Универзитет у Бањој Луци
Машински факултет
Субјект: ***Пријемни испит***
Школска година: 2016/17

Рјешења задатака

Задатак 1. Скратити разломак и записати услове под којима добијене једнакости важе $\frac{a^2-8a+16}{b(a^2-4a)}$ $(a,b\in\boldsymbol{R})$.
Рјешење: Услово под којима задатак постоји су:

$$b \neq 0 \ \ a^2 - 4a \neq 0.$$

Дакле,

$$b \neq 0 \text{ и } a \neq 0 \text{ и } a \neq 4.$$

Даље, имамо:

$$\frac{a^2-8a+16}{b(a^2-4a)} = \frac{(a-4)^2}{ba(a-4)} = \frac{a-4}{ba} \quad (a,b\in\boldsymbol{R}).$$

□

Задатак 2. Изврши назначене математичке операције / радње $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)+\frac{2}{ab}:\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2$.
Рјешење: Услови под којима задатак постоји су:

$$b \neq 0 \text{ и } a \neq 0.$$

Имамо:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)+\frac{2}{ab}:\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 =$$

$$= \frac{a^2+b^2}{ab} : \frac{a^2+b^2+2ab}{ab} + \frac{2}{ab} : \left(\frac{b+a}{ab}\right)^2$$

$$= \frac{a^2+b^2}{ab} \cdot \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{2}{ab} \cdot \frac{a^2b^2}{(a+b)^2} ; a+b \neq 0$$

$$= \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} + \frac{2ab}{(a+b)^2}$$

$$= \frac{a^2+2ab+b^2}{(a+b)^2}$$

$$= \frac{a^2+2ab+b^2}{(a+b)^2} = 1.$$

□

Задатак 3. Ријеши неједначину $(x+1)(x+2)+3(1-x)<(x-1)^2$ у уређеном пољу $\boldsymbol{R}$ реалних бројева.
Рјешење:

$$(x+1)(x+2)+3(1-x)<(x-1)^2$$

$$(x+1)(x+2)+3(1-x)-(x-1)^2<0$$

$$x^2+2x+x+2+3-3x-x^2+2x-1<0$$

$$2x + 4 < 0$$

$$x < -2.$$

□

Задатак 4. Ријеши неједначину $\frac{x-3}{x=1} \geq \frac{x-5}{x-3}$ у уређеном пољу $\boldsymbol{R}$ реалних бројева.

Рјешење: Записана формула није коректна. Не представља препознатљиву неједначину. Према томе, непотребно је покушавати пронаћи бројеве у пољу $\boldsymbol{R}$ реалних бројева који је задовољавају.

Напомена 1 уз задатак: Кандидатима је понуђен задатак : Ријеши неједначину $\frac{x-3}{x-1} \geq \frac{x-5}{x-3}$.
Услови под којима задатак постоји су:

$$x \neq 1 \text{ и } x \neq 3.$$

Дакле, подручје у којем рјешавамо неједначину је $\langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 1,3\rangle \cup \langle 3,+\infty\rangle$. На том скупу, даље, имамо

$$\frac{x-3}{x-1} \geq \frac{x-5}{x-3} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} - \frac{x-5}{x-3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x-3)-(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-3)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-6x+9-x^2+6x-5}{(x-1)(x-3)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{(x-1)(x-3)} \geq 0.$$

Како је 4 позитиван број, одавде слиједи

$$(x\text{-}1)(x\text{-}3) \geq 0$$

што је еквивалентно са слиједећа два система неједначина:

$$\begin{aligned} x-1 &\geq 0 \\ x-3 &\geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x-1 &\leq 0 \\ x-3 &\leq 0 \end{aligned}$$

Одавде слиједи:

$$x \geq 1 \wedge x \geq 3 \qquad\qquad x \leq 1 \wedge x \leq 3$$

односно

$$x \geq 3 \text{ или } x \leq 1.$$

Будући да бројеви 1 и 3 не могу бити рјешења третиране неједначине, коначно имамо да је скуп

$$\Delta = \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 3,+\infty\rangle$$

рјешење неједначине.

□

Напомена 2 уз задатак: Кандидатима је понуђен задатак $\frac{x-3}{x+1} \geq \frac{x-5}{x-3}$. Рјешење овако дизајнираног задатка је

$$\frac{x-3}{x+1} \geq \frac{x-5}{x-3} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} - \frac{x-5}{x-3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x-3)-(x-5)(x+1)}{(x+1)(x-3)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-6x-9)-(x^2-5x+x-5)}{(x+1)(x-3)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x-14}{(x+1)(x-3)} \geq 0.$$

Даље, треба да буде

$$-2x-14 \geq 0 \ \wedge (x+1)(x-3) > 0$$

или

$$-2x-14 \leq 0 \ \wedge (x+1)(x-3) < 0.$$

Даље, имамо

$$x \leq 7 \ \wedge (x < -1 \vee x > 3)$$

односно

$$x \geq 7 \ \wedge \ -1 < x < 3.$$

Одавде слиједи

$$x \in \langle -\infty, -1] \cup \langle 3,7].$$

Задатак 5. Ријеши једначину $log(x-1) + 2log\sqrt{x+2} = 1$ у уређеном пољу ***R*** реалних бројева.

Рјешење: Услови под којима задатак постоји су:

$$x - 1 > 0 \ \wedge \ x + 2 > 0.$$

Дакле, домен у којем тражимо рјешење једначине је $\Delta = \langle 1, +\infty \rangle$. Ако је варијабла x из тог скупша, даље, имамо:

$$log(x-1) + 2log\sqrt{x+2} = 1 \Leftrightarrow log(x-1) + \log(x+2) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log(x-1)(x+2) = 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 10$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1-\sqrt{1+48}}{2} = -4 \quad \vee \quad x = \frac{-1+\sqrt{1+48}}{2} = 3.$$

Како број -4 не лежи у скупу Δ, рјешење третиране једначине је $x = 3$.

□

Задатак 6. Ријеши једначину $a^x - a^{x-3} - a^3 + 1 = 0$ у уређеном пољу ***R*** реалних бројева.

Рјешење: Услови под којима задатак постоји су: $a > 0 \wedge a \neq 1$. Под тим условима, имамо

$$a^x - a^{x-3} - a^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (a^x - a^{x-3}) - (a^3 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^x(1 - a^{-3}) = a^3 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^x \cdot \frac{a^3-1}{a^3} = a^3 - 1$$

$$\Leftrightarrow a^x \cdot \frac{1}{a^3} = 1$$

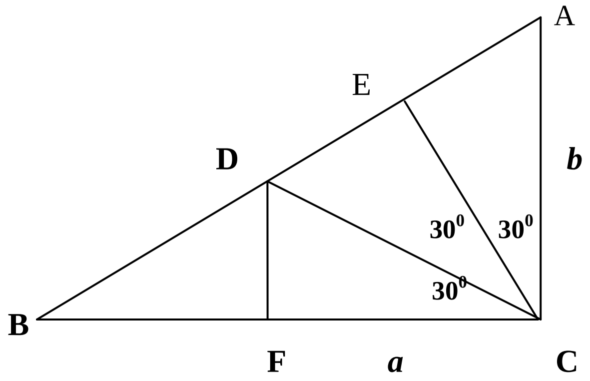
$$\Leftrightarrow a^x = a^3$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \ .$$

□

Задатак 7. Дат је правоугли троугао ΔABC чије су катете CA = b и CB = a . Прави угао код тјемена C подијељен је на три једнака дијела дужима CD = p и CE = q. Изрази варијабле / величине p и q као функције варијабли / величина a и b.

Рјешење: Услови под којима задатак постоји су показани на слиједећем моделу:



При томе је: CA = b и CB = a, CD = p и CE = q. Нека је тачка F ножиште нормале суштене из тачке D на основицу троугла ΔABC. Троугао ΔDFC је правоугли са правим угфлом код тјемена F и чији унутрашњи угао код тјемена C износи тачно 30^0 и чија је хипотенуза CD = p. Дакле, у тром троуглу, страница DF је једнака DF = CD $\sin 30^0$ = p $\cdot \frac{1}{2} = \frac{p}{2}$ FB = a - CD·cos $\sin 30^0$ = a - p $\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Даље, из сличности троуглова ΔABC и ΔDBF, слиједи:

$$\frac{p}{2} : b = a - p\frac{\sqrt{3}}{2} \ : a \ .$$

Одавде добијамо

$$p = \frac{2ab}{a+b\sqrt{3}} \ .$$

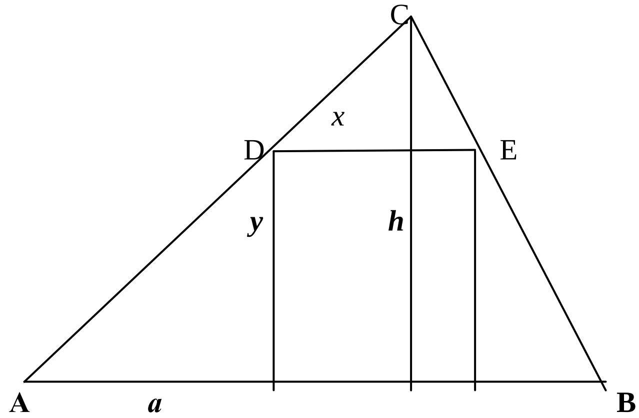
Аналогним мпоступком се добија

$$q = \frac{2ab}{b+a\sqrt{3}} \ .$$

□

Задатак 8. У троуглу чија је основица a и висина h уписати правоугаоник највеће површине. Наћи површину тог правоугаоника.

Рјешење: Означимо варијаблама x и y странице тог уписаног правоугаоника. Његова површина је P = x·y. Окружење у којем треба тражити рјешење овог задатка дато је слиједећим моделом:



Посматрамо троуглове ΔABC и ΔDEC. Они су слични. Код троугла ΔDEC имао основицу DE = x и висину h-y. као последицу сличности, имамо

$$a : h = x : \ h - y \Rightarrow x = \frac{a}{h}(h - y) .$$

Дакле, површина уписаног правоугаоника је

$$P = \frac{a}{h}(hy - y^2).$$

Функција $y \ \rightarrow hy - y^2$ је парабола. Тјеме те параболе се остварtује у тачки $\frac{h}{2}$. Дакле, максимална површина уписаног правоугаоника је $P_{max} = \frac{ah}{4}$.

□

Задатак 9. Сваки од кандидата ако освоји минимално 15 бодова на овом тестирању добија право да се упише на Машински факултет. Одредити хипотезу / претпоставку и консеквент / закључак у овој изјави. Конструисати: (а) *Обрат* ове изјаве; (б) *Негацију* ове изјаве; (в) *Контрапозицију* ове изјаве.

Рјешење: Означимо словом t било којег кандидата који је приступио тестирању. Означимо (великим штампаним словима латинске абаведе) слиједеће реченице:

$\boldsymbol{A}(t) \equiv$ кандиодат t је освојио минимално 15 бодова на овом тестирању
$\boldsymbol{B}(t) \equiv$ кандиодат t је добио право да се упише на Машински факултет.

Према конструкцији реченице

„*Сваки од кандидата ако освоји минимално 15 бодова на овом тестирању добија право да се упише на Машински факултет*.“

она се записује на слиједећи начин:

$$(\forall t)(\boldsymbol{A}(t) \Rightarrow \boldsymbol{B}(t)).$$

(а) *Обрат* ове изјаве гласи:

$$(\forall t)(\boldsymbol{B}(t) \Rightarrow \boldsymbol{A}(t)).$$

(Ријечима исказано: *Ако је кандидат t добио право да се упише на Машински факултет, онда је он освојио минимално 15 бодова на овом тестирању*.)

(б) *Негација* ове изјаве гласи:

$$\neg(\forall t)(\boldsymbol{A}(t) \Rightarrow \boldsymbol{B}(t)).$$

(Ријечима исказано: *Није тачно да ако је кандидат освоји минимално 15 бодова на овом тестирању, онда стиче право да се упише на машински факултет*, тј. *Постоји бар један кандидат који није освојио минимално 15 бодова на овом тестирању а ипак је стекао право да се упише на Машински факултет*.)

(в) Контрапозиција ове изјаве гласи:

$$(\forall t)(\neg\boldsymbol{B}(t) \Rightarrow \neg\boldsymbol{A}(t)).$$

(Ријечима исказано: *Ако је кандидат t није добио право да се упише на Машински факултет, онда је он није освојио минимално 15 бодова на овом тестирању*.)

□

Задатак 10. Показати да парних природних бројева има исто онолико колико има непарних природних бројева.

Рјешење: Парни природни бројеви су они природни бројеви који су дјељиви бројем 2. Означимо са 2$\boldsymbol{N}$ скуп свих таквих бројева. Непарни природни бројеви су они природни бројеви који нису дјељиви бројем 2. Означимо са $2\boldsymbol{N}-1$ скуп свих таквих бројева. Да би доказали тражену једнакост потребно је и довољно показати да су ова два скупа еквипотентна, тј. Да између њих постоји бра једна бијекција (Функција је бијекција ако и само ако је инјективна и сурјективна). На примјер, кореснoденција

$$f: 2\boldsymbol{N} \ni 2n \to 2n\text{-}1 \in 2\boldsymbol{N}\text{-}1$$

је бијекција. Заиста:

(1) f *је функција*: $2n = 2m \Rightarrow 2n-1 = 2m-1$;

(2) f је *инјективна* функција: $2n-1 = 2m-1 \Rightarrow 2n = 2m$;

(3) f је *сурјективна* функција: За било који непаран број $2n-1$ постоји тачно један паран број $2n$ који се посредством ове функције пресликава у $2n-1$.

□