Универзитет у Бањој Луци
Машински факултет
Субјект: ***Пријемни испит***
Школска година: 2014/15

Рјешења задатака на пријемном испиту 23.06.2014.

Задатак 1. (6 бодова) Аутобуска карта од бања Луке до Бијељине кошта 42,50 КМ. Студенти имају право на повластицу од 23% од регуларне цијене карте. Колики ПДВ (ПДВ = Порез на додатну вриједност је 17%), у апсолутном износу, плаћају студенти на једну купљену карту?

Одговор. Цијена карте је 42,50 КМ.

Попуст 23%

Рачун: 42,50 КМ · (1 – 0.23) = 42,50 КМ · 0,77 = 32,725 КМ

ПДВ 17%

Рачун: 32,725 КМ = (цијена карте без ПДВ-а) + (цијена карте без ПДВ-а)· 0,17

32,725 КМ = (цијена карте без ПДВ-а)· 1.17

(цијена карте без ПДВ-а) = $\frac{32.725 \text{ КМ}}{1.17} \cong 27{,}97$ КМ

ПДВ на 27,97 КМ је 27,97 · 0.17 ≅ 4,75491 КМ.

Задатак 2. (6 бодова) За кружницеК$_1$(О,3) (кружница са центром у тачки О и полупречником 3 цм) и К$_2$(S,4) (кружница са центром у тачки S и полупречником 4 цм) одредити количник **q** и разлику **d** између количника пречника и обима ове двије кружнице.

Одговор. Количник обима сваке кружнице и пречника те кружнице је (ирационалан) број π. Дакле, количник пречника и обима ове двије (горе наведене) кружнице је $\frac{1}{\pi}$. Према томе,

$$\mathbf{q} = \frac{1}{\pi} : \frac{1}{\pi} = \mathbf{1}, \qquad \mathbf{d} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = \mathbf{0}.$$

Задатак 3. (6 бодова) У квадрату странице 1 цм израчунати дијагоналу **d.** Заокружи тачан одговор:
(а) **d** је рационалан број 2.414**;** (б) **d** је децималан број 2.4142**;** (в) **d** је реалан број 2.41421; (г) није ни једно од претходно поменутих одговора.

Одговор. Како је $\mathbf{d} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, треба одговорити на питање какав је број $\sqrt{2}$. Прво, $\sqrt{2}$ је реалан број јер предстаља дужину реалне дужи (дијагонале квадрата). Зна се да реалан број јесте рационалан или ирационалан (и да не може бити истовремено и једно и друго). Претпоставимо да је $\sqrt{2}$ рационалан број, тј. претпоставимо да се може написати у облику разломка $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ (при чему су a и b **релативно прости природни бројеви**). Тада би било $2 = \frac{a^2}{b^2}$, одакле би слиједило да је $a^2 = 2b^2$, тј. број a^2 је паран природан број. Тада би и број a био такође паран природан број. Заиста, ако би број а био непаран број, било би:

$$a = 2n + 1 \Rightarrow a^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$$

одакле закључујемо да би и број a^2 био непаран природан број. То је немогуће јер је број a^2 паран. Дакле, мора бити $a = 2u$ (за неки природан број u). Даље би, из $(2u)^2 = 2b^2$ слиједило $4u^2 = 2b^2$, односно $b^2 = 2u^2$ па би опет закључили да је и број b^2 паран природан број, што би опет давало да је и број b паран природан број, рецимо $b = 2v$. Као закључак имамо да су бројеви a и b истовремено релативно прости и нису релативно прости што је контрадикција (немогућа ситуација). Зато, претпоставку која нас је довелу ову немогућу ситуацију, „Претпоставимо да је $\sqrt{2}$ рационалан број" треба добацити. Коначно имамо: Број $\sqrt{2}$ није рационалан број.

Задатак 4. (6 бодова) Фабрика располаже металном траком дужине 3,15 м и ширине 1,75 м. Колика је материјала, у цантриметрима квадратним, употребљено за производњу финалног производа (у четри корака) ако је коефицијент искористивости по корацима слиједећи: 98%, 72%, 69% и 83% респективно.

Одговор: 3.15 м · 1.75 м = 315 цм · 175 цм = 55125 цм^2

55125 цм^2 · 0.98 · 0.72 · 0.69 · 0.83 = 22275.85374 цм^2 .

Задатак 5. (6 бодова) Колико је растојање између тачака A = (2, 3, 4) и B = (4, 3, 2) ?

Одговор: $d = \sqrt{(4-2)^2 + (3-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$.

Задатак 6. (6 бодова) Ријештити неједначину $\frac{4-3x}{x-2} \geq 2$.

Одговор.

Први корак: Разломак на лијевој страни неједначине хе детерминисан уз услов: $x - 2 \neq 0$. Дакле, $x \neq 2$.

Други корак:

$$\frac{4-3x}{x-2} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{4-3x}{x-2} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4-3x}{x-2} - \frac{2x-4}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8-5x}{x-2} \geq 0.$$

Трећи корак: Алгебарски разломак $\frac{8-5x}{x-2}$ је ненегативан ако и само ако су и бројник и називник истог знака.

Дакле:

(1) $8 - 5x \geq 0 \wedge x - 2 > 0$ или (2) $8 - 5x \leq 0 \wedge x - 2 < 0$

Имамо:

$8 - 5x \geq 0$, $x - 2 > 0$

$-5x \geq -8$, $x > 2$

$x \leq \frac{8}{5}$

$x \in \emptyset$

$8 - 5x \leq 0 \wedge x - 2 < 0$

$-5x \leq -8$, $x < 2$

$x \geq \frac{8}{5}$

$\frac{8}{5} \leq x < 2$.

Задатак 7. (6 бодова) Ако је a позитиван реалан број, детерминиши степен a^x ако је: (1) x је природан број; (2) x је негативан цијели број ; (3) x је рационалан број ; (4) x је ирационалан број.

Одговор: (0) Мора бити $a > 0$ и $a \neq 1$.

(1) Ако је x природан број, тада је $a^x = a \cdot a \cdot ... \cdot a$ при чему има онолико множилаца колики је природан број x.
(2) Ако је $x = 0$, тада је $a^0 = 1$.
(3) Ако је $x = -k$ негативан цијели број, тада је $a^x = \frac{1}{a^k}$, при чему је a^k објашњено у тачки (1).
(4) Ако је $x = \frac{z}{m}$ рационалан број при чему је m природан број, тада је $a^x = \sqrt[m]{a^z}$ (m –ти аритметички корјен ненегативног реалног броја a^z).
(5) Ако је $a > 1$, тада је $a^x = \sup\{ a^r : r \in \mathbf{Q} \wedge r < x \}$. Ако је $1 < a < 1$, тада је $a^x = \inf\{ a^r : r \in \mathbf{Q} \wedge r < x \}$.

Задатак 8. (6 бодова) Ако у поља на шаховској плочи стављамо зрна кукуруза почевши од 1 зрна на првом пољу а у сваком слиједећем пољу дупло, колико зрна кукуруза има на посљедњем пољу, а колико зрна кукуруза има на шаховској плочи?

Одговор: На прво поље стављамо 1 ($= 2^0$) зрно, на друго поље стављамо 2^1 зрна, на треће поље стављамо 2^2 зрна, на четврто поље стављамо 2^3 зрна. Ако овако наставимо, на 64-о поље стављамо 2^{63} зрна кукуруза. То је геометријска прогресија са количником q = 2. Укупно зрна на шаховској плочи је

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{63} = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1.$$