2.0 logička kola i logičke operacije

- U prethodnom poglavlju definisani su binarni brojevi koji su predstavljeni sa dve logičke vrednosti, 0 i 1.
- Pored aritmetičkih, nad takvim brojevima mogu se izvoditi i logičke operacije.
- Aritmetičke operacije se izvode nad celim brojem, a logičke nad svakom cifrom (bitom) posebno.

2.0.1 I operacija (logičko množenje)

- **Tablica istinitosti i grafički simbol za I operaciju:**

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$Y=AB$

Primer 1. I operacija

- Izvršiti logičku I operaciju nad sledećim brojevima:

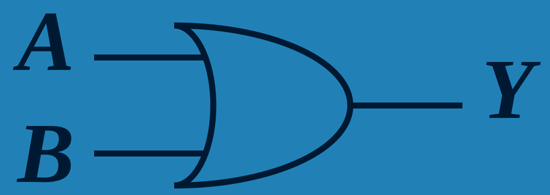
$$A=01011011,\ B=11010010$$

$$\begin{array}{r}
0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1 \\
1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0 \\
\hline
AB \quad 0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0
\end{array}$$

2.0.2 ILI operacija (logičko sabiranje)

- Tablica istinitosti i grafički simbol za ILI operaciju:

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



$Y=A+B$

Primer 2. ILI operacija

- Izvršiti logičku ILI operaciju nad sledećim brojevima:

A=01011011, B=11010010

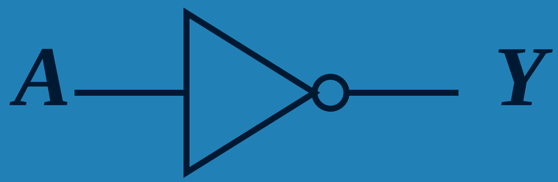
$$\begin{array}{rl} & 0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1 \\ & 1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0 \\ \hline A+B & 1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1 \end{array}$$

2.0.3 NE operacija (komplementiranje)

- **Tablica istinitosti i grafički simbol za NE operaciju:**

A	Y
0	1
1	0

$$Y = \overline{A}$$



Primer 3. NE operacija

- Izvršiti logičku NE operaciju nad sledećim brojem:

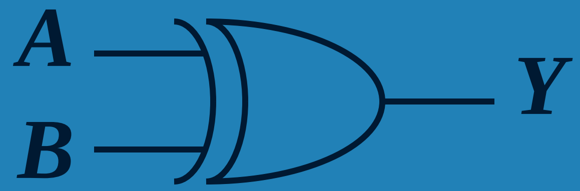
A=01011011

$$\begin{array}{c|cccccccc} & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \overline{A} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

2.0.4 Ekskluzivno ILI operacija

- Tablica istinitosti i grafički simbol za EXILI operaciju:

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



$$Y = A \oplus B$$

Primer 4. EXILI operacija

- Izvršiti logičku EXILI operaciju nad sledećim brojevima:

A=01011011, B=11010010

$$\begin{array}{r r}
 & 0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1 \\
 & 1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0 \\
\hline
A \oplus B & 1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,1
\end{array}$$

3.0 Logičke funkcije

- Osnovne osobine i karakteristike logičkih funkcija:

1. Logička funkcija, kao i svaka druga funkcija, predstavlja preslikavanje iz jednog skupa vrednosti u drugi skup vrednosti.
2. Nad promenljivama logičke funkcije se vrše logičke operacije (I, ILI, NE, ...).
3. Logičke funkcije se mogu definisati nad proizvoljnim brojem promenjivih.

4. Vrednost logičke funkcije pripada skupu {0,1}.
5. Promenljive logičke funkcije takođe mogu uzimati vrednosti samo iz skupa {0,1}.
6. Logičke funkcije imaju konačnu oblast definisanosti.

3.1 Načini predstavljanja logičkih funkcija

- Svaka logička funkcija se može predstaviti:

1. Kombinacionom tablicom (tablicom istinitosti),
2. Na algebarski način,
3. Pomoću skupa indeksa,
4. Pomoću Karnoovih karti.

3.1.1 Predstavljanje logičkih funkcija pomoću kombinacionih tablica

- Kombinaciona tablica predstavlja tablicu gde se sa jedne strane nalaze sve moguće kombinacije vrednosti promenljivih, a sa druge strane vrednost funkcije za te vrednosti promenljivih.
- Ovaj način predstavljanja nije pogodan ako je broj promenljivih veliki zato što je broj vrsta tablica jednak 2^n, gde je n broj promenljivih logičke funkcije.

Primer 1. logička funkcija tri promenljive data pomoću kombinacione tablice

- Promenljive logičke funkcije su A, B i C, a vrednost funkcije je Y.

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Primer 2. Većinska logika

- Imamo tri glasača. Označimo ih sa A, B i C. Oni glasaju za neki predlog i predlog je usvojen ako su dva ili više glasača glasala *za*. Glasanje *za* predlog označićemo sa logičkim “1”, a *protiv* sa logičkom “0”. Usvajanje predloga označićemo sa logičkim “1”, a odbijanje sa logičkom “0”. Predstaviti ovu logičku funkciju kombinacionom tablicom.

- Kombinaciona tablica za primer 2:

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Primer 3. Lift

- Napraviti logiku koja će davati signal kada lift može da krene i predstaviti je kombinacionom tablicom. Koristiti tri promenljive i to:

A (koja ima vrednost 1 ako su spoljna vrata zatvorena, a 0 ako su otvorena)

B (koja ima vrednost 1 ako su unutrašnja vrata zatvorena, a 0 ako su otvorena)

C (koja ima vrednost 1 ako se u liftu neko nalazi, a 0 ako u liftu nema nikoga)

- Kombinaciona tablica za primer 3:

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

3.1.2 Predstavljanje logičkih funkcija na algebarski način

- Kod ovakvog prikaza, logička funkcija se predstavlja u vidu izraza koji čine promenljive povezane logičkim operacijama (I, ILI, ...).
- Algebarski način predstavljanja se obično izvodi u obliku tzv. *standardnih formi.* Standardne forme su *suma proizvoda* i *proizvod suma.*

- Suma proizvoda predstvlja logički zbir članova koji su u oblika logičkih proizvoda.

$$Y = A\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + ABC + A\bar{B}\bar{C}$$

- Svaki logički proizvod odgovara jednoj vrsti kombinacione tablice u kojoj logička funkcija ima vrednost 1.

Primer 4. Logičku funkciju koja je data kombinacionom tablicom predstaviti sumom proizvoda

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$Y = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

- Proizvod suma predstvlja logički proizvod članova koji su u obliku logičkih suma.

$$Y = \left(\overline{A} + B + C\right)\left(A + \overline{B} + C\right)\left(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}\right)$$

- Svaki logički zbir odgovara jednoj vrsti kombinacione tablice u kojoj logička funkcija ima vrednost 0.

Primer 5. Logičku funkciju koja je data kombinacionom tablicom predstaviti proizvodom suma

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$Y = (A + B + C)(A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + C)$$

3.1.3 Predstavljanje logičkih funkcija pomoću skupa indeksa

- Svakoj vrsti kombinacione tablice se pridružuje indeks koji predstavlja decimalni ekvivalent binarnog broja ispisanog u toj vrsti. Zatim se formira skup indeksa vrsta gde funkcija ima vrednost 1 ili 0.
- Ovaj način predstavljanja je najpogodniji ako je broj promenljivih veliki.

Primer 6. Logičku funkciju koja je data kombinacionom tablicom predstaviti skupom indeksa

	A	B	C	Y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$Y(1) = (3,5,6,7) \qquad Y(0) = (0,1,2,4)$$

3.1.4 Predstavljanje logičkih funkcija pomoću Karnoovih karti

- Karnoova karta je tablica sa 2^n polja. Svakom polju odgovara jedan potpuni proizvod ili potpuni zbir, odnosno jedan skup vrednosti promenljivih.
- Polja su rasporedjena tako da fizički susednim ćelijama odgovaraju skupovi vrednosti promenljivih koji se razlikuju samo po jednoj cifri.
- Vrednost promanljivih se može izračunati na osnovu binarnih kombinacija, koje su prikazane levo i iznad tabele.

Karnoova karta za funkciju sa 4 promenljive.

AB \ CD	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Primer 7. Logičku funkciju koja je data kombinacionom tablicom predstaviti Karnoovom kartom

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

Primer 8. Logičku funkciju koja je data skupom indeksa predstaviti Karnoovom kartom

Y(1)={4,5,7,12,13,15}

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	0
11	1	1	1	0
10	0	0	0	0

Primer 9. Logičku funkciju koja je data sumom proizvoda predstaviti Karnoovom kartom

$$Y = \overline{A}BCD + A\overline{B}CD + AB\overline{C}\,\overline{D} + ABCD + A\overline{B}C\overline{D} + ABC\overline{D}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	1	0	1	1
10	0	0	1	1

Vežbe

Logičke operacije

- Izvršiti logičke operacije I (AND), ILI (OR) i EXILI (XOR) nad sledećim binarnim brojevima:

a. `A=10110010, B=01001010`

b. `A=11010111, B=10011110`

c. `A=10010010, B=10011101`

a.

A	10110010
B	01001010
AB	00000010
A+B	11111010
A⊕B	11111000

b.

A	11010111
B	10011110
AB	10010110
A+B	11011111
A⊕B	01001001

c.

A	10010010
B	10011101
AB	10010000
A+B	10011111
$A \oplus B$	00001111

- Logičku funkciju koja je data kombinacionom tablicom predstaviti:
  - Na algebarski način kao sumu proizvoda i proizvod suma.
  - Pomoću skupa indeksa.
  - Pomoću Karnoove karte.

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Kombinaciona tablica → Algebarski način

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Suma proizvoda:

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$
$$+ A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D} + ABC\overline{D}$$

Proizvod suma:

$$Y = (A+B+C+D)(A+B+C+\overline{D})$$
$$(A+B+\overline{C}+D)(A+\overline{B}+C+\overline{D})(A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})$$
$$(\overline{A}+B+\overline{C}+\overline{D})(\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})$$

Kombinaciona tablica → Skup indeksa

	A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0

$Y(1)=\{3,4,6,8,9,10,12,14\}$

$Y(0)=\{0,1,2,5,7,11,13,15\}$

Kombinaciona tablica → Karnoova karta

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	1	0	1

- **Logičku funkciju koja je data na algebarski način kao suma proizvoda predstaviti:**

- **Pomoću kombinacione tablice.**
- **Pomoću skupa indeksa.**
- **Pomoću Karnoove karte.**

$$Y = \overline{A}BCD + A\overline{B}CD + AB\overline{C}\,\overline{D} + ABCD + A\overline{B}C\overline{D} + ABC\overline{D}$$

Suma proizvoda $\rightarrow$ Kombinaciona tablica

$$Y = \overset{0}{\overline{A}}\overset{1}{B}\overset{1}{C}\overset{1}{D} + \overset{1}{A}\overset{0}{\overline{B}}\overset{1}{C}\overset{1}{D} + \overset{1}{A}\overset{1}{B}\overset{0}{\overline{C}}\overset{0}{\overline{D}} +$$

$$+ \overset{1}{A}\overset{1}{B}\overset{1}{C}\overset{1}{D} + \overset{1}{A}\overset{0}{\overline{B}}\overset{1}{C}\overset{0}{\overline{D}} + \overset{1}{A}\overset{1}{B}\overset{1}{C}\overset{0}{\overline{D}}$$

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Suma proizvoda $\rightarrow$ Skup indeksa

$$\begin{array}{cccccc} 0\,1\,1\,1 & 1\,0\,1\,1 & 1\,1\,0\,0 & 1\,1\,1\,1 & 1\,0\,1\,0 & 1\,1\,1\,0 \end{array}$$

$$Y = \overline{A}BCD + A\overline{B}CD + AB\overline{C}\,\overline{D} + ABCD + A\overline{B}C\overline{D} + ABC\overline{D}$$

Y(1)={7,10,11,12,14,15}

Y(0)={0,1,2,3,4,5,6,8,9,13}

Suma proizvoda → Karnoova karta

$$\overset{0}{\overline{A}}\overset{1}{B}\overset{1}{C}\overset{1}{D}$$

$$Y = \overset{0}{\overline{A}}\overset{1}{B}\overset{1}{C}\overset{1}{D} + \overset{1}{A}\overset{0}{\overline{B}}\overset{1}{C}\overset{1}{D} + \overset{1}{A}\overset{1}{B}\overset{0}{\overline{C}}\overset{0}{\overline{D}} + \overset{1}{A}\overset{1}{B}\overset{1}{C}\overset{1}{D} + \overset{1}{A}\overset{0}{\overline{B}}\overset{1}{C}\overset{0}{\overline{D}} + \overset{1}{A}\overset{1}{B}\overset{1}{C}\overset{0}{\overline{D}}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	1	0	1	1
10	0	0	1	1

- Logičku funkciju koja je data na algebarski način kao proizvod suma predstaviti:

- Pomoću kombinacione tablice.
- Pomoću skupa indeksa.
- Pomoću Karnoove karte.

$$Y = (A + B + C)(A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + C)$$

Proizvod suma $\rightarrow$ Kombinaciona tablica

$$Y=(\overset{0}{A}+\overset{0}{B}+\overset{0}{C})(\overset{0}{A}+\overset{0}{B}+\overset{1}{\overline{C}})(\overset{0}{A}+\overset{1}{\overline{B}}+\overset{0}{C})(\overset{1}{\overline{A}}+\overset{0}{B}+\overset{1}{\overline{C}})$$

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Proizvod suma → Skup indeksa

$$Y=(\overset{0}{A}+\overset{0}{B}+\overset{0}{C})(\overset{0}{A}+\overset{0}{B}+\overset{1}{\overline{C}})(\overset{0}{A}+\overset{1}{\overline{B}}+\overset{0}{C})(\overset{1}{\overline{A}}+\overset{0}{B}+\overset{1}{\overline{C}})$$

Y(0)={0,1,2,5}

Y(1)={3,4,6,7}

Proizvod suma → Karnoova karta

$$Y=\overset{0\,0\,0}{(A+B+C)}\overset{0\,0\,1}{(A+B+\overline{C})}\overset{0\,1\,0}{(A+\overline{B}+C)}\overset{1\,0\,1}{(\overline{A}+B+\overline{C})}$$

AB \ C	0	1
00	0	0
01	0	1
11	1	1
10	1	0