

## PITANJA 2.1

09. Septembar 2016.

### 1. Pitanja iz Neodredjenih integrala

ZADATAK 1.1. Integral racionalne funkcije hiperbolnih funkcija oblika

$$\int \mathcal{R}(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx.$$

ZADATAK 1.2. Integral oblika

$$\int \mathcal{R}(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx.$$

### 2. Pitanja iz Odredjenih integrala

ZADATAK 2.1. O čemu govori slijedeći teorem:

THEOREM 2.1. *Ako su funkcije  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidne i  $g(x) \neq 0$ , tada postoji tačka  $c \in (a, b)$  takva da je*

$$\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}.$$

*Posebno (uz  $g(x) \equiv 1$ ) vrijedi*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

### 3. Pitanja iz Diferencijalnih jednačina

ZADATAK 3.1. Nadjite singularno rješenje diferencijalne jednačine

$$y^2(1 + y'^2) = \alpha^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

### 4. Pitanja iz Funkcija više varijabli

ZADATAK 4.1. Dovoljni uslovi za postojanje lokalnog ekstrema funkcija više varijabli.

## PITANJA 2.2

09. Septembar 2016.

### 1. Pitanja iz Neodređenih integrala

ZADATAK 1.1. Integral racionalne funkcije hiperbolnih funkcija oblika

$$\int \mathcal{R}(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx.$$

### 2. Pitanja iz Određenih integrala

ZADATAK 2.1. Iskazati Newton-Leibnitzovu formulu (Potrebne i dovoljne uslove za njeno postojanje) i njeno značenje pokazati na slijedećem primjeru  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ .

### 3. Pitanja iz Diferencijalnih jednačina

ZADATAK 3.1. (a) Clairautova diferencijalna jednačina. (b) Nadjite opšte i singularno rješenje slijedeće jednačine

$$x = \frac{y}{y'} - \frac{1}{(y')^2}.$$

### 4. Pitanja iz Funkcija više varijabli

ZADATAK 4.1. O čemu govori slijedeći teorem

THEOREM 4.1. *Neka funkcije  $f, \varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ , imaju na  $\mathcal{D}$  neprekidne sve parcijalne derivacije do uključivo drugog reda.*

(i) *Ako funkcija  $f$  u tački  $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$  u kojoj je  $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$  ima lokalni vezani ekstrem uz uslov  $\varphi(x, y) = 0$ , onda mora postojati realan broj  $\lambda_0$  takav da za trojku  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  vrijedi*

$$(4.1) \quad f'_x(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_y(x_0, y_0) = 0, \quad \varphi(x_0, y_0) = 0.$$

(ii) *Ako su tačka  $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$  i realan broj  $\lambda_0$  takvi da trojka  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  zadovoljava uslove (4.1) i ako je  $\tilde{f}''(x_0) \neq 0$ , pri emu je  $\tilde{f}''(x)$  definirano formulom*

$$\tilde{f}''(x) = f''_{xx}(x, y) + 2f''_{xy}(x, y)g'(x) + f''_{yy}(x, y)g'(x)^2 - \frac{f'_y(x, y)}{\varphi'_y(x, y)} \cdot [\varphi''_{xx}(x, y) + 2\varphi'_{xy}(x, y)g'(x) + \varphi''_{yy}(x, y)g'(x)^2],$$

*onda funkcija  $f$  u tački  $(x_0, y_0)$  ima lokalni vezani ekstrem uz uslov  $\varphi(x, y) = 0$  i to minimum ako je  $\tilde{f}''(x_0) > 0$ , odnosno maksimum ako je  $\tilde{f}''(x_0) < 0$ .*

## PITANJA 2.3

09. Septembar 2016.

### 1. Pitanja iz Neodredjenih integrala

ZADATAK 1.1. Izračunajte integrale:

$$\int x^{-11}(1+x^4)^{-1/2}dx \quad \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$$

### 2. Pitanja iz Odredjenih integrala

ZADATAK 2.1. O čemu govori sljedeće teorem:

THEOREM 2.1. *Neka su funkcije  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilne na  $[a, b]$ . Tada vrijedi:*

(i)

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx,$$

(ii) *Ako je  $f(x) \leq g(x)$  za svaki  $x \in [a, b]$ , tada je*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx,$$

(iii)

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

ZADATAK 2.2. Determiniši Nesvojstveni integral 'prve vrste'.

### 3. Pitanja iz Diferencijalnih jednačina

ZADATAK 3.1. (a) Diferencijalna jednačina sa egzaktnim diferencijalom?

(b) Nadjite opšte i singularna rješenja sljedeće jednačine

$$(2x + 2y^2)dx + (4xy + 3y^2)dy = 0.$$

### 4. Pitanja iz Višestrukih integrala

ZADATAK 4.1. Zamjena promjenljivih kod dvostrukog integrala.

ZADATAK 4.2. Zamjena promjenljivih kod trostrukog integrala.

## PITANJA 2.4

09. Septembar 2016.

### 1. Pitanja iz Neodredjenih integrala

ZADATAK 1.1. Integral racionalne funkcije hiperbolnih funkcija oblika

$$\int \mathcal{R}(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx.$$

ZADATAK 1.2. Izračunati integral

$$\int x^2 \sqrt{4x^2 + 9} dx.$$

### 2. Pitanja iz Odredjenih integrala

ZADATAK 2.1. O čemu govori slijedeći teorem:

THEOREM 2.1. *Ako su funkcije  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidne i  $g(x) \neq 0$ , tada postoji tačka  $c \in (a, b)$  takva da je*

$$\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}.$$

Posebno (uz  $g(x) \equiv 1$ ) vrijedi

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

### 3. Pitanja iz Diferencijalnih jednačina

ZADATAK 3.1. Riješte jednačinu

$$y'' + 4y' + 3y = x.$$

### 4. Pitanja iz Funkcija više varijabli

ZADATAK 4.1. Dovoljni uslovi za postojanje lokalnog ekstrema funkcija više varijabli.

ZADATAK 4.2. Konstruišite tangencijalnu ravan na površ.