Zadaci sa prijemnog ispita održanog 7.9.2018. sa rješenjima

1. Riješiti sistem jednačina
$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$$
$$x + y = -2$$
Rješenje: Iz druge jednačine sistema zaključujemo da je $y = -2-x$ pa uvrštavajući ovo u prvu jednačinu dobijamo $x^2 + (x+2)^2 - 2x - 2(x+2) = 2$. Dalje je $x^2 = 1$ pa je $x = 1$ ili $x = -1$. Za $x = 1$ dobijamo da je $y = -3$, za $x = -1$, $y = -1$. Konačno, rješenje sistema je skup $\{(1,-3), (-1,-1)\}$.

2. Dat je skup funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c, (a, b, c \in \mathbb{R})$. Odrediti koeficijente a, b, c tako da vrijedi
$$f(0) = 4, \quad f(-3) = -20, \quad f(1) = 4,$$
a zatim skicirati grafik te funkcije.
Rješenje:
$$f(0) = 4 \implies c = 4$$
$$f(-3) = -20 \implies 9a - 3b + c = -20$$
$$f(1) = 4 \implies a + b + c = 4$$
Sada dobijamo da je $a = -2$ i $b = 2$ pa je funkcija koja zadovoljava navedene uslove $f(x) = -2x^2+2x+4$. Nule ove funkcije su $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$. Tjeme parabole koja predstavlja grafik ove kvadratne funkcije je $T(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$.

3. Riješiti jednačinu $|1-x| + 2|x-3| = 3x+2$.
Rješenje:
$x \in (-\infty, 1) \implies 1 - x - 2(x-3) = 3x + 2 \implies 6x = 5 \implies x = \frac{5}{6} \in (-\infty, 1)$
$x \in [1, 3) \implies x = \frac{3}{4} \notin [1, 3)$
$x \in [3, +\infty) \implies -7 = 2$ što je netačna jednakost pa u ovom intervalu nema rješenja jednačine.
Dakle, jedino rješenje jednačine je $x = \frac{5}{6}$.

4. Ako se jedna stranica pravougaonika poveća za 20%, a druga smanji za 20% , površina pravougaonika će:
a) ostati nepromijenjena *b*) povećaće se za 4% *c*) smanjiće se za 4% *d*) smanjiće se za 10%.
Zaokružiti tačan odgovor i obrazložiti.
Rješenje:
$P = ab$ površina pravougaonika. $P_1 = 1.2a \cdot 0.8b = 0.96ab = \frac{96}{100}P$. Dakle površina pravougaonika će se smanjiti za 4% pa je tačan odgovor (*c*).

5. Odrediti kompleksne brojeve $z = x + iy$ tako da vrijedi
$$2z(1-2i) - i(1-\overline{z}) = 3 - 5i$$
Rješenje:
$$2(x+iy)(1-2i) - i(1-x+iy) = 3 - 5i \implies (2x+5y) + i(-3x+2y-1) = 3 - 5i.$$
Gornja jednakost kompleksnih brojeva nam daje sistem
$$2x + 5y = 3$$
$$-3x + 2y - 1 = -5$$
čijim rješavanjem dobijamo da je $x = \frac{83}{19}$ i $y = \frac{1}{19}$ pa je $z = \frac{83}{19} + \frac{1}{19}i$.

6. Dokazati identitet

$$\sin^2(x+\frac{\pi}{4})+\sin^2(x-\frac{\pi}{4})=1$$

Rješenje:

Na osnovu adicionih formula dobijamo

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x-\cos x).$$

Sada je

$$\sin^2(x+\frac{\pi}{4})+\sin^2(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)^2+\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)^2=$$

$$=\frac{1}{2}(2+2\sin x\cos x-2\sin x\cos x)=1.$$

7. Riješiti nejednačinu $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-1}>25$.
Rješenje: $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-1}>\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \implies 3x-1<-2 \implies x<\frac{-1}{3}$.

8. Riješiti jednačinu $\log_5(x+2)+\log_5(4-x)=1$.
Rješenje: Uslov zadatka je: $x+2>0\wedge 4-x>0$ tj. $x\in(-2,4)$.
$\log_5(x+2)(4-x)=log_5 5 \implies -x^2+2x+8=5 \implies x^2-2x-3=0 \implies x_1=-1, x_2=3$.
Dakle, $x\in\{-1,3\}$.

9. U kružnicu poluprečnika r je upisan jednakostranični trougao. Izračunati dužinu njegove stranice, obim i površinu.
Rješenje: $a=\sqrt{3}r, O=3\sqrt{3}r, P=\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$.

10. Napisati jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $C(1,2)$ i paralelna je pravoj koja je određena tačkama $A(-3,-2)$ i $B(4,0)$.
Rješenje: $AB: y=\frac{2}{7}(x-4)$ jednačina prave kroz tačke A i B. Koeficijent pravca prave čija se jednačina traži je jednak koeficijentu pravca prave AB jer su spomenute prave paralelne. Tražena jednačina je $y-2=\frac{2}{7}(x-1)$. Zapisana u implicitnom obliku jednačina prave je $2x-7y+12=0$.