Пријемни испит 01.07.2019. године – рјешења задатака

1. Ријешити неједначине
 а) $|2-x| \geq 3x-1$, б) $(a-1)x \leq b, a, b \in \mathbb{R}$.

Рјешење:
а) Из дефиниције апсолутне вриједности имамо

$$|2-x| = \begin{cases} 2-x, & x \leq 2 \\ x-2, & x > 2 \end{cases}.$$

За $x \leq 2$ добијамо неједначину $2-x \geq 3x-1$, тј. $x \leq \frac{3}{4}$. Из услова $x \leq 2 \wedge x \leq \frac{3}{4}$ добијамо рјешење неједначине $x \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$.
За $x > 2$ добијамо неједначину $x-2 \geq 3x-1$, тј. $x \leq -\frac{1}{2}$. Из услова $x > 2 \wedge x \leq -\frac{1}{2}$ добијамо празан скуп рјешења неједначине. Према томе, рјешење неједначине је скуп $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$.
б) Разликујемо 3 случаја:
i) Ако је $a-1 > 0$, тј. $a > 1$ тада је рјешење неједначине $x \leq \frac{b}{a-1}$.
ii) Ако је $a-1 < 0$, тј. $a < 1$ тада је рјешење неједначине $x \geq \frac{b}{a-1}$.
iii) Ако је $a-1 = 0$, тј. $a = 1$, тада за $b \geq 0$ рјешење неједначине је сваки реалан број, тј. $x \in \mathbb{R}$, док за $b < 0$ неједначина има празан скуп рјешења.

2. Полином

$$p(x) = x^2 + 2(a+1)x + a + 7$$

нема реалних нула ако за параметар a вриједи (заокружити тачан одговор)
а) $a \in [-3,2]$ б) $a \in \{-3,2\}$ в) $a \in (-3,2)$ г) $a \in (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$.

*Рјешење:*Полином $p(x)$ нема реалних нула ако је дискриминанта квадратне једначине $p(x) = 0$ негативна, тј. ако вриједи

$$4(a+1)^2 - 4(a+7) < 0.$$

Одавде добијамо квадратну неједначину

$$a^2 + a - 6 < 0$$

чије је рјешење $a \in (-3,2)$. Тачан одговор је в).

3. Ако се број x увећа за своју четвртину, а затим добијени број смањи за 20%, тада ће број x:
а) остати непромијењен б) повећаће се за 10% в) смањиће се за 10% г) повећаће се за 5%.
Заокружити тачан одговор.

Рјешење:
Нека је x_1 број који се добије увећавањем броја x за једну четвртину. Тада је

$$x_1 = x + \frac{x}{4} = \frac{5x}{4}.$$

Нека је x_2 број који се добије смањивањем броја x_1 за за 20%. Тада је

$$x_2 = x_1 - \frac{20}{100}x_1 = x_1 - \frac{1}{5}x_1 = \frac{4x_1}{5}.$$

Одавде добијамо

$$x_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{5x}{4} = x$$

тј. број x је остао непромијењен. Тачан одговор је под а).

4. Одредити комплексне бројеве $z = x + iy$ за које вриједи $z(1-2i) - i(1-\bar{z}) = 1 + 2i$.

*Рјешење:*Имамо

$$(x+iy)(1-2i) - i(1-x+iy) = 1 + 2i \Leftrightarrow$$
$$x + 3y + i(-x+y) = 1 + 3i.$$

Изједначавањем реалних и имагинарних дијелова комплексних бројева, долазимо до система једначина

$$x+3y=1,$$
$$-x+y=3.$$

Рјешење система је $x=-2, y=1$, тј. $z=-2+i$.

5. Доказати идентитет

$$\frac{cos2\alpha}{1+sin2\alpha}=ctg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

и навести услове под којима вриједи.

Рјешење:

$$ctg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{ctg\frac{\pi}{4}ctg\alpha-1}{ctg\frac{\pi}{4}+ctg\alpha}=\frac{ctg\alpha-1}{1+ctg\alpha}=\frac{\frac{cos\alpha}{sin\alpha}-1}{1+\frac{cos\alpha}{sin\alpha}}=$$
$$\frac{cos\alpha-sin\alpha}{sin\alpha+cos\alpha}\cdot\frac{cos\alpha+sin\alpha}{cos\alpha+sin\alpha}=\frac{cos^2\alpha-sin^2\alpha}{sin^2\alpha+2sin\alpha cos\alpha+cos^2\alpha}=\frac{cos2\alpha}{1+sin2\alpha}.$$

Идентитет вриједи ако је $sin\alpha+cos\alpha\neq0$, тј. за $\alpha\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Идентитет вриједи и за $sin\alpha=0$, тј. за $\alpha=n\pi, n\in\mathbb{Z}$, јер је $ctg\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)=\frac{cos2n\pi}{1+sin2n\pi}=1$.

6. Ријешити једначину $4^x+7\cdot2^{\frac{x-3}{2}}=2^{-x}$.

Рјешење: Множењем дате једначине са 2^x добијамо

$$2^{3x}+7\cdot2^{\frac{3x-3}{2}}=1.$$

Уводимо смјену $2^{\frac{3x-3}{2}}=t, t>0$. Тада је $2^{3x-3}=t^2\Rightarrow2^{3x}=8t^2$ и дата једначина је еквивалентна квадратној једначини

$$8t^2+7t-1=0.$$

Рјешења квадратне једначине су -1 и $\frac{1}{8}$ и због услова $t>0$ узимамо само позитивно рјешење $t=\frac{1}{8}=2^{-3}$. Према томе

$$2^{\frac{3x-3}{2}}=2^{-3}\Rightarrow\frac{3x-3}{2}=-3\Rightarrow x=-1.$$

7. Ако је $\log_3 2=x$ израчунати $\log_6 144$.

$$\log_6 144=\log_6 6^2\cdot2^2=2\log_6 6+2\log_6 2=$$
$$2+\frac{2}{\log_2 6}=2+\frac{2}{\log_2 2+\log_2 3}=$$
$$2+\frac{2}{1+\frac{1}{\log_3 2}}=2+\frac{2}{1+\frac{1}{x}}=2+\frac{2x}{x+1}=\frac{2+4x}{x+1}.$$

8. Једнакокраки троугао ABC има основицу $AB=2\ m$ и кракове $AC=BC=3\ m$. У тороугао је уписан круг који додирује кракове AC и BC у тачкама D и E. Дужина дужи DE је (заокружити тачан одговор)

а) 1,5 m б) $\frac{4}{3}\ m$ в) 2 m г) 0,8 m.

Рјешење: Нека је тачка О центар уписане кружнице и тачка F средина основице AB. Из подударности троуглова AFO и AOD добијамо да је $AD=AF=1\ m$, па је $DC=2\ m$. Сада из сличности троуглова CDE и ABC добијамо

$$2:3=DE:2,$$

односно $DE=\frac{4}{3}\ m$. Тачан одговор је под б).

9. Написати једначину праве p које пролази кроз тачку $A(1,-2)$ и нормална је на праву $q: x+2y-3=0$. Провјерити да ли тачка $B(-1,2)$ припада правој p.

Рјешење: Једначина праве p кроз тачку A је

$$y + 2 = k(x - 1).$$

Коефицијент k одређујемо из услова нормалности правих p и q. Ако напишемо једначину праве q у експлицитном облику добијамо

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

одакле је коефицијент правца $k_1 = -\frac{1}{2}$. Из услова ортогоналности правих $kk_1 = -1$, добијамо

$$k = -\frac{1}{k_1} = 2.$$

Једначина праве p је

$$y + 2 = 2(x - 1), \quad \text{тј. } 2x - y - 4 = 0.$$

Уврштавајући координате тачке B у једначину праве p, добијамо $-2 - 4 - 4 \neq 0$ па тачка B не припада правој p.

10. Израчунати запремину правилне четверостране пирамиде чија је основна ивица $a = 6\ cm$, а висина пирамиде H за $1\ cm$ краћа од висине h бочне стране.

Рјешење: Имамо $V = \frac{1}{3}a^2H = 12H$. Пошто је $H = h - 1$, из правоуглог троугла којег чине апотема, висина пирамиде и половина основне ивице, добијамо

$$(h - 1)^2 + 9 = h^2.$$

Рјешење ове једначине је $h = 5\ \ cm$. Дакле $H = 4\ cm$, па је $V = 48\ cm^3$.