1. Matematičke osnove računarske tehnike

1.1 Pozicioni brojni sistemi

- **Pozicioni brojni sistemi su sistemi označavanja brojeva gde vrednost svake cifre u broju zavisi od:**

  - njene vrednosti,

  - njene pozicije u broju.

- **Svaki pozitivan prirodni broj u pozicionom brojnom sistemu, može se zapisati u obliku:**

$$X = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_1 q^1 + a_0 q^0 \qquad (1)$$

gde su:

q **prirodni broj koji zovemo osnova brojnog sistema**

ai **cifre brojnog sistema**

- **Binarni brojni sistem:**

$q = 2,\ a_i \in \{0,1\}$

- **Oktalni brojni sistem:**

$q = 8,\ a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

- **Decimalni brojni sistem:**

$q = 10,\ a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

- **Heksadecimalni brojni sistem:**

$q = 16,\ a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A, B, C, D, E, F\}$

1.1.1 Binarni brojni sistem

- Binarni brojni sistem je najčešće korišćeni brojni sistem u digitalnim i računarskim uređajima.
- Predstavljanje informacija sa samo dva znaka najviše odgovara mogućnostima savremene elektronske tehnologije.
- Smenom $q=2$ jednačina 1. dobija oblik:

$$X = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + a_1 2^1 + a_0 2^0$$

Primer 1. Konverzija iz binarnog u decimalni brojni sistem

- **Konvertovati** $10010110_{(2)}$ **u decimalni broj.**

$$X = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + ... + a_1 q^1 + a_0 q^0 \qquad (1)$$

$$10010110_{(2)} =$$
$$1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 =$$
$$1 \cdot 128 + 0 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 =$$
$$128 + 16 + 4 + 2 = 150_{(10)}$$

Primer 2. Konverzija iz decimalnog u binarni brojni sistem

- **Konvertovati $169_{(10)}$ u binarni broj.**

169	:2=84	(1)	LSB
84	:2=42	(0)	
42	:2=21	(0)	
21	:2=10	(1)	
10	:2=5	(0)	
5	:2=2	(1)	
2	:2=1	(0)	
1	:2=0	(1)	MSB

$$169_{(10)} = 10101001_{(2)}$$

Mane binarnog predstavljanja

- Osnovni nedostatak u binarnom predstavljanju brojeva je predugački zapis broja.
- Zbog toga se u računarskim sistemima najčešće koristi heksadecimalni sistem predstavljanja brojeva. Pri tome računar i dalje radi sa binarnim brojevima.
- Za predstavljanje brojeva je izabran heksadecimalni brojni sistem zbog jednostavne konverzije izmedju njega i binarnog brojnog sistema.

1.1.2 Heksadecimalni brojni sistem

- **Cifre heksadecimalnog brojnog sistema su:**

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,$$
$$A=10, B=11, C=12, D=13, E=14, F=15$$

- **Jednačina 1. smenom** *q=16* **dobija oblik:**

$$X = a_n 16^n + a_{n-1} 16^{n-1} + \ldots + a_1 16^1 + a_0 16^0$$

Primer 3. Konverzija iz heksadecimalnog u decimalni brojni sistem

- **Konvertovati** $5E3_{(16)}$ **u decimalni broj.**

$$X = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + ... + a_1 q^1 + a_0 q^0 \qquad (1)$$

$$5E3_{(16)} =$$

$$5 \cdot 16^2 + 14 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 =$$

$$5 \cdot 256 + 14 \cdot 16 + 3 \cdot 1 =$$

$$1280 + 224 + 3 = 1507_{(10)}$$

Primer 4. Konverzija iz decimalnog u heksadecimalni brojni sistem

- Konvertovati $4328_{(10)}$ u heksadecimalni broj.

4328:16=270 (8)
270 :16=16 (14 = E)
16 :16=1 (0)
1 :16=0 (1)

$$4328_{(10)} = 10E8_{(16)}$$

Primer 5. Konverzija iz binarnog u heksadecimalni brojni sistem

- **Konvertovati $110111110_{(2)}$ u heksadecimalni broj.**

Konverzija se vrši grupisanjem po 4 cifre binarnog broja, počevši sa desne strane:

$$1110_{(2)} = 14_{(10)} = E_{(16)}$$

$$1011_{(2)} = 11_{(10)} = B_{(16)}$$

$$1_{(2)} = 1_{(10)} = 1_{(16)}$$

$$\mathbf{110111110_{(2)} = 1BE_{(16)}}$$

Primer 6. Konverzija iz heksadecimalnog u binarni brojni sistem

- **Konvertovati $3A9_{(16)}$ u binarni broj.**

Konverzija se vrši tako što se svaka cifra heksadecimalnog broja konvertuje u 4 cifre binarnog broja:

$$9_{(16)} = 9_{(10)} = 1001_{(2)}$$

$$A_{(16)} = 10_{(10)} = 1010_{(2)}$$

$$3_{(16)} = 3_{(10)} = 0011_{(2)}$$

$$3A9_{(16)} = 001110101001_{(2)} = 1110101001_{(2)}$$

1.3 Sabiranje binarnih brojeva

- Važe ista pravila kao za sabiranje decimalnih brojeva.
- Tablica sabiranja:

c_{ul}	a	b	c_{iz}	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Primer 7. Sabiranje binarnih brojeva

- **Sabrati brojeve** $10110111_{(2)}$ **i** $10011010_{(2)}$

$$
\begin{array}{lccccccccc}
Cul & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
A & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
B & + & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
A+B & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

1.4 Oduzimanje binarnih brojeva

- **Tablica oduzimanja:**

p_{ul}	a	b	p_{iz}	r
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Primer 8. Oduzimanje binarnih brojeva

- **Oduzeti broj** $10011010_{(2)}$ **od broja** $10110111_{(2)}$

$$
\begin{array}{lccccccccc}
 & & & & 0 & 0 & & & & \\
A & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
B & - & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
A-B & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}
$$

1.5 Množenje binarnih brojeva

- Množenje se obavlja tako što se množenik množi svakom cifrom množioca, a potom se parcijalni proizvodi, pomereni za po jedno mesto u levo, sabiraju.

Primer 9. Množenje binarnih brojeva

- Pomnožiti brojeve $1100_{(2)}$ i $1101_{(2)}$

$$
\begin{array}{rr}
1100 \cdot 1101 = & 1100 \\
 & 0000 \\
 & 1100 \\
 & +1100 \\
\hline
 & 10011100
\end{array}
$$

Primer 10. Deljenje binarnih brojeva

- **Podeliti broj** $100010001_{(2)}$ **sa brojem** $1101_{(2)}$

$$
\begin{array}{l}
1\;0\;0\;0\;1\;0\;0\;0\;1 : 1\;1\;0\;1 = 1\;0\;1\;0\;1 \\
\underline{-\,1\;1\;0\;1} \\
0\;0\;1\;0\;0\;0\;0 \\
\underline{-\,1\;1\;0\;1} \\
0\;0\;0\;1\;1\;0\;1
\end{array}
$$

Vežbe

$BIN \longrightarrow DEC$

- $11010011_{(2)} = 1\cdot2^7+1\cdot2^6+0\cdot2^5+1\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0 = 128+64+16+2+1 = 211_{(10)}$

- $10000100_{(2)} = 1\cdot2^7+0\cdot2^6+0\cdot2^5+0\cdot2^4+0\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+0\cdot2^0 = 128+4 = 132_{(10)}$

- $11110001_{(2)} = 1\cdot2^7+1\cdot2^6+1\cdot2^5+1\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0 = 128+64+32+16+1 = 241_{(10)}$

- $110101011_{(2)} = 1\cdot2^8+1\cdot2^7+0\cdot2^6+1\cdot2^5+0\cdot2^4+1\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0 = 256+128+32+8+2+1 = 427_{(10)}$

BIN ⟶ DEC

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	0	1	0	1	0	$1_{(2)}$

- $10010101_{(2)} = 128+16+4+1 = 149_{(10)}$

128	64	32	16	8	4	2	1
1	1	0	0	0	1	1	$1_{(2)}$

- $11000111_{(2)} = 128+64+4+2+1 = 199_{(10)}$

256	128	64	32	16	8	4	2	1
1	0	0	1	1	0	0	1	$1_{(2)}$

- $100110011_{(2)} = 256+32+16+2+1 = 307_{(10)}$

256	128	64	32	16	8	4	2	1
1	0	1	1	0	0	1	0	$0_{(2)}$

- $101100100_{(2)} = 256+64+32+4 = 356_{(10)}$

DEC → BIN

238	:	2	=	119	(0) LSB
119	:	2	=	59	(1)
59	:	2	=	29	(1)
29	:	2	=	14	(1)
14	:	2	=	7	(0)
7	:	2	=	3	(1)
3	:	2	=	1	(1)
1	:	2	=	0	(1) MSB

132	:	2	=	66	(0) LSB
66	:	2	=	33	(0)
33	:	2	=	16	(1)
16	:	2	=	8	(0)
8	:	2	=	4	(0)
4	:	2	=	2	(0)
2	:	2	=	1	(0)
1	:	2	=	0	(1) MSB

$238_{(10)} = 11101110_{(2)}$

$132_{(10)} = 10000100_{(2)}$

HEX $\longrightarrow$ DEC

- $2FC_{(16)} = 2\cdot16^2+15\cdot16^1+12\cdot16^0 =$
  $2\cdot256+15\cdot16+12\cdot1 = 512+240+12 = 764_{(10)}$
- $A48_{(16)} = 10\cdot16^2+4\cdot16^1+8\cdot16^0 =$
  $10\cdot256+4\cdot16+8\cdot1 = 2560+64+8 = 2632_{(10)}$
- $382_{(16)} = 3\cdot16^2+8\cdot16^1+2\cdot16^0 =$
  $3\cdot256+8\cdot16+2\cdot1 = 768+128+2 = 898_{(10)}$

DEC $\longrightarrow$ HEX

1243	:	16	=	77	(11 = B)
77	:	16	=	4	(13 = D)
4	:	16	=	0	(4)

$$1243_{(10)} = 4DB_{(16)}$$

2833	:	16	=	177	(1)
177	:	16	=	11	(1)
11	:	16	=	0	(11 = B)

$$2833_{(10)} = B11_{(16)}$$

HEX → BIN

DEC	BIN	HEX
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

HEX → BIN

- $BAE_{(16)} = 1011\ 1010\ 1110_{(2)}$
- $4EF_{(16)} = 0100\ 1110\ 1111_{(2)}$
- $52C3_{(16)} = 0101\ 0010\ 1100\ 0011_{(2)}$
- $658_{(16)} = 0110\ 0101\ 1000_{(2)}$
- $304A_{(16)} = 0011\ 0000\ 0100\ 1010_{(2)}$

BIN → HEX

- $1001\ 1010_{(2)} = 9A_{(16)}$
- $1101\ 1000_{(2)} = D8_{(16)}$
- $1010\ 1101\ 1001_{(2)} = AD9_{(16)}$
- $10\ 0101\ 1010\ 1111_{(2)} = 25AF_{(16)}$
- $1\ 0111\ 1011\ 1110\ 0101_{(2)} = 17BE5_{(16)}$

Sabiranje

c_{ul}	1	1	1	1	0	0	1	0	
A		1	1	1	1	1	0	1	1
B	+	1	0	1	1	0	0	1	0
$A+B$	1	1	0	1	0	1	1	0	1

$A = 11111011_{(2)} = 128+64+32+16+8+2+1 = 251_{(10)}$

$B = 10110010_{(2)} = 128+32+16+2 = 178_{(10)}$

$A+B = 110101101_{(2)} = 256+128+32+8+4+1 = 429_{(10)}$

C_{ul}	1	0	1	1	1	0	1	1	
A		1	0	1	1	1	0	0	1
B	+	1	0	1	1	1	0	1	1
$A+B$	1	0	1	1	1	0	1	0	0

$A = 10111001_{(2)} = 128+32+16+8+1 = 185_{(10)}$

$B = 10111011_{(2)} = 128+32+16+8+2+1 = 187_{(10)}$

$A+B = 101110100_{(2)} = 256+64+32+16+4 = 372_{(10)}$

C_{ul}	1	1	1	1	1	1	1	1	
A		1	0	1	1	1	0	1	1
B	+	1	1	1	0	1	1	0	1
$A+B$	1	1	0	1	0	1	0	0	0

A = 10111011(2) = 128+32+16+8+2+1 = 187(10)

B = 11101101(2) = 128+64+32+8+4+1 = 237(10)

A+B = 110101000(2) = 256+128+32+8 = 424(10)

Oduzimanje

$$
\begin{array}{lccccccccc}
 & & & & & & 0 & & & \\
A & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
B & - & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
A-B & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lccccccccc}
 & & & 0 & & & 0 & 1 & 0 & \\
A & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
B & - & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
A-B & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & & \\
A & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
B & - & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
A-B & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & & \\
A & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
B & - & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
A-B & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

Množenje

$$
1010 \cdot 1001 = \quad
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
+ & 1 & 0 & 1 & 0 & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

$$
1100 \cdot 1010 = \quad
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
+ & 1 & 1 & 0 & 0 & & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
1011 \cdot 1101 = \begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\
+ & & 1 & 0 & 1 & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

$$
1101 \cdot 1001 = \begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
+ & & 1 & 1 & 0 & 1 & & & \\
\cline{3-9}
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}
$$

Deljenje

```
 1110101:1001=1101
-1001
 01011
 -1001
  001001
    -1001
     0000
```

```
11000110:1001=10110
-1001
 001101
   -1001
    01001
    -1001
     00000
```

$$
\begin{array}{l}
100110010 : 10001 = 10010 \\
\underline{-10001} \\
\quad 00010001 \\
\qquad \underline{-10001} \\
\qquad\quad 000000
\end{array}
$$