujnim krugovima.
- Prividna, jalova i radna snaga.



## 1. zadatak

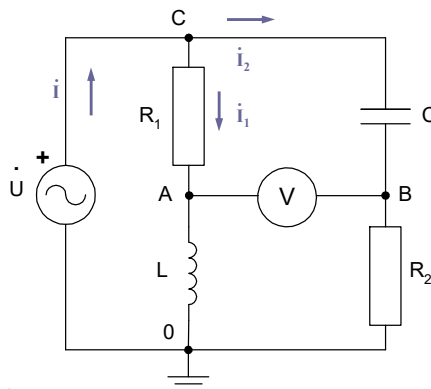
U strujnom krugu prema slici odredite napon i struju izvora, ako idealan voltmetar pokazuje 60 [V]. Nacrtajte vektorski i topografski dijagram.

- $R_1 = R_2 = 5 [\Omega]$
- $X_L = 10 [\Omega]$
- $X_C = 10 [\Omega]$



## Rješenje zadatka

- U mreži teku struje naznačenog smjera:



Pretpostavimo fazni pomak napona  $\dot{U}_{AB}$ :

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_V = 60 \angle 0^\circ [\text{V}]$$

Napon  $\dot{U}_{AB}$  može se izračunati kao:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{\varphi}_A - \dot{\varphi}_B = \dot{I}_1 \cdot jX_L - \dot{I}_2 \cdot R_2$$

Struje u granama iznose:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{R_1 + jX_L}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{R_2 - jX_C}$$

- Uvrštenjem struja u izraz za napon  $\dot{U}_{AB}$  dobiva se:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{I}_1 \cdot jX_L - \dot{I}_2 \cdot R_2 = \frac{\dot{U}}{R_1 + jX_L} \cdot jX_L - \frac{\dot{U}}{R_2 - jX_C} \cdot R_2$$



- Pomoću izraza za napon  $\dot{U}_{AB}$  moguće je izračunati napon izvora :

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U} \cdot \left( \frac{jX_L}{R_1 + jX_L} - \frac{R_2}{R_2 - jX_C} \right)$$

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\left( \frac{jX_L}{R_1 + jX_L} - \frac{R_2}{R_2 - jX_C} \right)} = \frac{60}{\frac{j10}{5 + j10} - \frac{5}{5 - j10}}$$

$$\dot{U} = \frac{60}{\frac{j10}{5 + j10} \cdot \frac{5 - j10}{5 - j10} - \frac{5}{5 - j10} \cdot \frac{5 + j10}{5 + j10}} = \frac{60}{\frac{100 + j50}{125} - \frac{25 + j50}{125}} = \frac{60}{\frac{75}{125}}$$

$$\dot{U} = 100 \angle 0^\circ [\text{V}]$$

- Pomoću struja u granama moguće je izračunati struju izvora:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{R_1 + jX_L} = \frac{100}{5 + j10} \cdot \frac{5 - j10}{5 - j10} = 4 - j8 [\text{A}]$$



$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{R_2 - jX_C} = \frac{100}{5 - j10} \cdot \frac{5 + j10}{5 + j10} = 4 + j8 \text{ [A]}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 4 - j8 + 4 + j8 = 8 \angle 0^\circ \text{ [A]}$$

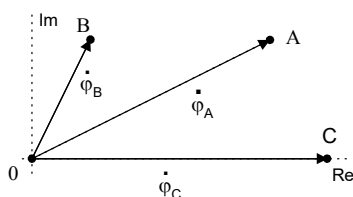
- Za topografski dijagram potrebno je odrediti potencijale svih točaka u mreži:

$$\dot{\phi}_0 = 0 \angle 0^\circ \text{ [V]}$$

$$\dot{\phi}_A = \dot{I}_1 \cdot jX_L = 8.94 \angle -63.4^\circ \cdot 10 \angle 90^\circ = 89.4 \angle 26.6^\circ \text{ [V]}$$

$$\dot{\phi}_B = \dot{I}_2 \cdot R_2 = 8.94 \angle 63.4^\circ \cdot 5 \angle 0^\circ = 44.7 \angle 63.4^\circ \text{ [V]}$$

$$\dot{\phi}_C = \dot{U}_{C0} = 100 \angle 0^\circ \text{ [V]}$$



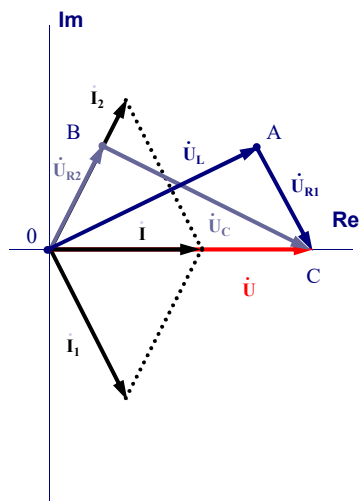
- Određivanje vektorskog dijagrama:

Vektor napona izvora je poznat te njega prvog ucrtavamo u vektorski dijagram.

Struja u prvoj grani ( $I_1$ ) kasni za naponom izvora, a struja u drugoj grani ( $I_2$ ) prethodi naponu izvora. Ukupna struja u krugu jednaka je vektorskom zbroju struja u granama.

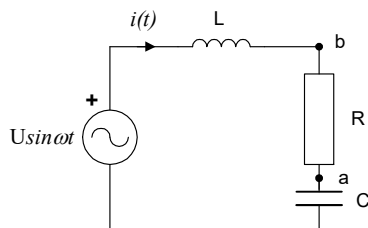
Napon na zavojnici L prethodi struji  $I_1$ , a napon na otporu  $R_1$  je u fazi s istom strujom. Napon na izvoru jednak je zbroju padova napona na L i  $R_1$ .

Napon na otporu  $R_2$  je u fazi sa strujom  $I_2$ , a napon na kondenzatoru C kasni za istom strujom. Napon na izvoru jednak je zbroju padova napona na  $R_2$  i C.



## 2. zadatak

Nacrtati vektor koji prikazuje napon  $U_{ab}$ ,  $X_L > X_C$ .



## Rješenje zadatka

- Za odrediti vektor napona  $U_{ab}$  potrebno je djelomično nacrtati vektorski dijagram.

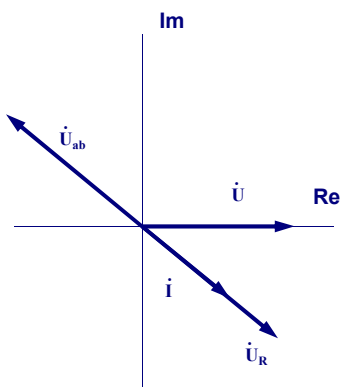
Vektor napona izvora je zadan kao napon pod  $0^\circ$ .

Budući da je  $X_L > X_C$ , struja u krugu kasni za naponom za kut manji od  $90^\circ$ .

Napon na otporu je u fazi sa strujom.

Napon  $U_{ab}$  je definiran kao:

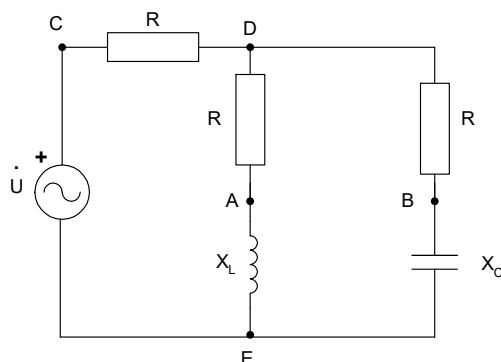
$$\dot{U}_{ab} = -\dot{U}_R$$





### 3. zadatak

U kakvom su faznom odnosu naponi  $U_{CD}$  i  $U_{AE}$  ako je  $X_L = X_C = R$ .



### Rješenje zadatka

- Da bi se odredio fazni pomak napona potrebno je nacrtati vektorski dijagram:

Pretpostavimo da je napon  $U_{DE}$  pod  $0^\circ$ .

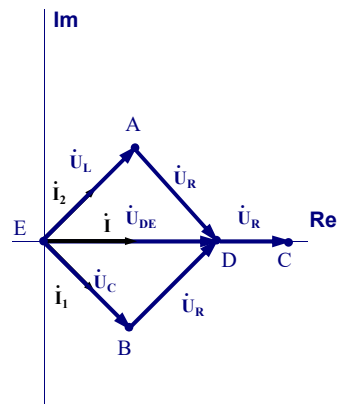
Struja u prvoj grani kasni za naponom  $U_{DE}$  za  $45^\circ$ , dok struja u drugoj grani prethodi naponu  $U_{DE}$  za  $45^\circ$  budući da je  $X_L = X_C = R$ .

Napon  $U_{DE}$  jednak je zbroju napona na zavojnici i otporu, odnosno padu napona na kondenzatoru i otporu.

Ukupna struja jednaka je zbroju struja u granama.

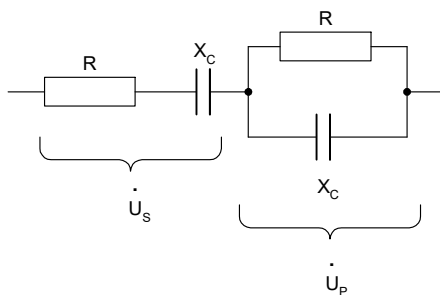
Napon izvora jednak je zbroju napona  $U_{DE}$  i napona na otporu  $R$  koji je u fazi sa strujom  $I$ .

Iz vektorskog dijagrama slijedi da napon  $U_{AE}$  prethodi naponu  $U_{CD}$  za  $45^\circ$ .



## 4. zadatak

Odredite omjer napona  $U_S/U_P$ .  $R = X_C$ .



## Rješenje zadatka

- Izrazi za napone su sljedeći:

$$\dot{U}_S = \dot{I} \cdot (R - jX_C)$$

$$\dot{U}_P = \dot{I} \cdot (R \parallel (-jX_C))$$

- Omjer napona se svodi na omjer impedancija budući da ista struja teče kroz obje impedancije:

$$\frac{\dot{U}_S}{\dot{U}_P} = \frac{\dot{I} \cdot (R - jX_C)}{\dot{I} \cdot (R \parallel (-jX_C))} = \frac{R - jX_C}{R \parallel (-jX_C)}$$

- Ukoliko se uvrsti  $R = X_C$ :

$$\frac{\dot{U}_S}{\dot{U}_P} = \frac{R - jR}{\frac{R \cdot (-jR)}{R - jR}} = \frac{(R - jR)^2}{R \cdot (-jR)} \cdot \frac{j}{j} = j \cdot (1 - 2j - 1) = 2 \angle 0^\circ$$

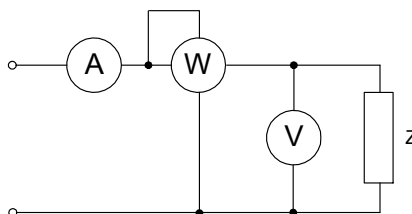
- Omjer efektivnih vrijednosti:  $\frac{U_S}{U_P} = 2$



## 5. zadatak

Izračunati impedanciju i  $\cos \varphi$  jednofaznog trošila ako instrumenti spojeni prema slici pokazuju:

- $I_{\text{ampermetra}} = 10 \text{ [A]}$
- $U_{\text{voltmetra}} = 400 \text{ [V]}$
- $P_{\text{vatmetra}} = 3 \text{ [kW]}$



## Uvodni pojmovi

- Što se tiče snage u izmjeničnim strujnim krugovima - tu se koriste sljedeći pojmovi:

- **Prividna snaga** - snaga koju izvor predaje trošilu. Predstavlja umnožak efektivnih vrijednosti napona i struje.

$$S = U \cdot I \text{ [VA]}$$

- **Radna (djelatna) snaga** - snaga koja se na trošilu disipira u toplinu, odnosno snaga koja predstavlja *iskoristivi* dio prividne snage. Kut  $\varphi$  predstavlja pomak u fazi između napona i struje.

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \text{ [W]}$$

$\cos(\varphi)$  se naziva  
i faktorom snage!

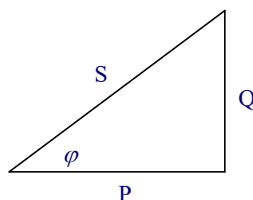
- **Jalova (reaktivna) snaga** - snaga koju trošilo vraća nazad izvoru i koja je posljedica reaktivne komponente trošila (kapacitivnost ili induktivnost).

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \text{ [VAr]}$$



## Uvodni pojmovi

- Navedene se tri veličine mogu predočiti u obliku trokuta snaga:



- Iako prividna i jalova snaga nemaju direktnu primjenu u proračunu korisne energije, ipak svaka od njih nosi važan podatak koji se koristi u proračunu električnih uređaja. Na primjer:



- Izvor napajanja - generator - mora biti u stanju dati traženu struju (uz konstantan napon), neovisno o faktoru snage.
- Budući da se jalova snaga može kompenzirati vrlo je bitno imati podatak o njenoj vrijednosti.

## Rješenje zadatka

- Snaga koju mjeri vatmetar u ovoj mreži jednaka je radnoj snazi:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

- Iz ovog izraza moguće je odrediti  $\cos \varphi$ :

$$\cos \varphi = \frac{P}{U \cdot I} = \frac{3000}{400 \cdot 10} = 0.75$$

- Iznos impedancije može se odrediti iz poznatog napona i struje na impedanciji:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{400}{10} = 40 [\Omega]$$

- Impedancija osim iznosa određena je faznim kutem, tj.

$$\cos \varphi = 0.75 \Rightarrow \varphi = \pm 41.4^\circ$$

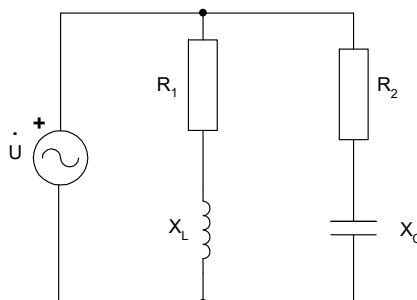
$$\dot{Z} = 40 \angle \pm 41.4^\circ [\Omega]$$



## 5. zadatak

U strujnom krugu prema slici odredite struje u krugu, radnu snagu izvora i snage na otporima  $R_1$  i  $R_2$ .

- $R_1 = 10 \text{ } [\Omega]$
- $R_2 = 15 \text{ } [\Omega]$
- $X_L = 20 \text{ } [\Omega]$
- $X_C = 15 \text{ } [\Omega]$
- $U = 200 \text{ } [\text{V}]$
- $\varphi_U = 0^\circ$



## Rješenje zadatka

- Snaga izvora određuje se na sljedeći način:

$$P = \text{Re}\{\dot{U} \cdot \dot{I}^*\}$$

- Da bi se odredila snaga izvora potrebno je odrediti struju  $I$ :

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

- Za određivanje struje  $I$  potrebno je odrediti struje u granama:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{R_1 + jX_L} = \frac{200}{10 + j20} \cdot \frac{10 - j20}{10 - j20} = 4 - j8 = 8.94 \angle -63.4^\circ \text{ } [\text{A}]$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{R_2 - jX_C} = \frac{200}{15 - j15} \cdot \frac{15 + j15}{15 + j15} = 6.67 + j6.67 = 9.43 \angle 45^\circ \text{ } [\text{A}]$$

- Uvrštenjem izračunatih vrijednosti dobije se:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 4 - j8 + 6.67 + j6.67 = 10.67 - j1.33 = 10.8 \angle -7.1^\circ \text{ } [\text{A}]$$

- Konjugirano kompleksne vrijednost struje  $I$ :

$$\dot{I} = 10.7 - j1.3 \text{ } [\text{A}] \Rightarrow \dot{I}^* = 10.7 + j1.3 \text{ } [\text{A}]$$



- Snaga izvora:

$$P = \operatorname{Re}\{\dot{U} \cdot \dot{I}^*\} = \operatorname{Re}\{(200 + j0) \cdot (10.67 + j1.33)\} = 200 \cdot 10.67 + j0 \cdot j1.33$$

$$P \approx 2140 [\text{W}]$$

- Snage na otporima  $R_1$  i  $R_2$ :

$$P_{R1} = I_1^2 \cdot R_1 = 8.94^2 \cdot 10 \approx 800 [\text{W}]$$

$$P_{R2} = I_2^2 \cdot R_2 = 9.42^2 \cdot 15 \approx 1335 [\text{W}]$$

- Snage na otporima mogu se odrediti i na drugi način:

$$\dot{U}_{R1} = \dot{I}_1 \cdot R_1 = (4 - j8) \cdot 10 = 40 - j80 [\text{V}]$$

$$P_{R1} = \operatorname{Re}\{\dot{U}_{R1} \cdot \dot{I}_1^*\} = \operatorname{Re}\{(40 - j80) \cdot (4 + j8)\} = 40 \cdot 4 + 80 \cdot 8 = 800 [\text{W}]$$

$$\dot{U}_{R2} = \dot{I}_2 \cdot R_2 = (6.67 + j6.67) \cdot 15 = 100 + j100 [\text{V}]$$

$$P_{R2} = \operatorname{Re}\{\dot{U}_{R2} \cdot \dot{I}_2^*\} = \operatorname{Re}\{(100 + j100) \cdot (6.67 + j6.67)\} = 100 \cdot 6.67 + 100 \cdot 6.67 = 1335 [\text{W}]$$

- Vidljivo je da se radna snaga koju daje izvor troši na radnim otporima  $R_1$  i  $R_2$ .

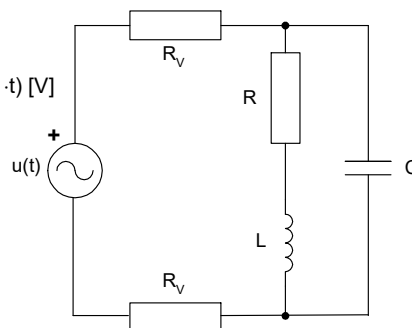
$$P = P_{R1} + P_{R2} = 800 + 1335 \approx 2135 [\text{W}]$$



## 6. zadatak

Za strujni krug prema slici treba odrediti struju, jalovu, djelatnu i prividnu snagu koju daje izvor, te gubitke u vodičima  $R_V$ . Zadano:

- $R_V = 2 [\Omega]$
- $C = 26.525 [\mu\text{F}]$
- $L = 26.525 [\text{mH}]$
- $R = 20 [\Omega]$
- $u(t) = 311 \cdot \sin(377 \cdot t) [\text{V}]$



## Rješenje zadatka

- Struja  $I$  određuje se iz Ohmovog zakona:

$$i = \frac{\dot{U}}{Z}$$

$$U = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{311}{\sqrt{2}} = 220[\text{V}] \Rightarrow \dot{U} = 220\angle 0^\circ [\text{V}]$$

$$Z = R_V + (R + jX_L) \parallel (-jX_C) + R_V$$

- Za određivanje impedancije  $Z$  potrebno je odrediti  $X_C$  i  $X_L$ :

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{377 \cdot 26.525 \cdot 10^{-6}} = 100[\Omega]$$

$$X_L = \omega \cdot L = 377 \cdot 26.525 \cdot 10^{-3} = 10[\Omega]$$

- Ukupna impedancija iznosi:

$$Z = 2 \cdot 2 + \frac{(20 + j10) \cdot (-j100)}{20 + j10 - j100} = 27.5 + j5.9 = 28\angle 12^\circ [\Omega]$$

- Struja  $I$  onda iznosi:

$$i = \frac{220\angle 0^\circ}{28\angle 12^\circ} = 7.9\angle -12^\circ [\text{A}] \Rightarrow i(t) = 11 \cdot \sin(377 \cdot t - 12^\circ) [\text{A}]$$



- Gubici u vodovima iznose:

$$P_V = 2 \cdot I^2 \cdot R_V = 2 \cdot 7.9^2 \cdot 2 = 250[\text{W}]$$

- Prividna snaga,  $S$ :

$$S = U \cdot I = 220 \cdot 7.9 = 1738[\text{VA}]$$

- Radna snaga,  $P$ :

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

$$\varphi = \angle(\dot{U}, \dot{I}) = \varphi_U - \varphi_I = 0 - (-12) = +12^\circ$$

$$P = 220 \cdot 7.9 \cdot \cos 12^\circ = 1700[\text{W}]$$

- Jalova snaga,  $Q$ :

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi = 220 \cdot 7.9 \cdot \sin 12^\circ = 360[\text{VAr}]$$

ili

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{1738^2 - 1700^2} = 360[\text{VAr}]$$

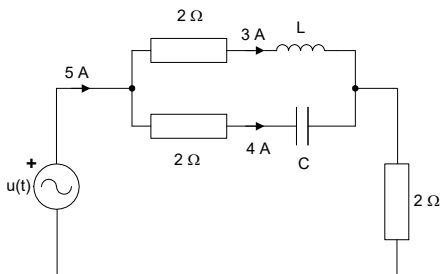
- Radna snaga koja se troši na otporu  $R$ :

$$P_R = P - P_V = 1700 - 250 = 1450[\text{W}]$$



## 7. zadatak

Izračunajte radnu snagu kruga prema slici.



Rješenje zadatka

- Radna snaga u krugu jednaka je zbroju snaga koje se troše na radnim otporima:

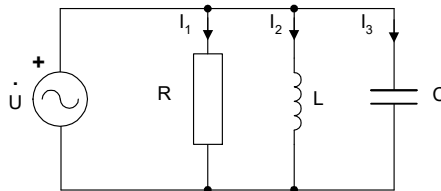
$$P = 3^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 2 + 5^2 \cdot 2 = 100 [\text{W}]$$



## 8. zadatak

U krugu prema slici zadane su struje u granama i napon izvora. Odredite prividnu snagu izvora. Zadano:

- $I_1 = 6 [\text{A}]$
- $I_2 = 10 [\text{A}]$
- $I_3 = 4 [\text{A}]$
- $U = 100 [\text{V}]$





## Rješenje zadatka

- Prividna snaga definirana je kao:

$$S = U \cdot I$$

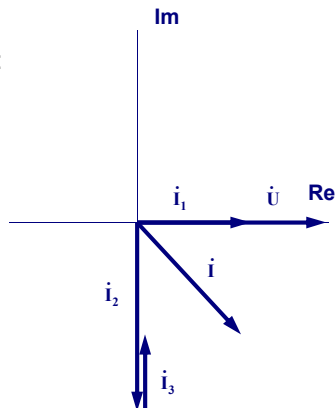
- Napon je poznat, a struja se može odrediti pomoću vektorskog dijagrama struja.

- Iz vektorskog dijagrama slijedi:

$$I^2 = I_1^2 + (I_2 - I_3)^2$$

- Prividna snaga iznosi:

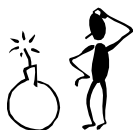
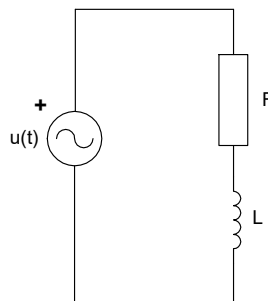
$$S = U \cdot I = 100 \cdot \sqrt{6^2 + 6^2} = 850 \text{ [VA]}$$



## 9. zadatak

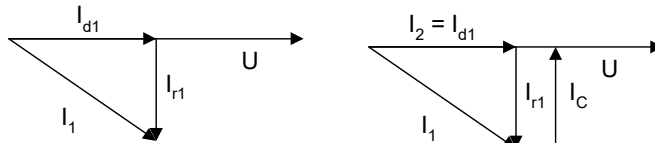
Trošilo omskog otpora  $R$  i induktiviteta  $L$  vezano je na generator izmjeničnog napona efektivne vrijednosti  $100 \text{ [V]}$  i frekvencije  $50 \text{ [Hz]}$ . Ako se paralelno trošilu veže kondenzator kapaciteta  $C = 138 \text{ [\mu F]}$ , efektivna vrijednost struje generatora će se smanjiti na polovinu prvobitne vrijednosti i bit će u fazi s naponom generatora. Odredite:

- otpor i induktivitet trošila
- djelatnu snagu koje trošilo uzima iz mreže kada mu nije paralelno priključen kondenzator
- izraz za trenutnu vrijednost struje kroz kondenzator kada je priključen paralelno trošilu



## Rješenje zadatka

- Vektorski dijagram struja za prvi slučaj i kada se trošilu priključi paralelno kondenzator:



- Da bi u drugom slučaju ukupna struja  $I_2$  bila u fazi s naponom generatora mora biti zadovoljeno:

$$I_C = I_{r1}$$

- Struja u drugom slučaju je manja za polovicu:

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1 = I_{d1} = I_1 \cdot \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{2}$$

- Struja kroz kondenzator može se odrediti kao:

$$I_C = U \cdot \omega \cdot C = 100 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 138 \cdot 10^{-6} = 4.33 \text{ [A]}$$



- Iz vektorskog dijagrama moguće je odrediti struju  $I_1$  kao:

$$I_1 \sin \varphi = \frac{I_C}{\sin \varphi} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I_1 = \frac{4.33}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 5 \text{ [A]}$$

- Otpor trošila, odnosno induktivitet trošila:

$$R = Z \cdot \cos \varphi = \frac{U}{I_1} \cdot \cos \varphi = \frac{100}{5} \cdot \frac{1}{2} = 10 \text{ [\Omega]}$$

$$X_L = Z \cdot \sin \varphi = \frac{U}{I_1} \cdot \sin \varphi = \frac{100}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 17 \text{ [\Omega]}$$

$$X_L = \omega \cdot L \Rightarrow L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{17}{2 \cdot \pi \cdot 50} = 54.4 \text{ [mH]}$$

- Radna snaga trošila, odnosno radna snaga izvora :

$$P = I_1^2 \cdot R = 5^2 \cdot 10 = 250 \text{ [W]}$$

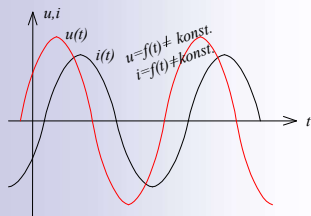
- Struja kroz kondenzator u vremenskoj domeni :

$$i_C(t) = 4.33 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314 \cdot t + 90^\circ) \text{ [A]}$$



# Izmjenični krugovi

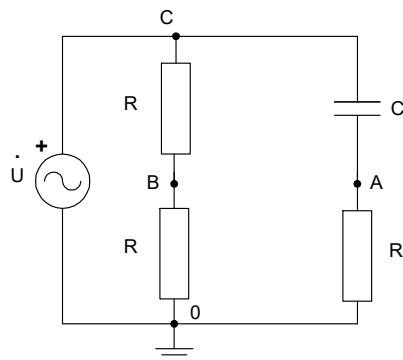
- Frekvencijske karakteristike.
- Serijska (naponska) rezonancija.
- Paralelna (strujna) rezonancija.



## 1. zadatak

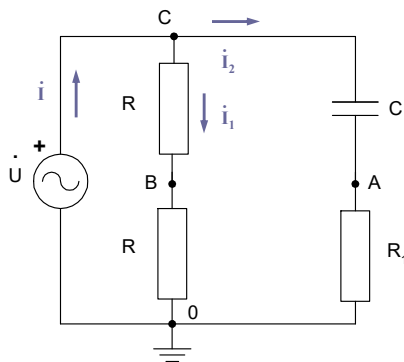
U strujnom krugu prema slici odredite promjenu potencijala točke A kao i napona  $U_{AB}$  ako:

- otpor  $R_1$  raste od  $0 \rightarrow \infty$
- $\omega$  raste od  $0 \rightarrow \infty$



## Rješenje zadatka

- U mreži teku struje naznačenog smjera:



Po iznosu struje iznose:

$$I_1 = \frac{U}{2 \cdot R}$$

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + X_C^2}}$$

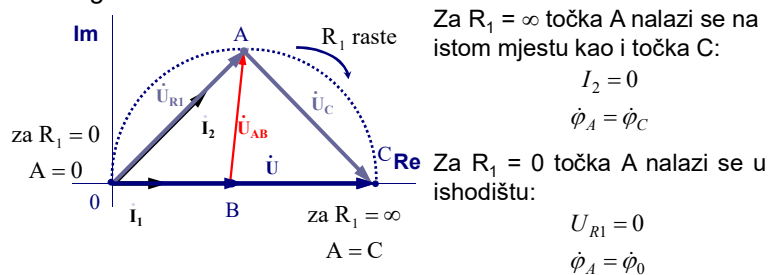
Fazni pomak struje  $I_2$  u odnosu na napon izvora:

$$\varphi = \arctg \frac{X_C}{R_1}$$

- Promjenom otpora  $R_1$  mijenja se iznos i fazni pomak struje  $I_2$ , dok se struja  $I_1$  ne mijenja.



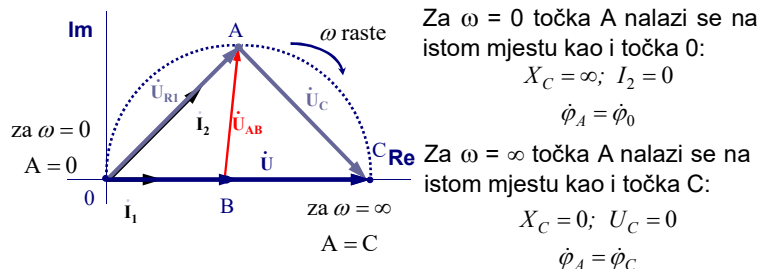
- Ovisnost potencijala i napona u krugu najjednostavnije je vidjeti u vektorskom dijagramu.
- Za proizvoljnu vrijednost otpora  $R_1$  vektorski dijagram izgleda:



- Promjenom otpora  $R_1$  od 0 do  $\infty$  točka A u v.d. mijenja položaj po polukružnici i smjerom prikaznim na slici.
- Iz dijagrama je vidljivo da iznos potencijala točke A raste, a fazni kut pada od  $90^\circ$  do  $0^\circ$ .
- Po iznosu napon  $U_{AB}$  je konstantan, fazni kut napona mijenja se od  $180^\circ$  do  $0^\circ$ .



- Na sličan način kao za prvi dio zadatka v.d. za frekvenciju različitu od 0 i  $\infty$  vrijedi:



- Promjenom frekvencije  $\omega$  od 0 do  $\infty$  točka A u v.d. mijenja položaj po polukružnici i smjerom prikaznim na slici.
- Iz dijagrama je vidljivo da iznos potencijala točke A raste, a fazni kut pada od  $90^\circ$  do  $0^\circ$ .
- Po iznosu napon  $U_{AB}$  je konstantan, fazni kut napona mijenja se od  $180^\circ$  do  $0^\circ$ .



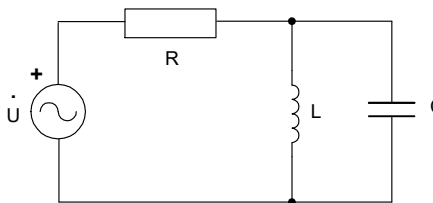
## 2. zadatak

Za krug zadan prema slici potrebno je odrediti rezonantnu frekvenciju. Nacrtati funkciju ovisnosti struje o frekvenciji te nacrtati vektorski dijagram za:

- $\omega = \omega_0$
- $\omega > \omega_0$
- $\omega < \omega_0$

Zadano:

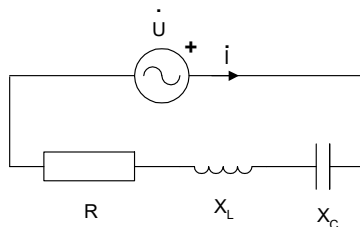
- $R = 100 \text{ } [\Omega]$
- $L = 0.1 \text{ } [\text{H}]$
- $C = 40 \text{ } [\mu\text{F}]$
- $U = 120 \text{ } [\text{V}]$



## Uvodni pojmovi

- S promjenom frekvencije mijenjaju se impedancija (admitancija) kruga, fazni odnos napona i struje, sama struja i sve električne veličine strujnog kruga koje ovise o frekvenciji.
- Pojava u strujnom krugu sastavljenom od omskih, induktivnih i kapacitivnih elemenata, koji priključen na izvor izmjeničnog napona prima struju koja je u fazi s priključenim naponom naziva se rezonancija.

### Serijski RLC spoj



$$\dot{I}(\omega) = \frac{\dot{U}}{Z(\omega)}$$

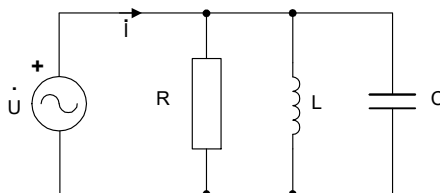
$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$$

Za rezonantnu frekvenciju ( $\omega_0$ ) vrijedi:

$$\text{Im}\{\dot{Z}\} = 0$$

## Uvodni pojmovi

### Paralelni RLC spoj



$$\dot{I}(\omega) = \dot{U} \cdot Y(\omega)$$

$$Y(\omega) = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega \cdot L} - \omega \cdot C\right)^2}$$

Za rezonantnu frekvenciju ( $\omega_0$ ) vrijedi:

$$\text{Im}\{\dot{Y}\} = 0$$



## Rješenje zadatka

- Rezonantnu frekvenciju određujemo na sljedeći način:

$$\text{Im}\{\dot{Y}\} = 0$$

$$\dot{Z} = R + \frac{jX_L \cdot (-jX_C)}{jX_L - jX_C}$$

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{R + j \cdot \frac{X_L \cdot X_C}{X_L - X_C}} \cdot \frac{R - j \cdot \frac{X_L \cdot X_C}{X_L - X_C}}{R - j \cdot \frac{X_L \cdot X_C}{X_L - X_C}}$$

$$\dot{Y} = \frac{R \cdot (X_L - X_C)^2}{R^2 \cdot (X_L - X_C)^2 + (X_L \cdot X_C)^2} + j \cdot \frac{X_L \cdot X_C \cdot (X_L - X_C)}{R^2 \cdot (X_L - X_C)^2 + (X_L \cdot X_C)^2}$$

$$\text{Im}\{\dot{Y}\} = \frac{X_L \cdot X_C \cdot (X_L - X_C)}{R^2 \cdot (X_L - X_C)^2 + (X_L \cdot X_C)^2} = 0 \Rightarrow X_L = X_C$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{0.1 \cdot 40 \cdot 10^{-6}}} = 500 \text{ rad/s}$$



- Ovisnost struje o frekvenciji opisana je sljedećom funkcijom:

$$I(\omega) = U \cdot Y(\omega)$$

- Karakteristične frekvencije za određivanje frekventne karakteristike su  $\omega = 0$ ,  $\omega = \infty$  i  $\omega = \omega_0$ .

Za  $\omega = 0$  vrijedi:

$$X_L = 0$$

$$X_C = \infty$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{120}{100} = 1.2 \text{ [A]}$$

Za  $\omega = \infty$  vrijedi:

$$X_L = \infty$$

$$X_C = 0$$

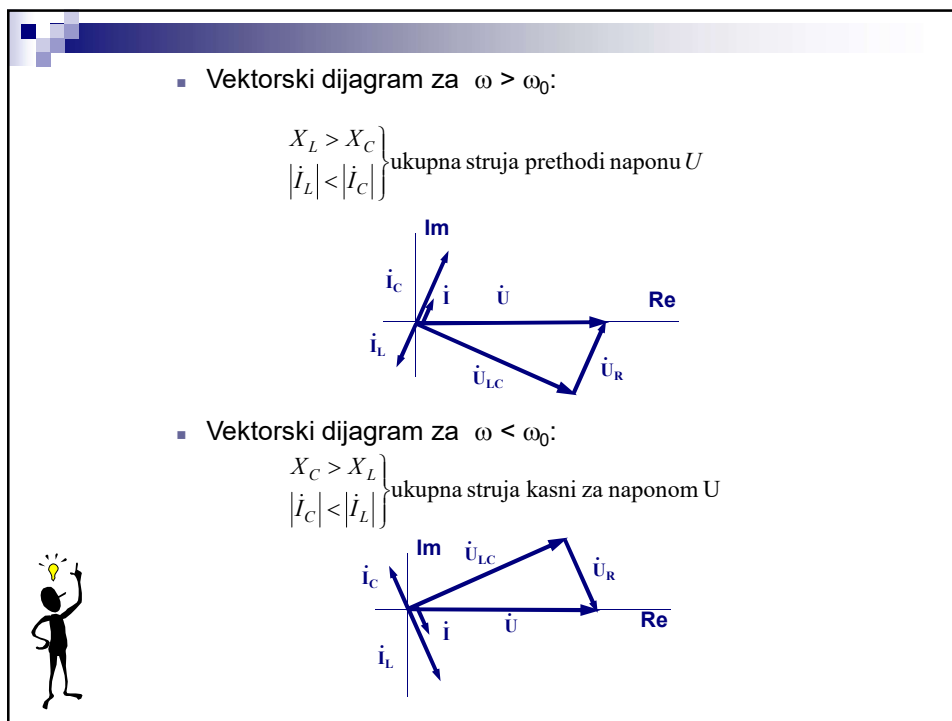
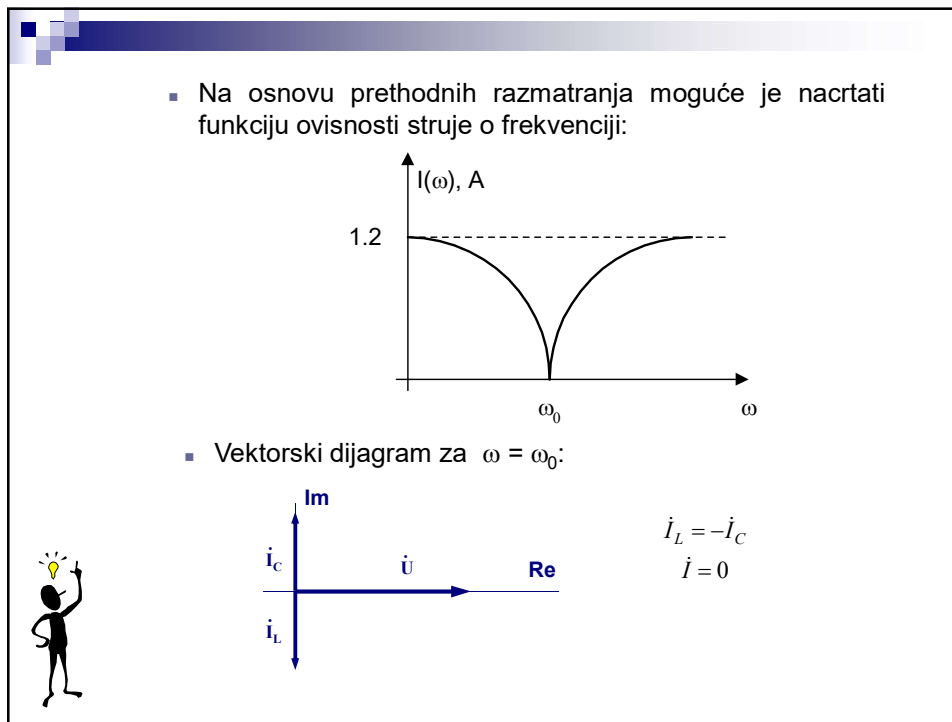
$$I = \frac{U}{R} = \frac{120}{100} = 1.2 \text{ [A]}$$

Za  $\omega = \omega_0$  vrijedi:

$$Z = \infty$$

$$I = 0 \text{ [A]}$$

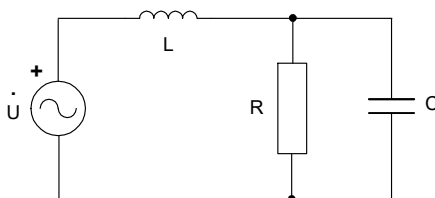






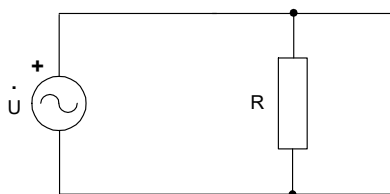
### 3. zadatak

Za spoj prema slici imamo podatke da je pri  $\omega = 0$  ukupna impedancija kruga jednaka  $5 [\Omega]$ , a pri rezonantnoj frekvenciji ukupna impedancija je jednaka  $2.5 [\Omega]$ . Odredite  $X_L$  i  $X_C$ .



### Rješenje zadatka

- Pri frekvenciji  $\omega = 0$  krug poprima sljedeći oblik:



$$\begin{aligned} X_L &= 0 \\ X_C &= \infty \\ Z &= R = 5 [\Omega] \end{aligned}$$

- Ukupna impedancija kruga ima sljedeći oblik:

$$Z = jX_L + (R \parallel -jX_C) = jX_L + \frac{R \cdot (-jX_C)}{R - jX_C} \cdot \frac{R + jX_C}{R + jX_C}$$

$$Z = jX_L + \frac{X_C^2 \cdot R - jX_C \cdot R^2}{R^2 + X_C^2}$$

$$Z = \frac{X_C^2 \cdot R}{R^2 + X_C^2} + j \left( X_L - \frac{X_C \cdot R^2}{R^2 + X_C^2} \right)$$



- Pri rezonantnoj frekvenciji vrijedi:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\{Z\} &= 0 \\ \operatorname{Re}\{Z\} &= |Z|\end{aligned}$$

odnosno, prema uvjetima zadatka:

$$X_L - \frac{X_C \cdot R^2}{R^2 + X_C^2} = 0$$

$$\frac{X_C^2 \cdot R}{R^2 + X_C^2} = 2.5$$

- Kombinacijom prethodne dvije jednačbe dobiju se rješenja zadatka:

$$\begin{aligned}X_C &= 5 [\Omega] \\ X_L &= 2.5 [\Omega]\end{aligned}$$



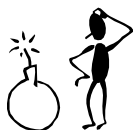
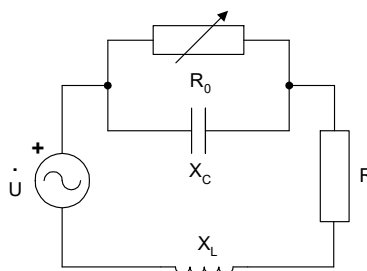
## 4. zadatak

U spoju prema slici potrebno je odrediti:

- $R_0$  uz koji će krug biti u rezonanciji
- struju u rezonanciji

Zadano:

- $U = 100$  [V]
- $R = 15$  [ $\Omega$ ]
- $X_L = 5$  [ $\Omega$ ]
- $X_C = 10$  [ $\Omega$ ]



## Rješenje zadatka

- Iz uvjeta za rezonanciju moguće je odrediti otpor  $R_0$ :  $\text{Im}\{Z\} = 0$

$$Z = (R_0 \parallel -jX_C) + R + jX_L = \frac{R_0 \cdot (-jX_C)}{R_0 - jX_C} \cdot \frac{R_0 + jX_C}{R_0 + jX_C} + R + jX_L$$

$$Z = \frac{R_0^2 \cdot (-jX_C) + R_0 \cdot X_C^2}{R_0^2 + X_C^2} + R + jX_L$$

$$Z = R + \frac{R_0 \cdot X_C^2}{R_0^2 + X_C^2} + j \left( X_L - \frac{R_0^2 \cdot X_C}{R_0^2 + X_C^2} \right)$$

$$X_L - \frac{R_0^2 \cdot X_C}{R_0^2 + X_C^2} = 0 \Rightarrow R_0 = \sqrt{\frac{X_C^2 \cdot X_L}{X_C - X_L}} = \sqrt{\frac{10^2 \cdot 5}{10 - 5}} = 10 [\Omega]$$

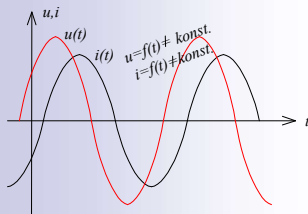


- Struja u rezonanciji je jednaka:

$$I = \frac{U}{\text{Re}\{Z\}} = \frac{U}{R + \frac{R_0 \cdot X_C^2}{R_0^2 + X_C^2}} = \frac{100}{15 + \frac{10 \cdot 10^2}{10^2 + 10^2}} = 5 [\text{A}]$$

## Izmjenični krugovi

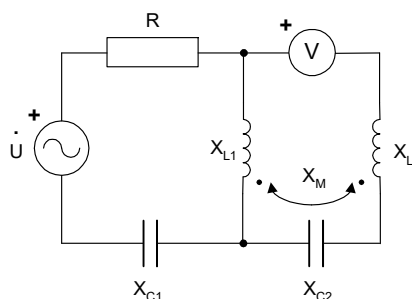
- Međuiduktivitet u izmjeničnim krugovima.



## 1. zadatak

U mreži prema slici napon izvora je  $u(t) = 141 \sin 1000t$  [V]. Voltmetar pokazuje vrijednost napona,  $U_V = 106.1$  [V]. Odredite međuinaktivitet i koeficijent magnetske veze. Zadano:

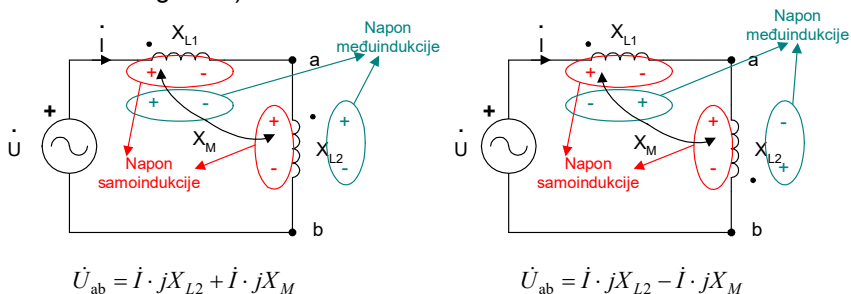
- $R = 10$  [ $\Omega$ ]
- $X_{C1} = X_{C2} = 10$  [ $\Omega$ ]
- $X_{L1} = 20$  [ $\Omega$ ]
- $X_{L2} = 10$  [ $\Omega$ ]



## Uvodni pojmovi

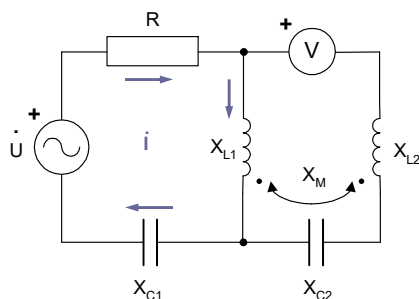
### Međuinaktivitet u mreži

- U mreži u kojoj se nalaze međuinaktivno vezane zavojnice struja protjecanjem kroz pojedinu zavojnicu stvara napon međuinaktivacije na drugoj zavojnici. Polaritet napona ovisi o vrsti međuinaktivne veze (suglasna ili nesuglasna).



## Rješenje zadatka

- U grani u kojoj se nalazi voltmetar ne teče struja. U krugu teče samo struja  $I$  označenog smjera.



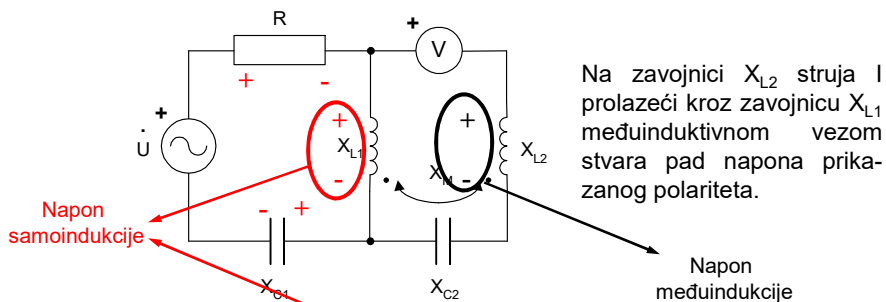
Struju  $I$  može se odrediti kao:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{R + jX_{L1} - jX_{C1}}$$

- Napon na stezaljkama voltmetra jednak je zbroju napona na zavojnici  $X_{L1}$  kroz koju prolazi struja  $I$  i napona na zavojnici  $X_{L2}$  koji je stvoren međuinaktivnom vezom.



- Struja  $I$  stvara padove napona na elementima kroz koje prolazi kao na slici:



Na zavojnici  $X_{L2}$  struja  $I$  prolazeći kroz zavojnicu  $X_{L1}$  međuinaktivnom vezom stvara pad napona prikazanog polariteta.

- Napon na stezaljkama voltmetra iznosi:

$$\dot{U}_V = \dot{i} \cdot jX_{L1} - \dot{i} \cdot jX_M$$

- Uvrštenjem izraza za struju  $I$  dobivamo:

$$\dot{U}_V = \frac{\dot{U}}{R + jX_{L1} - jX_{C1}} \cdot j \cdot (X_{L1} - X_M)$$



- Po iznosu napon  $U_V$  iznosi:

$$\dot{U}_V = \frac{\dot{U}}{\sqrt{R^2 + (X_{L1} - X_{C1})^2}} \cdot j \cdot (X_{L1} - X_M)$$

$$\downarrow$$

$$U_V = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_{L1} - X_{C1})^2}} (X_{L1} - X_M) = 106 \text{ [V]}$$

- Uvrštenjem zadanih vrijednosti dobije se:

$$X_M = \frac{\frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_{L1} - X_{C1})^2}} \cdot X_{L1} - 106}{\frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_{L1} - X_{C1})^2}}} = \frac{\frac{100}{\sqrt{10^2 + (20-10)^2}} \cdot 20 - 106}{\frac{100}{\sqrt{10^2 + (20-10)^2}}} = 5 \text{ [\Omega]}$$

- Faktor međuinduktivne veze  $k$ :

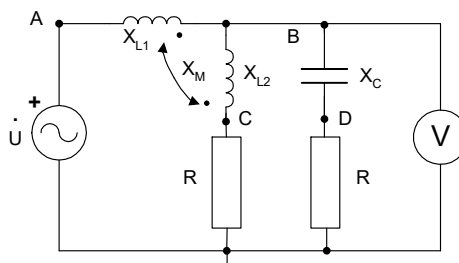
$$X_M = k \cdot \sqrt{X_{L1} \cdot X_{L2}} \Rightarrow k = \frac{X_M}{\sqrt{X_{L1} \cdot X_{L2}}} = \frac{5}{\sqrt{20 \cdot 10}} = 0.35$$



## 2. zadatak

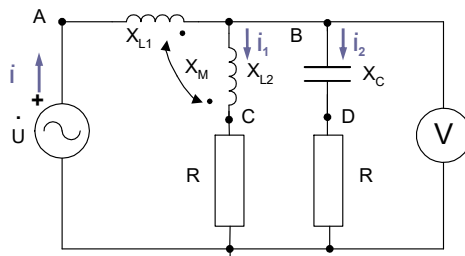
Voltmetar prema slici pokazuje  $U_V = 100 \text{ [V]}$ . Nacrtajte topografski dijagram i odredite napon izvora. Kod crtanja treba uzeti da je faza ukupne struje  $0^\circ$ . Zadano:

- $X_{L1} = X_{L2} = 100 \text{ [\Omega]}$
- $X_C = 100 \text{ [\Omega]}$
- $X_M = 100 \text{ [\Omega]}$
- $R = 100 \text{ [\Omega]}$



## Rješenje zadatka

- U mreži teku struje prikazanih smjerova:



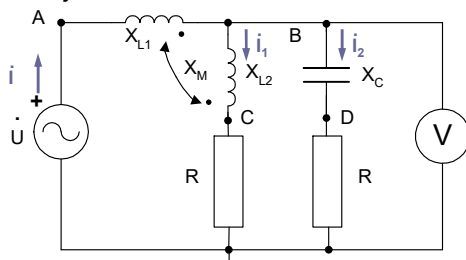
- Napon na stezaljkama izvora definiran je kao:

$$\dot{U} = \dot{I} \cdot jX_{L1} + \dot{I}_1 \cdot jX_M + \dot{I}_1 \cdot jX_{L2} + \dot{I} \cdot jX_M + \dot{I}_1 \cdot R$$

- Struja  $I$  protječući kroz zavojnicu  $X_{L1}$  stvara napon samoindukcije na zavojnici  $X_{L1}$  i napon međuidukcije na zavojnici  $X_{L2}$  prikazanih polariteta. S druge strane, struja  $I_1$  prolazeći kroz zavojnicu  $X_{L2}$  stvara napon samoindukcije na zavojnici  $X_{L2}$  i napon međuidukcije na zavojnici  $X_{L1}$  prikazanog polariteta.



- Za krug, uz pretpostavljeni fazni pomak napona  $U_{BO}$ , može se odrediti struja  $I_2$ , te ostale struje u krugu na sljedeći način:



$$\dot{U}_{BO} = \dot{I}_2 \cdot (-jX_C) + \dot{I}_2 \cdot R$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{BO}}{R - jX_C} = \frac{100 \angle 0^\circ}{100 - j100}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle +45^\circ$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_{BO} = \dot{I}_1 \cdot jX_{L2} + \dot{I} \cdot jX_M + \dot{I}_1 \cdot R = \dot{I}_1 \cdot jX_{L2} + \dot{I}_1 \cdot jX_M + \dot{I}_2 \cdot jX_M + \dot{I}_1 \cdot R$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{BO} - \dot{I}_2 \cdot jX_M}{R + jX_{L2} + jX_M} = \frac{100 - \frac{\sqrt{2}}{2} \angle 45^\circ \cdot j100}{100 + j100 + j100}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{100 + 50 - j50}{100 + j100 + j100} = \frac{50 \cdot \sqrt{10} \angle -18^\circ}{100 \cdot \sqrt{5} \angle +63^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle -81^\circ [\text{A}]$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle -81^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} \angle +45^\circ = 0.64 \angle -18^\circ [\text{A}]$$



- Uz poznate struje u krugu moguće je odrediti napon izvora:

$$\dot{U} = \dot{I} \cdot jX_{L1} + \dot{I}_1 \cdot jX_M + \dot{I}_1 \cdot jX_{L2} + \dot{I} \cdot jX_M + \dot{I}_1 \cdot R$$

$$\dot{U} = \dot{I} \cdot (jX_{L1} + jX_M) + \dot{I}_1 \cdot (jX_M + jX_{L2} + R)$$

$$\dot{U} = (0.64 \angle -18^\circ) \cdot (j100 + j100) + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \angle -81^\circ \right) \cdot (j100 + j100 + 100)$$

$$\dot{U} = 204 \angle +21^\circ [\text{V}]$$

- Na osnovi izračunatih vrijednosti moguće je odrediti potencijale svih točaka u krugu:

$$\dot{\phi}_C = \dot{I}_1 \cdot R = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \angle -81^\circ \right) \cdot (100 \angle 0^\circ) = 50\sqrt{2} \angle -81^\circ [\text{V}]$$

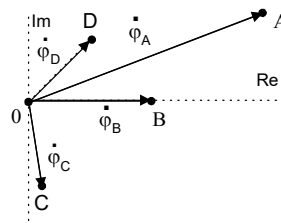
$$\dot{\phi}_D = \dot{I}_2 \cdot R = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \angle 45^\circ \right) \cdot (100 \angle 0^\circ) = 50\sqrt{2} \angle 45^\circ [\text{V}]$$

$$\dot{\phi}_B = \dot{U}_{BO} = 100 \angle 0^\circ [\text{V}]$$

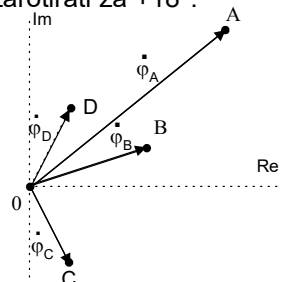
$$\dot{\phi}_A = \dot{U}_{AO} = \dot{U} = 204 \angle +21^\circ [\text{V}]$$



- Pomoću izračunatih vrijednosti potencijala moguće je nacrtati topografski dijagram.



- Međutim, budući da je u zadatku zadano da struju  $I$  treba nacrtati kao vektor s faznim pomakom od  $0^\circ$  potrebno je čitav dijagram zarotirati za  $+18^\circ$ :

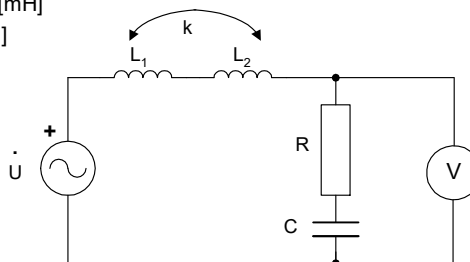




### 3. zadatak

Krug na slici je u rezonanciji. Odredite iznos koeficijenta magnetskog vezanja  $k$  i karakter magnetske veze (suglasna/nesuglasna). Zadano:

- $U = 6$  [V]
- $U_V = 10$  [V]
- $L_1 = L_2 = 8$  [mH]
- $\omega = 500$  [s<sup>-1</sup>]
- $P = 12$  [W]

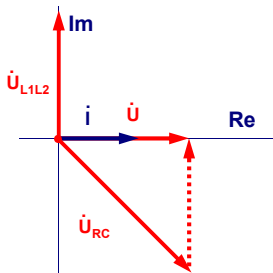


### Rješenje zadatka

- Budući da je mreža u rezonanciji napon na otporu je jednak naponu izvora pa je pomoću poznate snage na otporu moguće odrediti R:

$$P = \frac{U_R^2}{R} \Rightarrow R = \frac{U_R^2}{P} = \frac{U^2}{P} = \frac{6^2}{12} = 3 [\Omega]$$

- Iz vektorskog dijagrama moguće je odrediti odnose među naponima u krugu.



Budući da je krug u rezonanciji ukupna struja u krugu i napon izvora su u fazi.

Napon na zavojnici prethodi struji za 90°, a napon na seriji RC kasni za strujom za kut manji od 90°.

Napon na izvoru jednak je vektorskom zbroju napona na svim elementima u krugu.

Iz vektorskog dijagrama slijedi:

$$U_{L1L2} = \sqrt{U_{RC}^2 - U^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$
 [V]



- Struju u krugu možemo odrediti kao:

$$P = I^2 \cdot R \Rightarrow I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = 2 \text{ [A]}$$

- Ukupnu impedanciju međuinuktivno vezanih zavojnica možemo odrediti kao:

$$X_{L1L2} = \frac{U_{L1L2}}{I} = \frac{8}{2} = 4 \text{ [\Omega]}$$

- Impedancije zavojnica jednake su:

$$X_{L1} = X_{L2} = \omega \cdot L_1 = \omega \cdot L_2 = 500 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 4 \text{ [\Omega]}$$

- Ukupna impedancija međuinuktivno vezanih zavojnica jednaka je (uz nepoznati karakter međuinuktivne veze):

$$X_{L1L2} = X_{L1} + X_{L2} \pm 2 \cdot X_M = 4 \text{ [\Omega]}$$

- Iz ovoga slijedi da su zavojnice nesuglasno međuinuktivno vezane s faktorom k koji je jednak:

$$X_{L1} + X_{L2} - 2 \cdot k \cdot \sqrt{X_{L1} \cdot X_{L2}} = 4 \text{ [\Omega]} \Rightarrow k = \frac{4 - X_{L1} - X_{L2}}{-2 \cdot \sqrt{X_{L1} \cdot X_{L2}}} = \frac{4 - 4 - 4}{-2 \cdot \sqrt{4 \cdot 4}} = 0.5$$

