Даниел А. Романо
Машински факултет Бања Лука,
78000 Бања Лука, Војводе Степе Степановића 71, БиХ,
e-mail: bato49@hotmail.com

Задаци и анализа успјешности кандидата

За математички тест изабрано је, или су намјерно дизајнирани, 10 питања и задатака. Свако питање / задатак вредновано је са 5 индексних поена. У овом дијелу изложени су мотиви избора / дизајнирања ових питања / задатака, начин вредновања понуђених кандидатских одговора на та питања уз пратеће коментаре анализатора.

Задатак 1. (Утврђивање нивоа аритметичког мишљења)

Ако имаш суд од 10 литара и суд од 3 литара запремине (и ништа више), измјери тачно 8 литара воде.

Рјешење: Ако се смију употребљавати само поменута два суда, рјешење овог задатка је, на примјер, слиједеће (Осим овог рјешења, могућа су и нека друга рјешења.):
Први корак: Наспемо суд од 10 литара водом.
Други корак: Из већег суда пресимамо воду у мањи суд – тачно 3 литра.
Трећи и четврти корак: Поновимо претходни поступак. У великој посуди остане 1 литар воде.
Пети корак: Преосталу воду, 1 литар воде, преспемо у мали суд. Дакле, у мали суд се још може насути 2 лита воде.
Шести корак: Наспемо поново воду у суд од 10 литара.
Седми корак: Из великог суда преспемо у мали суд воде тако да га напунимо, тј. да у њему буде 3 литра воде. Како је у малом суду већ био 1 литар воде, можемо додати још само 2 литра воде. Тако у великом суду остане тачно 8 литара воде. □

Аналитичко сагледавање окружења овог задатка: Задатак је облика $10\cdot x + 3\cdot y = 8$, при чему си варијабле x и y цијели бројеви. Дакле, треба наћи (по могућности, најмање) цијеле бројеве x и y такве да је задовољена једнакост $10\cdot x + 3\cdot y = 8$. Ово значи да у цјелобројној мрежи треба одредити чворове те мреже тако да леже на правој $10\cdot x + 3\cdot y = 8$. У овом случају, имамо стратегију:

10л (велика посуда) – 3 пута по 3л (мала подуда) = 1л (остатак у великој посуди)
1л (вода из велике посуде) – 3л (капацитет мале посуде) = -2л (неискориштени капацитет мале посуде)
10 (велика посуда) – 2л (попуњавање капацитета мале подуде) = 8л.

Успјешност / бодови	∅	0	2.5	5	Укупно
Број кандидата	51	58	1	22	132
Проценат	38.67%	43.94	0.76	16.67	100.00%

Легенда: Успјешност ∅ значи да кандидат није ни покушао да понуди рјешење задатка. Успјешност 0 значи да су информације које је кандидат понудио као рјешење задатка биле потпуно неприхватљиве.

Задатак 2. (Утврђивање нивоа вишег аритметичког мишљења)

За боцу и запушач је плаћено 11 КМ. Колико је плаћен запушач, ако је боца скупља за 10 КМ од запушача?

Рјешење: Означимо са b цијену боце и са z цијену запушача. Према условима задатка, имамо:
(а) Боца и запушач заједно су плаћени 11 КМ: $b + z = 11$,
(б) Боца је скупља од запушача за 10 КМ: $b = z + 10$.
Добили смо систем од двије једначине са двије непознанице.

$$b + z = 11, \quad b = z + 10.$$

Ако другу једначину, једначину (б), уврстимо у прву једначину, једначину (а), добијамо

$$(z + 10) + z = 11,$$

т.ј.

$$2z = 1.$$

Одавде слиједи да је $\boldsymbol{z} = ½$ КМ и, према томе, $\boldsymbol{b} = \mathbf{10.5}$ КМ. □

Напомена уз задатак. Овим задатком, а посебно рјешењима овог задатка које нуде студенти, добро се илуструје однос између *интуитивног приступа* рјешавању задатака и *аналитичког приступа* рјешавању задатака.

Успјешност / бодови	∅	0	2.5	4	5	Укупно
Број кандидата	12	45	3	2	70	132
Проценат	9.09%	34.09%	2.27%	1.52%	53.03%	

Легенда: Успјешност ∅ значи да кандидат није ни покушао да понуди рјешење задатка. Успјешност 0 значи да су информације које је кандидат понудио као рјешење задатка биле потпуно неприхватљиве.

Задатак 3. (Утврђивање развоја аритметичко-раноалгебарског мишљења рјешавањем аритметичких контекстуалних задатака)

588 путника мора се превести из једног мјеста у друго ради чега ће путници користити два различита воза. Једна композиција садржи само вагоне од 12 мјеста, док се у другој композицији налазе само вагони са 16 мјеста. Претпоставимо да овај последњи воз има осам вагона више него прва композиција. Колико вагона најмање треба да имају обје композиције да би се сви путници превезли?

Рјешење: Означимо са x број вагона прве композиције, а са y означимо број вагона друге композиције. Према условима задатка, имамо:

$x, y \in \mathbf{N}$

$12x + 16y \geq 588$

$y = x + 8$

Ако из (друге) једначине вриједност варијабле y уврстимо у (прву) неједначину, добијамо

$12x + 16(x+8) \geq 588$

$12x + 16x + 128 \geq 588$

$28x \geq 588 - 128 = 460$

$x \geq 460 : 28 \approx 16.4257...$

$x \geq 17$

Ако је $x = 17$ број вагона првог воза, тада је $y = x + 8 = 17+8 = 25$ број вагона другог воза. Дакле, оба воза могу превести $12 \cdot 17 + 16 \cdot 25 = 204 + 400 = 604$ путника што је више од потребник 588 мјеста за 16 мјеста тј. више је за један читав вагон друге композиције. □

Напомена. Ако би смањили другу композицију за 1 вагон, према условима задатка смањили би и прву композицију такође за 1 вагон. У овом случају број мјеста би био

$$12 \cdot (17-1) + 16 \cdot (25-1) = 192 + 384 = 576$$

што је недовољно за превоз свих питника. Дакле, иако би концепт 'прва композиција од 17 вагона и друга композиција од 24' био довољан за превоз свих 588 путника јер је

$$12 \cdot 17 + 16 \cdot 24 = 204 + 384 = 588$$

рјешење $x = 17$ и $y = 24$, које су нонудили неки од кандидата, овог задатка ипак није прихватљиво јер је $17+8 = 25 \neq 24$.

Успјешност / бодови	∅	0	2.5	4	5	Укупно
Број кандидата	32	38	13	6	43	132
Проценат	24.24%	28.79%	9.89%	4.55%	32.58%	

Легенда: Успјешност ∅ значи да кандидат није ни покушао да понуди рјешење задатка. Успјешност 0 значи да су информације које је кандидат понудио као рјешење задатка биле потпуно неприхватљиве.

Задатак 4. (**Утврђивање постојања логичких алата**)

Дата је тврдња: 'Ако је квадрат неког природног броја паран, тада је и сам тај број паран'. Одредити:

(4.1) *Хипотезу ове импликације.*
(4.2) *Консеквент импликације.*
(4.3) *Обрат ове импликације.*
(4.4) *Контрапозицију дате импликације. и*
(4.5) *Докажи контрапозицију.*

Рјешење: Ако са **A** означимо изјаву '*Квадрат неког природног броја је паран.*' , а са **B** изјаву '*Природан број је паран.*', тада дату изјаву

'Ако је квадрат неког природног броја паран, тада је и сам тај број паран'.

можемо записати у облику

$$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}.$$

Дакле,
(а) хипотеза ове импликације је изјава **A**:

Квардат природног броја је паран.

(б) консеквент / подљедица ове импликације је изјава **B**:

Природан број је паран.

(в) обрат импликације $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ је импликација $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}$:

Ако је природан број паран, тада је и квадрат тог броја паран број.

(г) контрапозиција импликације $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ је импликација $\neg\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A}$:

Ако природан број није паран, тада и квадрат тог броја није паран број.

или

Ако је природан број непаран, тада је и квадрат тог броја непаран број.

(д) Нека је природан број n непаран. (За природан број кажемо да је *паран*, ако је дјељив бројем 2. За природан број кажемо да је *непаран* ако није дјељив бројем 2. '*Природан број је паран или непаран.*' и '*Природан број не може истовремено бити паран и непаран.*') Тада га можемо записати у облику $n = 2m - 1$ (на примјер, за $m = 1$, добија се непаран број 1; за $m = 2$, добија се непаран број 3, за $m = 3$, добија се непаран број 5, и тако даље ...) или $n = 2m+1$ (у овом случају обухваћени су непарни бројеви 3, 5, и тако даље,...).

Доказ	**Аргументација**
Природан број n је непаран.	Хипотеза
$n = 2m - 1$	Репрезентација непарног броја.
$n = 2m - 1 \Rightarrow n^2 = (2m-1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 2(2m^2 - 2m) + 1$	Квадрирање броја n
Број n^2 *има форму* $2q+1$ (за неки број $q = 2m^2 - 2m$)	Препознавање репрезентације
Број n^2 *је непаран природан број.*	Закључак. □

Шта је важно у овом задатку?

Прво. Концепти парног (Природан број је паран ако је дјељив бројем 2. Дакле, у првој декади, бројеви 2, 4, 6, 8 су парни бројеви) и непарног природног броја (Природан број је непаран природан број ако није дјељив бројем 2. Дакле, бројеви 1, 3, 5, 7, 9 су непарни бројеви у првој декади).

Друго. Концепти парног и непарног природног броја у уређеном полупрстену $(\mathbf{N},=,+,\cdot,1,<)$ природних бројева задовољава слиједеће логичке законе: (1) Закон искључења трећег: *Природан број је паран или непаран.* и (2) Закон неконтрадикције: *Природан број не може истовремено бити паран и непаран.* То су алати логичког мишљења које желимо да провјеримо да ли су студенти усвојили.

Треће. Вјештине које желимо да утврдимо да ли студенти владају су препознавање парних и непарних природних бројева – ро је вјештина препознавања репрезентација конкретних математичких концепата:

Ако се двоцифрен број завршава са 0, или парним бројем, тада је он паран број.
Ако се двоцифрен врој завршаца непарним бројем, тада је тај број непаран број.

Четврто. Вјештина претстављања, али и вјештина препознавања тих репрезентација, концепата парних и непарних природних бројева у уређеном полупрстену $(\mathbf{N},=,+,\cdot,1,<)$ природних бројева је пожељна компетенција.

Пето: Ми, у суштини, не утврђујемо ваљаност импликације

'Квадрат неког природног броја паран $\Rightarrow$ Сам тај број је паран',

већ, кориштењем контрапозиције, будући да су логички еквивалентне, утврђујемо ваљаност импликације

Природан број је непаран $\Rightarrow$ Квадрат тог броја је непаран.

Шесто: Прихватање тврдње '*Квадрат неког природног броја паран $\Rightarrow$ Сам тај број је паран*', али и познавање и разумијевање њеног доказа неопходно је за извођење доказа да једначина $x^2 - 2 = 0$ нема рјешење (погледати Задатак (6.3)) у уређеном пољу ($\mathbf{Q}$,+,0,·,1,<) рационалних бројева, тј. да коријен броја 2 није рационалан број.

Успјешност / бодови	$\varnothing$	0	Укупно
Број кандидата	128	4	132
Проценат	96.97%	3.03%	100%

Легенда: Успјешност $\varnothing$ значи да кандидат није ни покушао да понуди рјешење задатка. Успјешност 0 значи да су информације које је кандидат понудио као рјешење задатка биле потпуно неприхватљиве.

Задатаци 5, 6 и 7.

У задацима 5, 6. и 7. кандидатима су понуђена питања везана за установљавање рјешивости линеарних и квадратних једначина и неједначина у различитим окружењима: у уређеном прстену ($\mathbf{Z}$,+,0,·,1, ≤) цијелих бројева, у уређеном пољу ($\mathbf{Q}$,+,0,·,1,≤) рационалних бројева и у уређеном пољу ($\mathbf{R}$,+,0,·,1,≤) реалних бројева. Прво, на когнитивном нивоу, занимало нас је да ли кандидати разумију концепте поменутих алгебарских структура. Занимало нас је и разумијевање слиједећих специфичних подскупова тих структура: Ако је са (S, ≤) означен уређени скуп, тј. носач било које од поменутих алгебарских структура, занимало нас је да ли кандидати разумију концепте подскупова:

{a,b} – неуређени пар објеката скупа S;
(a,b) – уређени пар објеката скупа S;
$\langle a,b\rangle_S = \{x\in S: a < x < b\}$ (интервал);
$[a,b]_S = \{x\in S: a \le x \le b\}$ (сегмент),

те подскупова $\langle a,b]_S = \{x\in S: a < x \le b\}$, $[a,b\rangle_S = \{x\in: a \le x < b\}$ у поменутим алгебарским уређеним структурама, те вјештине репрезентовања горе побројаних концепата подскупова, које колоквијално називамо 'размаци', у тим различитим алгебарским структурама. Друго, у домену алгебарског мишљења, жељели смо да се освједочимо о постојању вјештина рјешавања једначина и нејдначина у раличитим окружењима. Занимале су нас алгебарске вјештине рада са неједнакостима: (1) занимало нас је да ли кандидати препознају математички концепт рјешивости једначина и неједначина у различитим бројевним окружењима; (2) занимао нас је однос кандидата према концептима неједнакости, тј. да ли кандидати разумију концепте сагласнсоти операција адиције и мултипликације у поменутим алгебарским структурама са релацијам уређења у тим структурама.

Задатак 5. (Утврђивање нивоа алгебарског мишљења – развој вјештина рјешавања једначина и неједначина у заданом окружењу – у уређеном прстену цијелих бројева)

У уређеном прстену ($\mathbf{Z}$,+,0,·,1, ≤) *цијелих бројева ријеши слиједеће једначине и неједначине*

(5.**1**) $x + 7 = 3$, (5.**2**) $3\cdot x - 6 = -x + 2$, (5.**3**) $7\cdot x + 5 = 3$, (5.**4**) $a\cdot x + b = c$ ($a, b, c\in\mathbf{Z}$).

(5.**5**) $-5\cdot x \ge 12$, (5.**6**) $-3\cdot(x-1) < 6$. (5.**7**) $a\cdot x \le b$ ($a,b\in\mathbf{Z}$)

Рјешење:

(5.**1**) $x + 7 = 3$,
$x = 3 - 7$
$x = -4 \in\mathbf{Z}$

(5.**2**) $3\cdot x - 6 = -x + 2$,
$3x + x = 6 + 2$
$4x = 8$
$x = 8 : 2$
$x = 2 \in\mathbf{Z}$

(5.**3**) $7\cdot x + 5 = 3$,
$7x = 3 - 5$
$7x = -2$
$x = -2 : 7$
$x = \frac{-2}{7} \notin \mathbf{Z}$

(5.**4**) $ax + b = c$ ($a, b, c\in\mathbf{Z}$)
$ax = c - b$
(i) Нека је $a \neq 0$. Тада је
$x = (c - b) : a$
(ii) Ако је $a = 0$, имамо
$0 = 0 \cdot x = c - b$
У случају да је $c = b$, имамо
$0\cdot x = 0$

што је тачно за свако $x \in \mathbf{Z}$.

Закључак: Једначине (5.1) и (5.2) имају рјешења у прстену $(\mathbf{Z},+,0,\cdot,1)$ цијелих бројева.
Једначина (5.3) нема рјешења у прстену $(\mathbf{Z},+,0,\cdot,1)$ цијелих бројева.
Једначина (5.4), ако је $a = 0$ и $b = c$ има рјешење у прстену $(\mathbf{Z},+,0,\cdot,1)$ цијелих бројева. Ако је $a \neq 0$, тада једначина (5.4) има рјешење у прстену $(\mathbf{Z},+,0,\cdot,1)$ цијелих бројева за све цијеле бројеве a, b, c за које је $\frac{b-c}{a} \in \mathbf{Z}$ **.** За вијеле бројеве a, b, c за које је $\frac{b-c}{a} \notin \mathbf{Z}$ једначина (5.4) нема рјешења у прстену $(\mathbf{Z},+,0,\cdot,1)$ цијелих бројева.

У уређеном прстену $(\mathbf{Z},+,0,\cdot,1,\leq)$ цијелих бројева стратегије рјешавања неједначина су, на примјер, слиједеће:

(**5.5**) $-5\cdot x \geq 12$,
$-5\cdot x \geq 12 \;\big|: (-2)$
$x \leq -\frac{12}{5} \quad \notin \mathbf{Z}$
$x \in \{-\infty, \ldots, -5, -4, -3\}$

(**5.6**) $-4\cdot(x-1) < 6$.
$-4\cdot(x-1) < 6 \;\big|: (-4)$
$x - 1 > -\frac{6}{4} \quad \notin \mathbf{Z}$
$x > 1-\frac{6}{4} = -\frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}$
$x \in \{0, 1, 2, \ldots +\infty\}$

(**5.7**) $a\cdot x \leq b \;\; (a,b \in \mathbf{Z})$
$a\cdot x \leq b \;\big|: a \;\; (a \neq 0, a,b \in \mathbf{Z})$
$x \leq \frac{b}{a} \; (a > 0),\;\; x \geq \frac{b}{a} \; (a < 0)$

Ako је $\frac{b}{a}$ $(a \neq 0)$, цијели број, тада неједначина (**5.7**) има за рјешење скупове
$x \in \{-\infty, \ldots, \frac{b}{a}\}$ (ако је a > 0)
$x \in \{\frac{b}{a}, \ldots, +\infty\}$ (ако је a < 0).

Ако је a = 0, неједначина има облик $0 = 0\cdot x \leq b$ што је могуће само ако је b ненегативан цијели број. У овом случају, рјешење неједначине (5.7) је било који цијели број. Ако је $a = 0$ и $b < 0$, тада неједначина (5.7) нема рјешења. □

Успјешност / Бодови	∅ (1)	0 (1)	0.1-1.5 (1)	1.51-2.5 (2)	2.51-3.5 (3)	3.51-4.5 (4)	4.51-5 (5)	Укупно
Број кандидата	6	3	15	73	16	12	7	132
Проценат	4.55%	2.27%	11.36%	55.3%	12.12%	9.09%	5.3%	

Легенда: Успјешност ∅ значи да кандидат није ни покушао да понуди рјешење задатка. Успјешност 0 значи да су информације које је кандидат понудио као рјешење задатка биле потпуно неприхватљиве. Потпуно прихватљиво урађен задатак носи 5 бодова. Сваки од седам прихватљиво урађених дијелова носи по 5/7 бодова. Постојала је могућност да се вреднује и половина сваког од седам дијелова задатка – то је вредновано са 5/14 бодова. Због великогв броја могућих опција вредновања, приказани резултати су разврсзани у кластере према устаљеним нормама у средњим школама.

Задатак 6. (**Утврђивање нивоа алгебарског мишљења – развој вјештина рјешавања једначина и неједначина у заданом окружењу – у уређеном пољу рационалних бројева**)

У уређеном пољу $(\mathbf{Q},+,0,\cdot,1,\leq)$ *рационалних бројева ријеши јеначине и неједначине*

(6.**1**) $-5\cdot x \geq 12$, (**6.2**) $-4\cdot(x-1) < 6$. (**6.3**) $x^2 - 2 = 0$. (**6.4**) $a\cdot x \leq b \;\; (a,b \in \mathbf{Z})$

Рјешење: У уређеном пољу $(\mathbf{Q},+,0,\cdot,1,\leq)$ рационалних бројева стратегије рјешавања постављених задатака су, на примјер, слиједеће:

(**6.1**) $-5\cdot x \geq 12$,
$-5\cdot x \geq 12 \;\big|: (-2)$
$x \leq -\frac{12}{5} \quad \in \mathbf{Q}$
$x \in \langle -\infty, -\frac{12}{5} \rangle_{\mathbf{Q}}$

(**6.2**) $-4\cdot(x-1) < 6$.
$-4\cdot(x-1) < 6 \;\big|: (-4)$
$x - 1 > -\frac{6}{4} \;\in \mathbf{Q}$
$x \in \langle -\frac{6}{4}, +\infty \rangle_{\mathbf{Q}}$

(**6.4**) $a\cdot x \leq b \;\; (a,b \in \mathbf{Q})$
$a\cdot x \leq b \;\big|: a \;\; (a \neq 0, a,b \in \mathbf{Q})$
$x \leq \frac{b}{a} \; (a > 0),\;\; x \geq \frac{b}{a} \; (a < 0)$

чему су чему вриједи

$$\langle a,b \rangle_{\mathbf{Q}} = \langle a,b \rangle \cap \mathbf{Q}.$$

Ако је $a = 0$, неједначина има облик $0 = 0\cdot x \leq b$ што је могуће само ако је b ненегативан рационалан број. У овом случају, рјешење неједначине (**6.4**) је било који рационалан број. Ако је $a = 0$ и $b < 0$, тада неједначина (**6.4**) нема рјешења.

Једначина (**6.3**) $x^2 - 2 = 0$, будући да је еквивалентна са једначином (**6.3'**) $x^2 = 2$, нема рјешења у уређеном пољу $(\mathbf{Q},+,0,\cdot,1,\leq)$ рационалних бројева јер *не постоји* рационалан број чији је квадрат једнак 2 (Како ми то знамо?) □

Успјешност / Бодови	∅	0	1.0	1.25	1.78	2.5	3.75	5	Укупно
Број кандидата	23	66	1	16	1	23	2	0	132
Проценат	17.42%	50.0%	0.76%	12.12%	0.76%	17.42%	1.52%	0.0%	

Легенда: Успјешност ∅ значи да кандидат није ни покушао да понуди рјешење задатка. Успјешност 0 значи да су информације које је кандидат понудио као рјешење задатка биле потпуно неприхватљиве. Потпуно прихватљиво урађен задатак носи 5 бодова.

Задатак 7. (Утврђивање нивоа алгебарског мишљења – развој вјештина рјешавања једначина и неједначина у заданом окружењу – у уређеном пољу реалних бројева)

У уређеном пољу $(\mathbf{R},+,0,\cdot,1,\leq)$ *реалних бројева ријеши јеначине и неједначине*

(**7.1**) $-5\cdot x^2 \geq 12$, (**7.2**) $-4\cdot(x-1)^2 < 6$. (**7.3**) $x^2 - 2 = 0$. (**7.4**) $a\cdot x^2 \leq b$ $(a,b \in \mathbf{R})$

Рјешење: У уређеном пољу $(\mathbf{R},+,0,\cdot,1,\leq)$ реалних бројева стратегије рјешавања постављених задатака су, на примјер, слиједеће:

(**7.1**) $-5\cdot x^2 \geq 12$,
$-5\cdot x^2 \geq 12 \ \big|: (-2)$
$x^2 \leq -\dfrac{12}{5}$
$x \in \varnothing$

(**7.2**) $-4\cdot(x-1)^2 < 6$.
$-4\cdot(x-1)^2 < 6 \ \big|: (-4)$
$(x-1)^2 > -\dfrac{6}{4}$
$x \in \mathbf{R}$

(**7.4**) $a\cdot x^2 \leq b$ $(a,b \in \mathbf{R})$
$a\cdot x^2 \leq b \ \big|: a$ $(a \neq 0,\ a,b \in \mathbf{R})$
(а) $x^2 \leq \dfrac{b}{a}$ $(a > 0)$, (б) $x^2 \geq \dfrac{b}{a}$ $(a < 0)$

Ако је $b < 0$, тада неједначина (а) нема рјешења, тј. тада је $x \in \varnothing$.
Ако је $b > 0$, тада је неједначина (а) еквивалентна неједначини $-\sqrt{\dfrac{b}{a}} \leq x \leq \sqrt{\dfrac{b}{a}}$.
Ако је $b < 0$, тада неједначина (б) има за рјешење читав скуп **R**.
Ако је $b > 0$, тада је неједначина (б) еквивалентна дисјункцији неједначина $x \leq -\sqrt{\dfrac{b}{a}} \ \vee \ x \geq \sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

Ако је $a = 0$, неједначина (**7.4**) има облик $0 = 0\cdot x \leq b$ што је могуће само ако је b ненегативан реалан број. У овом случају, рјешење неједначине (**7.4**) је било који реалан број. Ако је $a = 0$ и $b < 0$, тада неједначина (**7.4**) нема рјешења.

Једначина (**7.3**) $x^2 - 2 = 0$, будући да је еквивалентна са једначином (7.3') $x^2 = 2$, има рјешења у уређеном пољу $(\mathbf{R},+,0,\cdot,1,\leq)$ реалних бројева јер *постоје* реални бројеви $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ чији је квадрат једнак 2. □

Успјешност / Бодови	∅	0	0.56	0.625	0.83	1.15	1.25	1.87	2.5	Укупно
Број кандидата	29	44	1	4	2	1	44	1	6	132
Проценат	21.97%	33.3%	0.76%	3.03%	1.52%	0.76%	33.3%	0.76%	4.55%	

Легенда: Успјешност ∅ значи да кандидат није ни покушао да понуди рјешење задатка. Успјешност 0 значи да су информације које је кандидат понудио као рјешење задатка биле потпуно неприхватљиве. Потпуно прихватљиво урађен задатак носи 5 бодова.

Задатак 8. (**Утврђивање нивоа напреднијег алгебарског мишљења – контекстуални задатак са линеарним једначином и линеарном неједначином**)

Када користимо taxi, плаћамо 'полазни тошак' у износ од 2.00 КМ и 0.60 КМ по пређеном километру. Одговорите на слиједећа питања:

(8.1) *Од чега зависи трошак једног кориштења taxi-а?*

(8.2) *Ако платимо y КМ за једно кориштење taxi-а, при пређених x колометара, прикажи y као функцију величине x.*

(8.3) *Направи кратку табелу међуовисности величина x и y.*

(8.4) *Опиши како се конструуише граф ове функције.*

(8.5) *Ако је за једно кориштење taxi-а плаћено 10 КМ, колико километара је пређено?*

(8.6) *Ако је при кориштењу taxi-а taxi-шоферу дато 10 КМ, које све могуће руте су плаћене, и колико је кусур при свакој од тих рута?*

Рјешење. **(8.1)** Трошак јендог кориштења taxi-а очигледно зависи од 'полазног трошка' и броја пређених километара.

(8.2) Функционална веза која повезује укупан трошак y (у КМ) кориштења taxi-а при пређених x колометара је

$$y = 2 + 0.6 \cdot x.$$

(8.3) Направи кратку табелу међуовисности величина x и y.

(8.4) Опиши како се конструуише граф ове функције.

(8.5) Да би израчунали колико километара је пређено ако је за једно кориштење taxi-а плаћено 10 КМ, треба да ријешимо једначину

$$10 = 2 + 0.6 \cdot x$$

Даље, имамо

$$x = 8 : 0.6 \approx 13.33...$$

(8.6) Ако је при кориштењу taxi-а taxi-шоферу дато 10 КМ, могуће руте, тј. број x пређених километара, које су плаћене добијају се рјешавањем слиједеће неједначине

$$10 \geq 2 + 0.6 \cdot x.$$

Дакле, 'кусур' z је

$$z = 8 - 0.6 \cdot x$$

при чему је x рјешење горње неједначине. Дакле

x може бити 1 (z = 7.4 КМ), 2 (z = 6.8 КМ), 3 (z = 6.2 КМ), ..., 13 (z = 0.2 КМ). □

Успјешност / Бодови	∅	0	0.83	1.2	1.67	2.5	3.33	4.16	4.5	5	Укупно
Број кандидата	34	30	18	2	13	12	5	7	2	9	132
Проценат	25.76%	22.73%	13.64%	1.52%	9.85%	9.09%	3.79%	5.3%	1.52%	6.82%	

Легенда: Успјешност ∅ значи да кандидат није ни покушао да понуди рјешење задатка. Успјешност 0 значи да су информације које је кандидат понудио као рјешење задатка биле потпуно неприхватљиве. Потпуно прихватљиво урађен задатак носи 5 бодова.

Напомена. Овај познати задатак, тзв. 'taxi-проблем' пружа изванредну прилику за процјењивање досегнутог (вишег) нивоа алгебарског мишљења кандидата. Препознавање линеарне функције, њених својстава али и експонираним (не-)вјештина рјешавања припадних линеарних алгебарских једначина и неједначина сматра се неопходно потребним елементима вишег алгебарског мишљења којима би требало да кандидати владају будући да су ('официјелно' успјешно) окончали више разреде основне школе.
.

Задатак 9. (**Утврђивање нивоа развоја геометријског мишљења у складу са класификацијом унутар Теорије ван Хиелеових о разумијевању геометрије – развој појма бесконачности у геометријском концепту**)

Нека је дата кружница k(C,r) са центром у тачци C и двијема дијаметрално супротним тачкама A и B. Размисли о свим могућим троугловима ΔABC са врхом у тачки C која лежи на кружници. Колико има таквих троуглова – коначно много, бесконачно пребројиво много или бесконачно непревројиво много? Нацртај два таква троугла тако да је висина h троугла (дуж од тачке C до дужи AB):

(**9.1**) *највећа могућа*;
(**9.2**) *најмања могућа*.
(**9.3**) *У сваком од ова два случаја опиши (што је могуће прецизније) положај тачке C*.

Напомена: Ако Вам се чини да неки од понуђених података чини да задатак изгледа неразумљив, уз нагалашавање промијените тај податак па понудите рјешење тако промјењеног задатка.)

Рјешење: Задатак је дизајниран тако да се установи да ли кандидати препознају концепт немогућег / контрадикторног /апсурдног окружења за проналажење тражених информација). Према условима задатка, тачка C је истовремено и центар кружнице и тачка на ружници. То је класична контрадикција, јер

Тачка C не може је истовремено бити и не бити на кружници.

(Примјена принципа неконтрадикције, који је таутологија / аксиом у класичној логици, на однос тачке и кружница). Дакле, овај задатак нудећи некомпатибилне улазне податке, није могуће ријешити. □

Напомена. Концепт на којем је конструисан овај задатак (и наравно, питања у њему) био је слиједећи:
(1) кандидати само препознају немогуће окружење задатка, или
(2) кандидати препознајући немогуће окружење задатка измјене податак: треће тјеме троостраника, ради одређености, означимо га са D, не може бити у центру кружнице *k(C,r)*. Тако измјењени задатак требало је да гласи:

Нека је дата кружница k(C,r) са центром у тачци C и двијема дијаметрално супротним тачкама A и B. Размисли о свим могућим троугловима ΔABD са врхом у тачки D која лежи на кружници. Колико има таквих троуглова – коначно много, бесконачно пребројиво много или бесконачно непревројиво много? Нацртај два таква троугла тако да је висина h троугла (дуж од тачке D до дужи AB):

(9.1') *највећа могућа*;
(9.2') *најмања могућа*.
(9.3') *У сваком од ова два случаја опиши (што је могуће прецизније) положај тачке D*.

Сматрамо да је посебно је важно да се култивише идеја рационалности немогућих контекста у вези са аргументацијом која поткрепљује елементе доказа препличући елементе телеолошке контроле и епистемиолошких знања. Аргументација и доказивање у различитим контекстима анализирани су са више различитих аспеката. Значајан број студија посвећен је структурним аспектима узајамности доказовања и припадне аргументације. На примјер, Бетина Педемонте их анализира кориштењем тернарног Тоулмановог модела[1]. С друге стране, Роберт Дувал поентира тернарне структуре само за доказе. Он се снажно залаже да треба разликовати доказ од припадне неопходне аргументације истичући да закључивање у аргументацији се заснива на тзв. 'суштинским везама' док се доказ базира на више формализованом процесу при чему се закључује у корацима заснованим на претходним премисама.

Да су кандидати понудили одговоре на овај задатака у облику (2) тада би истраживачи могли изводити закључке о њиховим концептима појма бесконачности у геометријском окружењу.

Успјешност / Бодови	∅	0	2.5	5	Укупно
Број кандидата	79	49	1	3	132
Проценат	59.85%	37.12%	0.76%	2.27%	

Задатак 10. (Утврђивање нивоа развоја геометријског мишљења – минимално на 'нивоу 1' али и установљавање елемената напреднијег математичког мишљења)

(**10.1**) *Нацртај квадрат. Спој средине сусједних страница. тако се добија нови квадрат. Ако поновимо процедуру за овај квадрат, добија се трећи квадрат. И тако даље ... добија се низ уметнутих квадрата.*
(**10.2**) *Напиши неколико чланова и општи члан низа дужина страница тих квадрата.*
(**10.3**) *Напиши неколико чланова и општи члан низни површина тих квадрата.*

Рјешење.

[1] Stephen Edelston Toulmin (25.03.1922, Лондон – 4.12.2009, Лос Анђелес), британски филозоф и едукатор

Ако кандидат понуди прихватљув цртеж низа уметнутих квадрата, тада се процјењује да је ниво геометријског мишљења кандидата на '*нивоу* 0' [2] (јер зна и препознаје квадрат) и унутар '*нивоа* 1' (јер зна и препознаје елементе квадрата - тјемена, странице, центар странице, али и разумије међусобне односе елемената квадрата – сусједне странице, ...)

Означимо странице полазног квадрата са а. Квадрат странице a_1 слиједећег квадрата □ $A_1 B_1 C_1 D_1$ се добија кориштењем Питагориног теорема о правоуглом тространику/троуглу на слиједећи начин:

$$a_1^{\ 2} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

Квадрат странице a_2 слиједећег квадрата □ $A_2 B_2 C_2 D_2$ се добија аналогно претходном поступку:

$$a_2^{\ 2} = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 = \frac{a_1^{\ 2}}{2} = \frac{1}{2^2} a^2$$

Квадрат странице a_3 слиједећег квадрата □ $A_3 B_3 C_3 D_3$ добија се аналогно:

$$a_3^{\ 2} = \left(\frac{a_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{2}\right)^2 = \frac{a_2^{\ 2}}{2} = \frac{1}{2^3} a^2$$

Експонирањем способности препознавања и разумијевања међусобних односа страница у правоуглом тространику / троуглу, али и експонирањем вјештине примјене Питагорине теореме о дужинама страница тих тространика / троуглова кандидат показује да је овладао вишим математичким мишљењем (што су компетенције које се стичу окончањем старијих разреда основне школе у нас).

Претпоставимо, сада, да општи члан тог низа изгледа овако

$$a_k^{\ 2} = \frac{1}{2^k} a^2$$

Ако овај постипак наставимо, послије k+1 корака, добијамо

$$a_{k+1}^{\ \ 2} = \left(\frac{a_k}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_k}{2}\right)^2 = \frac{a_k^{\ 2}}{2} = \frac{1}{2^k} a^2$$

На основу принципа математичке индукције, закључујемо да:

(1) опадајући низ површина квадрата чланова тог низа је:

$$P = a^2, \quad P_1 = \frac{1}{2}\ a^2, \quad P_2 = \frac{1}{2^2}\ a^2, \ P_3 = \frac{1}{2^3}\ a^2, \ldots, P_к = \frac{1}{2^k}\ a^2, \ldots$$

(2) опадајући низ дужина страница квадрата чланова тог низа је:

$$a\ , \ \ a_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}\ , \ a_2 = \frac{a}{\sqrt{2^2}}\ , \ a_3 = \frac{a}{\sqrt{2^3}}\ , \ldots, \ \ a_k = \frac{a}{\sqrt{2^k}}\ \ldots$$

Успјешност / Бодови	∅	0	0.5	0.83	1.67	1.87	2.0	2.5	3.33	Укупно
Број кандидата	56	40	1	2	27	2	1	2	1	132
Проценат	42.42%	30.30%	0.76%	1.52%	20.45%	1.52%	0.76%	1.52%	0.76%	

Легенда: Успјешност ∅ значи да кандидат није ни покушао да понуди рјешење задатка. Успјешност 0 значи да су информације које је кандидат понудио као рјешење задатка биле потпуно неприхватљиве. Потпуно прихватљиво урађен задатак носи 5 бодова. Будући да је задатак имао три дијела, сваки од дијелова био је вреднован са 5/3 бодова

[2] У складу са теоријом ван Хиелеових нивоа о разумијевању геометрије.