

1.7 Predstavljanje negativnih brojeva u binarnom sistemu

- Ω U decimalnom brojnom sistemu pozitivni brojevi se predstavljaju znakom “+” napisanim ispred cifara koje definišu apsolutnu vrednost broja, odnosno znakom “-” za negativne brojeve.
- Ω U binarnom brojnom sistemu je usvojeno da cifra na mestu najveće težine predstavlja znak, i to 0=“+”, a 1=“-”. Ostale cifre definišu apsolutnu vrednost broja.


Primer 1. Binarni brojevi zapisani pomoću znaka i apsolutne vrednosti

$$+7_{(10)} = 0111_{(2)}$$

$$-7_{(10)} = 1111_{(2)}$$

$$+12_{(10)} = 01100_{(2)}$$

$$-12_{(10)} = 11100_{(2)}$$

- 
- ⌚ **Nad binarnim brojevima predstavljenim znakom i apsolutnom vrednošću, teško se vrše aritmetičke operacije (sabiranje, oduzimanje...).**
 - ⌚ **Jedan od najčešće korišćenih načina predstavljanja negativnih binarnih brojeva, kojim se rešava gore navedeni problem, je *komplement dvojke*.**

1.7.1 Komplement dvojke

- ⌚ I kod brojeva zapisanih u komplementu dvojke negativni brojevi imaju jedinicu, a pozitivni nulu za prvu cifru.
- ⌚ Komplement dvojke nekog broja se vrlo jednostavno može napisati tako što se u njegovoj pozitivnoj binarnoj predstavi cifre invertuju, (jedinice se zamene nulama, a nule jedinicama) i tako dobijeni broj sabere sa 1.
- ⌚ Pozitivnim brojevima možemo dodavati vodeće nule, a negativnim vodeće jedinice, a da se vrednost broja ne promeni.

Primer 2. Izračunavanje komplementa dvojke

Ω **Predstaviti broj $-7_{(10)}$ u komplementu dvojke.**

$$7_{(10)} = 0111_{(2)}$$

invertujemo sve cifre \Rightarrow dobijamo 1000

na dobijeni broj dodamo 1 \Rightarrow dobijamo 1001

$$-7_{(10)} = 1001_{(2)}$$

Primer 3. Brojevi zapisani u komplementu dvojke

$$+5_{(10)} = 0101_{(2)} = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 4 + 1 = 5$$

$$-5_{(10)} = 1011_{(2)} = -1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = -8 + 2 + 1 = -5$$


$$+6_{(10)} = 0110_{(2)} = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 + 2 = 6$$

$$-6_{(10)} = 1010_{(2)} = -1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = -8 + 2 = -6$$

$$\begin{aligned} -6_{(10)} &= 11010_{(2)} = -1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = \\ &= -16 + 8 + 2 = -6 \end{aligned}$$

1.7.2 Oduzimanje i sabiranje označenih brojeva

- Ω Brojevi koji učestvuju u računskim operacijama moraju imati unapred određeni broj cifara, kako bi se znalo koja cifra predstavlja znak, a koje formiraju vrednost broja.
- Ω Treba voditi računa da prilikom obavljanja aritmetičkih operacija ne dodje do prekoračenja vrednosti broja koja se može predstaviti usvojenim brojem cifara, inače u tom slučaju obavezno dolazi do greške.



Ω Sabiranje i oduzimanje se obavlja po pravilima binarnog sabiranja i oduzimanja, ne vodeći računa o znaku, pod uslovom da se rezultat nalazi unutar opsega brojeva koji se mogu predstaviti usvojenim brojem cifara.

Ω Na primer sa 4 binarne cifre, moguće je predstaviti brojeve u opsegu od -8 do +7.

Primer 4. Sabiranje brojeva zapisanih u komplementu dvojke

$$\begin{array}{r}
 +2 \quad 0010 \\
 + +3 \quad +0011 \\
 \hline
 +5 \quad 0101
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -5 \quad 1011 \\
 + -1 \quad +1111 \\
 \hline
 -6 \quad 11010
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 +2 \quad 0010 \\
 + -6 \quad +1010 \\
 \hline
 -4 \quad 1100
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 +6 \quad 0110 \\
 + +7 \quad +0111 \\
 \hline
 +13 \quad 1101 = -3
 \end{array}$$

Primer 5. Oduzimanje brojeva zapisanih u komplementu dvojke

$$A - B = A + (-B)$$

$$\begin{array}{r} +4 \quad 0100 \\ - +2 \quad -0010 \\ \hline +2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 0100 \\ + 1110 \\ \hline (1)0010 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -7 \quad 1001 \\ - -3 \quad -1101 \\ \hline -4 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 1001 \\ + 0011 \\ \hline 1100 \end{array}$$

1.8 Opseg brojeva koji se može zapisati sa određenim brojem cifara

Ω **Opseg neoznačenih brojeva:**

$$x \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\} \Rightarrow 2^n \geq x + 1$$

gde je n broj upotrebljenih cifara

$$n = 4 \Rightarrow x \in \{0, 1, \dots, 15\} \Rightarrow 0 \leq x \leq 15$$

$$n = 8 \Rightarrow x \in \{0, 1, \dots, 255\} \Rightarrow 0 \leq x \leq 255$$



Ω Opseg brojeva u komplementu dvojke:

$$x \in \{-2^{n-1}, \dots, -1, 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1\} \Rightarrow 2^{n-1} \geq x + 1, x \geq 0$$
$$\Rightarrow 2^{n-1} \geq |x|, x \leq 0$$

gde je n broj upotrebljenih cifara

$$n = 4 \Rightarrow x \in \{-8, \dots, -1, 0, 1, \dots, 7\} \Rightarrow -8 \leq x \leq 7$$

$$n = 8 \Rightarrow x \in \{-128, \dots, -1, 0, 1, \dots, 127\}$$

$$\Rightarrow -128 \leq x \leq 127$$

Informacije predstavljene u binarnom brojnom sistemu

- Ω **Količina informacije od jedne binarne cifre naziva se bit (1b).**
- Ω **Količina informacija od 8 bita naziva se bajt (1B).**
- Ω **1024 bajta čine 1 kilobajt (1KB).**
- Ω **1024 kilobajta čini 1 megabajt (1MB), odnosno $1024 \times 1024 = 1,048,576$ bajta.**
- Ω **1024 megabajta čini 1 gigabajt (1GB), odnosno $1024 \times 1024 \times 1024 = 1,073,741,824$ bajta.**

Neki od tipova podataka koji se koriste u višim programskim jezicima

Oznaka	Pun naziv	Broj bajta	Opseg koji se može predstaviti
INT	Integer	2	-32768 do 32767
UNSIGNED INT	Unsigned Integer	2	0 do 65535
LONG	Long Integer	4	-2,147,483,648 do 2,147,483,647
CHAR	Character	1	Brojevima 0 do 255 se koduju karakteri ASCII tabele
FLOAT	Floating Point	4	$1.2 \cdot 10^{-38} \leq X \leq 3.4 \cdot 10^{+38}$

ASCII (American Standard Code for Information Interchange) tabela

Ctrl	Dec	Hex	Char	Code	Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char			
^@	0	00		NUL	32	20	sp	64	40	@	96	60	`	128	80	Q	160	A0	á	192	C0	À	224	E0	α
^A	1	01	␣	SOH	33	21	!	65	41	A	97	61	a	129	81	ü	161	A1	í	193	C1	Á	225	E1	β
^B	2	02	␣	SIX	34	22	"	66	42	B	98	62	b	130	82	é	162	A2	ó	194	C2	Â	226	E2	Γ
^C	3	03	␣	EIX	35	23	#	67	43	C	99	63	c	131	83	â	163	A3	ô	195	C3	Ã	227	E3	Π
^D	4	04	␣	EOI	36	24	\$	68	44	D	100	64	d	132	84	ã	164	A4	ñ	196	C4	Ä	228	E4	Σ
^E	5	05	␣	ENQ	37	25	%	69	45	E	101	65	e	133	85	ä	165	A5	ë	197	C5	Å	229	E5	σ
^F	6	06	␣	ACK	38	26	&	70	46	F	102	66	f	134	86	å	166	A6	ë	198	C6	Æ	230	E6	ρ
^G	7	07	␣	BEL	39	27	'	71	47	G	103	67	g	135	87	ç	167	A7	ê	199	C7	Ç	231	E7	τ
^H	8	08	␣	BS	40	28	(72	48	H	104	68	h	136	88	ê	168	A8	ë	200	C8	È	232	E8	ϕ
^I	9	09	␣	HI	41	29)	73	49	I	105	69	i	137	89	ë	169	A9	ï	201	C9	É	233	E9	Θ
^J	10	0A	␣	LF	42	2A	*	74	4A	J	106	6A	j	138	8A	è	170	AA	ï	202	CA	Ê	234	EA	Ω
^K	11	0B	␣	VI	43	2B	+	75	4B	K	107	6B	k	139	8B	ÿ	171	AB	½	203	CB	Ë	235	EB	δ
^L	12	0C	␣	FF	44	2C	,	76	4C	L	108	6C	l	140	8C	î	172	AC	¼	204	CC	Ë	236	EC	ø
^M	13	0D	␣	CR	45	2D	-	77	4D	M	109	6D	m	141	8D	ï	173	AD	½	205	CD	Ë	237	ED	ϑ
^N	14	0E	␣	SO	46	2E	.	78	4E	N	110	6E	n	142	8E	ÿ	174	AE	¾	206	CE	Ë	238	EE	€
^O	15	0F	␣	SI	47	2F	/	79	4F	O	111	6F	o	143	8F	ÿ	175	AF	¾	207	CF	Ë	239	EF	∩
^P	16	10	␣	SLE	48	30	0	80	50	P	112	70	p	144	90	ÿ	176	B0	ÿ	208	D0	Ë	240	FD	≡
^Q	17	11	␣	CS1	49	31	1	81	51	Q	113	71	q	145	91	ÿ	177	B1	ÿ	209	D1	Ë	241	F1	+
^R	18	12	␣	DC2	50	32	2	82	52	R	114	72	r	146	92	ÿ	178	B2	ÿ	210	D2	Ë	242	F2	>
^S	19	13	␣	DC3	51	33	3	83	53	S	115	73	s	147	93	ÿ	179	B3	ÿ	211	D3	Ë	243	F3	≤
^T	20	14	␣	DC4	52	34	4	84	54	T	116	74	t	148	94	ÿ	180	B4	ÿ	212	D4	Ë	244	F4	∫
^U	21	15	␣	NAK	53	35	5	85	55	U	117	75	u	149	95	ÿ	181	B5	ÿ	213	D5	Ë	245	F5	∫
^V	22	16	␣	SYN	54	36	6	86	56	V	118	76	v	150	96	ÿ	182	B6	ÿ	214	D6	Ë	246	F6	÷
^W	23	17	␣	EIB	55	37	7	87	57	W	119	77	w	151	97	ÿ	183	B7	ÿ	215	D7	Ë	247	F7	∫
^X	24	18	␣	CAN	56	38	8	88	58	X	120	78	x	152	98	ÿ	184	B8	ÿ	216	D8	Ë	248	F8	°
^Y	25	19	␣	EM	57	39	9	89	59	Y	121	79	y	153	99	ÿ	185	B9	ÿ	217	D9	Ë	249	F9	·
^Z	26	1A	␣	SIB	58	3A	:	90	5A	Z	122	7A	z	154	9A	ÿ	186	BA	ÿ	218	DA	Ë	250	FA	-
^[27	1B	␣	ESC	59	3B	;	91	5B	[123	7B	{	155	9B	ÿ	187	BB	ÿ	219	DB	Ë	251	FB	√
^\	28	1C	␣	FS	60	3C	<	92	5C	\	124	7C		156	9C	ÿ	188	BC	ÿ	220	DC	Ë	252	FC	∩
^]	29	1D	␣	GS	61	3D	=	93	5D]	125	7D	}	157	9D	ÿ	189	BD	ÿ	221	DD	Ë	253	FD	∩
^^	30	1E	␣	RS	62	3E	>	94	5E	^	126	7E	~	158	9E	ÿ	190	BE	ÿ	222	DE	Ë	254	FE	■
^_	31	1F	␣	US	63	3F	?	95	5F	_	127	7F	Δ	159	9F	ÿ	191	BF	ÿ	223	DF	Ë	255	FF	■

Zapis brojeva sa pokretnim zarezom (*floating point*)

- ⌚ Tipovi INT, UNSIGNED INT i LONG se koriste za zapisivanje označenih i neoznačenih *celih* brojeva. Za razliku od njih, tip FLOAT se koristi za zapis *realnih* brojeva (brojeva koji imaju decimalnu tačku).
- ⌚ Zapis realnog broja u pokretnom zarezu se sastoji od sledeće 3 komponente:
 - znaka,
 - eksponenta i
 - mantise (frakcije).

31

0

Znak	Eksponent	Mantisa
------	-----------	---------



Ω **Vrednost broja je u opštem slučaju jednaka:**

$$(ZNAK)MANTISA \cdot 2^{EKSPONENT}$$

Ω **Vremenom su se razvili brojni standardi koji definišu koliko se bita koristi za koju komponentu i u kom formatu i kom obliku su komponente zapisane. Poslednji i opšte prihvaćeni standard za zapis brojeva u pokretnom zarezu je standard IEEE 754.**

Standard IEEE 754 za zapis brojeva sa pokretnim zarezom

Ω Po standardu IEEE 754, za zapis broja u pokretnom zarezu koristi se:

- 1 bit za znak,
- 8 bita za eksponent,
- 23 bita za mantisu.

Ω Broj je pozitivan ako binarna cifra koja predstavlja znak ima vrednost 0, odnosno negativan ako cifra znaka ima vrednost 1.

Eksponent

- ⌚ **Eksponent se po IEEE 754 predstavlja sa 8 bita i to kao takozvani uvećani eksponent. Da bi se dobila prava vrednost eksponenta, potrebno je oduzeti vrednost za koju je on uvećan. Po standardu IEEE 754 eksponent se uvećava za 127.**
- ⌚ **Kako se sa 8 bita mogu zapisati decimalni brojevi od 0 do 255, umanjnjem za 127 vrednost eksponenta može da bude u opsegu od -127 do +128.**

Mantisa

Ω **Mantisa se po IEEE 754 predstavlja sa 23 bita. Neka su cifre mantise obeležene sa m_1 do m_{23} počevši sa leva na desno. Tada se decimalna vrednost mantise dobija na sledeći način:**

$$\text{MANTISA}_{(10)} = 2^0 + m_1 2^{-1} + m_2 2^{-2} + m_3 2^{-3} + \dots + m_{23} 2^{-23}$$

Ω **Usvojeno je da se decimalni broj nula po standardu IEEE 754 zapisuje kao sve nule (32 nule) ili kao 1 i sve nule (1 jedinica i 31 nula).**

Primer: odrediti decimalnu vrednost broja zapisanog u pokretnom zarezu

0 10000010 11100000000000000000000000000000

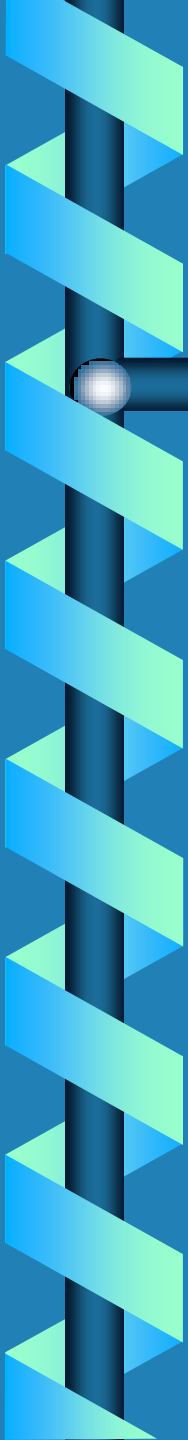
Znak: cifra znaka je 0 → broj je pozitivan

Eksponent: $128+2-127 = 3$

Mantisa: $2^0+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3} = 1+1/2+1/4+1/8 = 15/8$

Vrednost broja: $+15/8 \cdot 2^3 = +15/8 \cdot 8 = +15$

Vežbe



Označeni binarni brojevi

Ω Predstaviti u komplementu dvojke sledeće brojeve:

a. -26

b. -57

c. -368

d. -546

a. -26

Prvo se određuje broj binarnih cifara n potrebnih za zapis broja u komplementu dvojke. n se određuje na osnovu sledećih jednačina:

$$2^{n-1} \geq x+1, x \geq 0$$

$$2^{n-1} \geq |x|, x < 0$$

Kako je $x = -26$, iz jednačina dobijamo da je $n=6$.

Kada smo utvrdili koliko je n , zapisujemo broj +26 u binarnom formatu koristeći n cifara.

$$+26_{(10)} = 011010_{(2)},$$

Invertovanjem cifara i sabiranjem sa 1 dobijamo vrednost za -26.

$$-26_{(10)} = 100101 + 1 = 100110_{(2)}$$

b. -57

Za $x = -57$ dobijamo da je $2^{n-1} \geq 57$, odnosno $n=7$.

$$57 : 2 = 28 \quad (1)$$

$$28 : 2 = 14 \quad (0)$$

$$14 : 2 = 7 \quad (0)$$

$$7 : 2 = 3 \quad (1)$$

$$3 : 2 = 1 \quad (1)$$

$$1 : 2 = 0 \quad (1)$$

$$57_{(10)} = 0111001_{(2)}$$

$$-57_{(10)} = 1000110 + 1 = 1000111_{(2)}$$

c. -368

Za $x = -368$ dobijamo da je $2^{n-1} \geq 368$, odnosno $n=10$.

$$368 : 2 = 184 \quad (0)$$

$$184 : 2 = 92 \quad (0)$$

$$92 : 2 = 46 \quad (0)$$

$$46 : 2 = 23 \quad (0)$$

$$23 : 2 = 11 \quad (1)$$

$$11 : 2 = 5 \quad (1)$$

$$5 : 2 = 2 \quad (1)$$

$$2 : 2 = 1 \quad (0)$$

$$1 : 2 = 0 \quad (1)$$

$$368_{(10)} = 0101110000_{(2)}$$

$$-368_{(10)} = 1010001111 + 1 = 1010010000_{(2)}$$

d. -546

Za $x = -546$ dobijamo da je $2^{n-1} \geq 546$, odnosno $n=11$.

$$546 : 2 = 273 \quad (0)$$

$$273 : 2 = 136 \quad (1)$$

$$136 : 2 = 68 \quad (0)$$

$$68 : 2 = 34 \quad (0)$$

$$34 : 2 = 17 \quad (0)$$

$$17 : 2 = 8 \quad (1)$$

$$8 : 2 = 4 \quad (0)$$


$$4 : 2 = 2 \quad (0)$$

$$2 : 2 = 1 \quad (0)$$

$$1 : 2 = 0 \quad (1)$$

$$546_{(10)} = 01000100010_{(2)}$$

$$-546_{(10)} = 10111011101 + 1 = 10111011110_{(2)}$$



Ω Izračunati decimalnu vrednost označenih binarnih brojeva predstavljenih u komplementu dvojke:

a. $10001010100_{(2)}$

b. $1101110101_{(2)}$

c. $0100100_{(2)}$



a. $10001010100_{(2)} = -1024 + 64 + 16 + 4 = -940_{(10)}$

b. $1101110101_{(2)} =$
 $= -512 + 256 + 64 + 32 + 16 + 4 + 1 = -139_{(10)}$

$1101110101_{(2)} = 101110101_{(2)} =$
 $= -256 + 64 + 32 + 16 + 4 + 1 = -139_{(10)}$

c. $0100100_{(2)} = 32 + 4 = +36_{(10)}$




Koliko cifara je potrebno da bi se zapisali sledeći označeni brojevi u binarnom formatu kao komplement dvojke:

a. 67

b. -34

c. 63

d. -88


$$2^{n-1} \geq x+1, x \geq 0$$

$$2^{n-1} \geq |x|, x < 0$$

$$2^0=1, 2^1=2, 2^2=4, 2^3=8, 2^4=16, 2^5=32, 2^6=64, 2^7=128, 2^8=256$$

a. $X=67 \rightarrow 2^{n-1} \geq 68 \rightarrow n-1=7 \rightarrow n=8$

b. $X=-34 \rightarrow 2^{n-1} \geq 34 \rightarrow n-1=6 \rightarrow n=7$

c. $X=63 \rightarrow 2^{n-1} \geq 64 \rightarrow n-1=6 \rightarrow n=7$

d. $X=-88 \rightarrow 2^{n-1} \geq 88 \rightarrow n-1=7 \rightarrow n=8$



Ω Koliko cifara je potrebno da bi se zapisali sledeći neoznačeni brojevi u binarnom formatu:

a. 34

b. 68

c. 320

d. 127


$$2^n \geq x + 1$$

$$2^0=1, 2^1=2, 2^2=4, 2^3=8, 2^4=16, 2^5=32, 2^6=64, \\ 2^7=128, 2^8=256, 2^9=512$$

a. $X=34 \rightarrow 2^n \geq 35 \rightarrow n=6$

b. $X=68 \rightarrow 2^n \geq 69 \rightarrow n=7$


c. $X=320 \rightarrow 2^n \geq 321 \rightarrow n=9$

d. $X=127 \rightarrow 2^n \geq 128 \rightarrow n=7$

Sabiranje označenih binarnih brojeva predstavljenih u komplementu dvojke

$$\begin{array}{r} 1. \quad 11111110 \\ \quad +103 \quad 01100111 \\ + \quad -98 \quad \underline{+10011110} \\ \hline \quad +5 \quad (1)00000101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2. \quad 11000111 \\ \quad +87 \quad 01010111 \\ + \quad -27 \quad \underline{+11100101} \\ \hline \quad +60 \quad (1)00111100 \end{array}$$


$$\begin{array}{r} 3. \\ +24 \\ +\underline{-72} \\ -48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0111000 \\ 00011000 \\ +\underline{10111000} \\ 11010000 \end{array}$$

Oduzimanje označenih binarnih brojeva predstavljenih u komplementu dvojke

1.

+24	00011000	00011000
<u>-+67</u>	<u>-01000011</u>	<u>+10111101</u>
-43		11010101

2.

+42	00101010	00101010
<u>--82</u>	<u>-10101110</u>	<u>+01010010</u>
+124		01111100



3.

-48

11010000

11010000

--45

-11010011

+00101101

- 3

11111101



Q

Kolika je decimalna vrednost sledećih brojeva zapisanih u pokretnom zarezu?

- a. $01000001011100000000000000000000_{(2)}$
- b. $00111100100000000000000000000000_{(2)}$
- c. $BF1A0000_{(16)}$



a. 0 10000010 11100000000000000000000000000000

Znak: cifra znaka je 0 → broj je pozitivan

Eksponent: $128+2-127 = 3$

Mantisa: $2^0+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3} = 1+1/2+1/4+1/8 = 15/8$

Vrednost broja: $+15/8 \cdot 2^3 = +15/8 \cdot 8 = +15$



b. 0 01111001 000000000000000000000000000000000000

Znak: cifra znaka je 0 → broj je pozitivan

Eksponent: $64+32+16+8+1-127 = -6$

Mantisa: $2^0 = 1$

Vrednost broja: $+1 \cdot 2^{-6} = +1/64 = +0.015625$

C. BF1A0000₍₁₆₎ =

1011 1111 0001 1010 0000 0000 0000 0000₍₂₎ =

1 01111110 001101000000000000000000 =

Znak: cifra znaka je 1 → broj je negativan

Eksponent: $64+32+16+8+4+2-127 = -1$

Mantisa: $2^0+2^{-3}+2^{-4}+2^{-6} = 1+1/8+1/16+1/64 = 77/64$

Vrednost broja: $-77/64 \cdot 2^{-1} = -77/128 = -0.6015625$