UNIVERZITET U BANJOJ LUCI
MAŠINSKI FAKULTET

Dr Valentina Golubović-Bugarski

MEHANIKA 3

(Skripta – izvodi predavanja)

Banja Luka, oktobar 2017.

PREDGOVOR

Ova skripta priređena su prema važećem nastavnom programu predmeta Mehanika 3 (2016) koji se izvodi u III semestru I ciklusa studija na svim odsjecima Mašinskog fakulteta u Banjoj Luci.

Nastavno gradivo predmeta Mehanika 3 obuhvata dinamiku kao dio mehanike krutog tijela u kojem se izučava kretanje materijalne tačke, materijalnog sistema i krutog tijela pod djelovanjem sila. Obim gradiva prilagođen je fondu časova predavanja i vježbi (3+3). U skriptama je gradivo izloženo na način da je prvo obrađena dinamika materijalne tačke, a potom dinamika materijalnog sistema i krutog tijela.

Ovaj sažeti tekst svakako će pomoći studentima u pripremanju ispita iz ovog fundamentalnog predmeta tehničke struke. Studenti se upućuju da šira i dublja saznanja iz područja Tehničke mehanike, koja se obrađuju u ovom nastavnom predmetu, steknu iz odgovarajuće nastavne literature, udžbenika i zbirki zadataka, dostupnih u bibliotekama i na internetu.

Banja Luka, oktobar 2017.

Autor

UVOD: OSNOVNI POJMOVI I ZAKONI DINAMIKE

Dinamika je dio teorijske mehanike u kome se izučavaju zakoni kretanja materijalnih tijela pod dejstvom sila.

Dinamiku možemo podijeliti na:

- Dinamiku materijalne tačke (Ako se dimenzije tijela pri kretanju mogu zanemariti, onda kažemo da je u pitanju materijalna tačka, koja se razlikuje od geometrijske tačke time što ima konačnu masu.)
- Dinamiku sistema materijalnih tačaka i krutog tijela (Pod materijalnim sistemom podrazumijeva se sistem materijalnih tačaka, koje zahvaljujući postojanju veza između tačaka ne mogu da se kreću nezavisno jedna od druge. Ako su mase u nekom dijelu prostora neprekidno raspoređene, tada tačaka ima beskonačno mnogo i sistem obrazuje neprekidnu sredinu, a oblast prostora ispunjena neprekidno raspoređenom masom predstavlja materijalno tijelo. Kruto tijelo je ono koje pod dejstvom sila ne mijenja svoj oblik i dimenzije.)

Osnovni zakoni dinamike:

Formulisao ih je Njutn 1687. godine u svom djelu „Matematički osnovi prirodne filozofije“ i ti zakoni su nazvani Njutnovi zakoni ili zakoni kretanja. Njutnovi zakoni su objektivni zakoni prirode, ustanovljeni na osnovu opažanja i eksperimenata kako samog Njutna tako i njegovih prethodnika.

Prvi Njutnov zakon-zakon inercije: *Materijalna tačka (tijelo) ostaje u stanju mirovanja ili ravnomjernog pravolinijskog kretanja, dok pod djelovanjem sile ne bude prinuđena da to svoje stanje promjeni*. Ovim se definiše inertnost tijela. Ako se tijelo ne kreće ravnomjerno i pravolinijski, onda se ono nalazi pod dejstvom drugih materijalnih tijela, a ovo dejstvo u mehanici predstavlja silu. Količinska mjera mehaničkog uzajamnog dejstva materijalnih tijela naziva se sila. Ipak, kao mjera mehaničkog kretanja uzima se količina kretanja, tj. proizvod vektora brzine i mase tijela, $\vec{K} = m\vec{v}$. I Njutnov zakon može se iskazati i na ovaj način:

Ako na materijalnu tačku ne djeluje nikakva sila onda je količina kretanja te materijalne tačke konstanta, tj. $\vec{K} = m\vec{v} = const$.

Drugi Njutnov zakon-osnovni zakon dinamike:

a) *Brzina promjene količine kretanja materijalne tačke (tijela) jednaka je po intenzitetu, pravcu i smjeru sili koja dejstvuje na materijalnu tačku (tijelo).*

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = \vec{F} .$$

Ovaj zakon Njutn je iskazao jednačinom: $m\left(v - v_0\right) = F\left(t - t_0\right)$.

Ojler je dijeljenjem jednačine sa $\left(t - t_0\right)$ i prelaženjem na graničnu vrijednost dobio

$$m\lim\frac{v - v_0}{t - t_0} = ma = F$$

i iskazao II Njutnov zakon u obliku:

b) *Promjena kretanja proporcionalna je sili i vrši se u pravcu sile, tj. intenzitet sile koja dejstvuje na materijalnu tačku srazmjeran je masi i intenzitetu njenog ubrzanja, dok se pravac i smjer sile i ubrzanja poklapaju*

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = \vec{F} \quad \text{odnosno} \quad m\vec{a} = \vec{F} .$$

Ova jednačina je na snazi samo u odnosu na inercijalni sistem referencije, tj. koordinatni sistem koji je nepokretan ili se pomjera translatorno konstantnom brzinom (koordinatni početak vrši jednoliko pravolinijsko kretanje).

Treći Njutnov zakon-zakon dejstva i protivdejstva (zakon o jednakosti akcije i reakcije): *Dejstvu (akciji) uvijek je jednako protivdejstvo (reakcija), ili dva tijela dejstvuju jedno na drugu silama istih intenziteta i pravaca a suprotnih smjerova.*

Pored ovih osnovnih zakona, u dinamici se koristi i sve što je o pojmu sile uvedeno u statici (npr. paralelogram sila, princip veza, oslobađanje od veza).

DINAMIKA MATERIJALNE TAČKE

DINAMIKA MATERIJALNE TAČKE

Pod materijalnom tačkom podrazumijevamo materijalno tijelo određene konačne mase a malih dimenzija, tako da se može smatrati da je cjelokupna masa koncentrisana u jednoj geometrijskoj tački.

Problemi koje rješava dinamika mogu se podijeliti na dva osnovna pitanja:

- Kolike sile dejstvuju na tačku ako je poznato njeno kretanje? Rješenje ovog pitanja proizilazi direktno iz II Njutnovog zakona, tj. ako je poznat zakon kretanja materijalne tačke, treba odrediti sile koje proizvode to kretanje.
- Kakvo je kretanje tačke ako su poznate sile koje dejstvuju na tačku? Ovaj zadatak rješava se integraljenjem diferencijalnih jednačina kretanja, tj. ako su poznate sile koje dejstvuju na materijalnu tačku, kretanje tačke se odredi integraljenjem diferencijalnih jednačina kretanja. U tehnici uglavnom rješavamo ovo drugo pitanje, koje se naziva i osnovni zadatak dinamike.

Zadatak dinamike tačke je postavljanje diferencijalnih jednačina kretanja i njihovo integraljenje. Diferencijalne jednačine kretanja materijale tačke izvode se iz osnovnog zakona dinamike - II Njutnovog zakona.

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA SLOBODNE MATERIJALNE TAČKE

Posmatramo kretanje slobodne materijalne tačke M mase m, na koju dejstvuje sistem sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$. Ako je položaj materijalne tačke M u odnosu na inercijalni sistem referencije određen vektorom položaja $\vec{r}$ onda drugi zakon dinamike glasi

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad \text{odnosno} \qquad m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\left(\vec{r}, \vec{v}, t\right).$$

Sila F, odnosno sile F_i , u opštem slučaju, zavisi od položaja tačke, njene brzine i vremena.

Ova jednačina predstavlja diferencijalnu jednačinu kretanja tačke u vektorskom obliku.

Jednačinu je moguće projektovati na ose utvrđenog sistema referencije i tada se dobijaju razni oblici skalarnih diferencijalnih jednačina kretanja materijalne tačke.

a) Dekartov koordinatni sistem

$$m\ddot{x} = X\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right), \quad m\ddot{y} = Y\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right), \quad m\ddot{z} = Z\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right)$$

U ovim jednačinama su $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ projekcije vektora ubrzanja $\vec{a}$ tačke na ose Dekartovog sistema referencije, a X, Y, Z su projekcije rezultujuće sile $\vec{F}$ koja dejstvuje na tačku na ose Dekartovog sistema referencije *Oxyz.*

b) Polarne koordinate

$$ma_r = F_r \;; \quad ma_\varphi = F_\varphi, \quad \text{odnosno}$$

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = \sum_{i=1}^{n} F_{ir} \;; \quad m\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) = \sum_{i=1}^{n} F_{i\varphi}$$

c) Prirodne koordinate

$$ma_t = F_t \;; ma_n = F_n \;; ma_b = F_b \,.$$

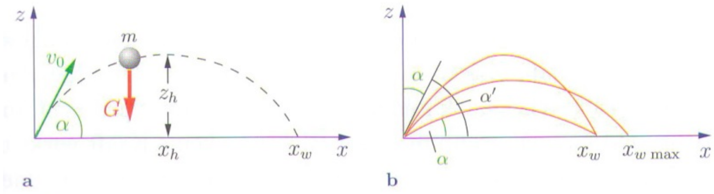
Za $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$; $a_n = \frac{v^2}{R_k} = \frac{\dot{s}^2}{R_k}$; $a_b = 0$, imamo $m\frac{d^2s}{dt^2} = F_t$; $m\frac{v^2}{R_k} = F_n$; $0 = F_b$.

Primjer: Kosi hitac

Odrediti zakon kretanja materijalne tačke mase m kojoj je u početnom trenutku $t_0 = 0$ saopštena početna brzina $\vec{v}_0$ pod uglom α u odnosu na horizontalu. Zanemariti otpor vazduha pri kretanju tačke.

Rješenje:

1. Usvajamo Dekartov koordinatni sistem i početak sistema postavljamo u početni položaj tačke. Tačka se kreće u ravnini xOz, tako da prikazujemo koordinatni sistem u ovoj ravni.
2. Crtamo materijalnu tačku u proizvoljnom položaju na putanji i prikazujemo sile koje dejstvuju na tačku tokom kretanja. U ovom slučaju na materijalnu tačku dejstvuje samo sila teže $\vec{G}$.



3. Polazeći od II Njutnovog zakona $m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$, pišemo <u>vektorsku jednačinu</u>

$$m\vec{a} = \vec{G}$$

I <u>projektujemo je na koordinatne ose</u>, čim dobijamo diferencijalne jednačine kretanja tačke

$$m\ddot{x} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{z} = -G = -mg \qquad \Rightarrow \quad \ddot{z} = -g$$

4. <u>Integraljenjem</u> ovih jednačina dva puta <u>dobijemo opšta rješenja</u> u kojim figurišu integracione konstante

$$\dot{x} = C_1 \qquad\qquad x = C_1 t + C_2$$

$$\dot{z} = -gt + C_3 \qquad\qquad z = -g\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4$$

5. <u>Integracione konstante odredimo iz početnih uslova kretanja</u>, tj. položaja tačke $\left(x_0 = 0, z_0 = 0\right)$ i brzine tačke $\left(\dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha,\, \dot{z}_0 = v_0 \sin\alpha\right)$ u početnom trenutku $t_0 = 0$. Uvrštavanjem ovih početnih uslova u opšta rješenja definišemo vrijednost integracionih konstanti:

$$\dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad C_1 = v_0 \cos\alpha$$

$$x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\dot{z}_0 = v_0 \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad C_3 = v_0 \sin\alpha$$

$$z_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 0$$

6. Sada izračunate konstante uvrstimo u opšta rješenja diferencijalnih jednačine kretanja tačke i dobijemo jednačine koje predstavljaju zakon brzine materijalne tačke i zakon kretanja materijalne tačke:

<u>Zakon brzine tačke</u>: $\dot{x} = v_0 \cos\alpha \qquad \dot{z} = -gt + v_0 \sin\alpha$

<u>Zakon kretanja tačke</u>: $x = v_0 \cos\alpha \cdot t \qquad z = -g\frac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha \cdot t$

7. Eliminacijom vremena t iz zakona kretanja određujemo <u>jednačinu putanje tačke</u>:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x \cdot tg\alpha$$

<u>Jednačina z=z(x) pokazuje da je putanja tačke parabola</u>.

8. Domet tačke jeste koordinata x_D onog položaja „D“ na horizontalnoj ravni gdje će pokretna tačka pasti po završenom slobodnom kretanju. Odredimo ga iz uslova da je koordinata $z_D = 0$. Ako

stavimo u zakonu kretanja da je $z_D = 0$ onda možemo odrediti trenutak vremena t_D kojem odgovara ova vrijednost koordinate z. To je vrijeme koje je potrebno tački da pređe putanju od početnog položaja do konačnog položaja kada udara u horizontalnu podlogu, tj. <u>ukupno vrijeme leta tačke iznosi</u>

$$t_D = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

<u>Domet tačke</u> je : $$x_D = x(t_D) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Kako je $\sin 2\alpha = \sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, proizilazi da se za jednu početnu brzinu i dvije vrijednosti ugla $\alpha \left(\alpha, \alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ dobije isti domet (položeni i strmi kosi hitac). Maksimalni domet imamo za $\alpha = 45^0$ i iznosi $x_{D\max} = \frac{v_0^2}{g}$.

9. Maksimalna visina hica, tj. maksimalna visina penjanja materijalne tačke odgovara položaju tjemena parabole. Odredi se iz uslova da je tangenta na putanju tačke u tjemenu parabole horizontalna, tj. paralelna osi x. Kako je vektor brzine tačke određen pravcem tangente na putanju, to znači da materijalna tačke u najvišem položaju na putanji ima samo horizontalnu komponentu brzine, tj. $\vec{v} = \vec{v}_x$, dok je $v_z = \dot{z} = 0$. Upravo iz ovog uslova, $v_z = \dot{z} = 0$, odredimo trenutak vremena $t_h = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$ u kojem se pokretna tačka nalazi u tjemenu parabole.

   <u>Maksimalna visina hica je</u> : $$z_h = z(t_h) = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

   Zbog simetričnosti putanje tačke je $x_h = \frac{x_D}{2}$. Visina kosog hica zavisi samo od z komponente početne brzine, tj. $\dot{z}_0 = v_0 \sin\alpha$.

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA NESLOBODNE (VEZANE) MATERIJALNE TAČKE (DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRINUDNOG KRETANJA MATERIJALNE TAČKE)

Materijalna tačka je neslobodna ako se njeno kretanje pod dejstvom aktivnih sila vrši po određenoj liniji, površi ili dijelu prostora, a kretanje ovakve tačke naziva se neslobodno kretanje ili kretanje po vezi. Jednačina date površi ili linije po kojoj je tačka prinuđena da se kreće naziva se jednačina veze.Za vrijeme za koje se tačka pri kretanju nalazi na vezi, njene koordinate moraju zadovoljiti jednačine veze.

JEDNAČINE VEZA. PODJELA VEZA

Ukoliko se tačka kreće po nekoj površi, onda je jednačina veze jednačina te površi: $f(x, y, z) = 0$.

Ukoliko se tačka kreće po nekoj liniji, koja je određena presjekom dvaju površi, onda su jednačine veze određene jednačinama tih površi: $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$.

Ako se veze ne mijenjaju tokom vremena, nazivaju se <u>skleronomne</u> (stacionarne), a ako zavise od vremena, $f(x, y, z, t) = 0$, onda su <u>reonomne</u> (nestacionarne).

Ako veza ograničava samo slobodu kretanja tačke u prostoru, a ne ograničava intenzitet njene brzine, tada jednačina veze ne zavisi od brzine i veza se naziva <u>holonomna</u> (geometrijska), a ako veza ograničava i slobodu kretanja tačke u prostoru i intenzitet njene brzine, tada jednačina veze zavisi od brzine tačke i veza se naziva neholonomna (neintegrabilna).

Veze su zadržavajuće ili obostrane ako se za svo vrijeme kretanja tačka nalazi pod dejstvom veze, tj. ostaje stalno na nepokretnoj površi ili liniji, odnosno veze su nezadržavajuće ili jednostrane ako sprečavaju pomjeranje tačke u nekom pravcu, ali dozvoljavaju pomjeranje u suprotnom pravcu.

Veze kod kojih zanemarujemo trenje, tj. koje smatramo idealno glatkim, nazivaju se idealne veze, dok su veze kod kojih ne zanemarujemo trenje realne veze.

Proučavanje kretanje neslobodne tačke može se izvršiti na isti način kao i slobodne tačke, ako se veza odstrani a njen uticaj zamjeni odgovarajućom reakcijom veze.
Pri razmatranju neslobodnog kretanja tačke potrebno je dejstvo veza (materijalnih tijela) na materijalnu tačku zamijenti reakcijama veza i onda razmatrati tačku kao slobodnu na koju osim aktivnih sila dejstvuju i reakcije veza (princip oslobađanja od veza).

Ako sa $\vec{F}$ označimo rezultantu aktivnih sila, a sa $\vec{R}$ rezultantu svih reakcija veza, onda osnovna jednačina dinamike za neslobodnu tačku glasi

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}.$$

KRETANJE TAČKE PO GLATKOJ NEPOKRETNOJ POVRŠI. LAGRANŽEVE JEDNAČINE PRVE VRSTE

Neka se tačka kreće po nepokretnoj glatkoj površi, pri čemu je veza holonomna. Koordinate tačke moraju zadovoljiti jednačinu veze (površi) $f(x, y, z) = 0$. Kako je veza idealna, reakcija veze $\vec{N}$ je usmjerena po pravcu normale na površ. Poznato je da je gradijent skalarne funkcije $f(x, y, z)$ vektor koji je takođe usmjeren po normali u datoj tački na uočenoj površi

$$grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \ .$$

Koristeći se uslovom kolinearnosti vektora $\vec{N}$ i *grad f*, može se napisati da je

$$\vec{N} = \lambda grad\ f\ , \quad \text{tj.} \quad N_x\vec{i} + N_y\vec{j} + N_z\vec{k} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

gdje je λ - Lagranžev množitelj veza.

Projektujući osnovnu jednačinu neslobodnog kretanja tačke $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N}$ na ose nepokretnog Dekartovog sistema referencije, dobija se

$$m\ddot{x} = X + N_x = X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$m\ddot{y} = Y + N_y = Y + +\lambda\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$m\ddot{z} = Z + N_z = Z + +\lambda\frac{\partial f}{\partial z}$$

Ove jednačine nazivaju se Lagranževe jednačine prve vrste.

PRINUDNO KRETANJE MATERIJALNE TAČKE PO KRIVOJ. OJLEROVE JEDNAČINE

Pri kretanju neslobodne materijalne tačke po nepokretnoj glatkoj liniji diferencijalnu jednačinu kretanja

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i + \vec{N}$$

možemo projektovati na ose prirodnog triedra, tj. pravac tangente, normale i binormale

$$ma_t = m\frac{d^2s}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} F_{it}$$

$$ma_n = m\frac{v^2}{R_k} = \sum_{i=1}^{n} F_{in} + N_n$$

$$ma_b = 0 = \sum_{i=1}^{n} F_{ib} + N_b$$

Ove jednaćine nazivaju se Ojlerove jednačine kretanja tačke po nepokretnoj krivoj. Reakcija idealne veze razložena je na komponente u pravcu normale i u pravcu binormale

$$\vec{N} = \vec{N}_n + \vec{N}_b .$$

Ako se materijalna tačka kreće po nepokretnoj hrapavoj krivoj, reakcija veze $\vec{R}$ razlaže se na normalnu komponentu $\vec{N}$ i tangentnu komponentu $\vec{F}_\mu$ koja predstavlja silu trenja klizanja. Diferencijalne jednačine kretanja neslobodne materijalne tačke po hrapavoj liniji u prirodnim koordinatama imaju oblik

$$ma_t = m\frac{d^2s}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} F_{it} - F_\mu$$

$$ma_n = m\frac{v^2}{R_k} = \sum_{i=1}^{n} F_{in} + N_n$$

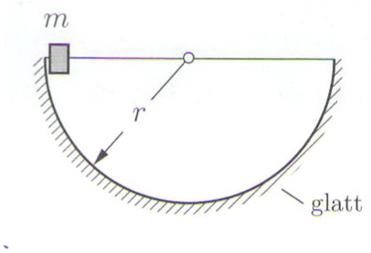
$$ma_b = 0 = \sum_{i=1}^{n} F_{ib} + N_b$$

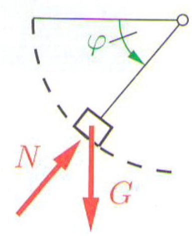
Sila trenja klizanja određena je izrazom $F_\mu = \mu N = \mu\sqrt{N_n^2 + N_b^2}$.

Primjer: Posmatrajmo kretanje materijalne tačke M, mase m, po glatkoj kružnoj podlozi poluprečnika r.

Neka tačka M započinje kretanje bez početne brzine iz prikazanog položaja. Pošto se tačka kreće u ravni po zadatoj vezi (kružnici), to ona ima jedan stepen slobode kretanja (s=2·1-1=1), a kao koordinatu koja definiše položaj tačke tokom kretanja možemo uzeti ugao φ.

Trebamo nacrtati tačku M u nekom proizvoljnom položaju na vezi i primijeniti princip oslobađanja od veza, tako da su sile koje dejstvuju na tačku težina $\vec{G}$ (spoljašnja sila) i reakcija veze $\vec{N}$ (u ovom slučaju veza je glatka pa je reakcija usmjerena po pravcu normale na vezu u datom položaju tačke).





Polazeći od II Njutnovog zakona, kretanje tačke opisujemo diferencijalnim jednačinama u prirodnim koordinatama:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i \quad \Rightarrow \quad ma_n = \sum F_{in} + N_n$$

$$ma_t = \sum F_{it}$$

S obzirom na to da normalno i tangencijalno ubrzanje možemo iskazati u funkciji ugla φ, diferencijalne jednačine kretanja tačke su:

projekcija na pravac normale (n) : $mr\dot{\varphi}^2 = N - G\sin\varphi$

projekcija na pravac tangente (t) : $mr\ddot{\varphi} = G\cos\varphi$.

Nepoznate u ovim jednačinama su N i φ. Reakciju veze N ćemo odrediti iz prve jednačine (projekcije na pravac normale) , ali zato moramo poznavati promjenu brzine $\dot{\varphi}$ u funkciji položaja tačke, tj. ugla φ. Iz druge jednačine (projekcije na pravac tangente) možemo odrediti tu zavisnost, ako napišemo da je:

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi},$$

pa je: $mr\dot{\varphi}\dfrac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = mg\cos\varphi \quad\Rightarrow\quad \dot{\varphi}d\dot{\varphi} = \dfrac{g}{r}\cos\varphi d\varphi$, čim su razdvojene promjenljive u jednačini.

Integraljenjem jednačine, uz početne uslove kretanja $\varphi_0 = 0$ i $\dot{\varphi}_0 = 0$ (iz $v_0 = r\dot{\varphi}_0 = 0$), proizilazi

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{r}\sin\varphi, \quad \text{tj.} \quad \dot{\varphi} = \sqrt{2\frac{g}{r}\sin\varphi}.$$

Iz poznate ugaone brzine $\dot{\varphi}$, znamo kolika je brzina tačke M, iskazana u funkciji položaja tačke, φ :

$$v = r\dot{\varphi} = \sqrt{2gr\sin\varphi}.$$

Najveća brzina tačke je za $\sin\varphi = 1$ i iznosi $v_{\max} = \sqrt{2gr}$, a očigledno je da $\sin\varphi = 1$ odgovara najnižem položaju tačke m na putanji gdje je $\varphi = 90^o$.

Reakciju veze N sada možemo odrediti iz projekcije na pravac normale, uvrštavanjem $\dot{\varphi}^2$:

$$N = mr2\frac{g}{r}\sin\varphi + mg\sin\varphi = 3mg\sin\varphi$$

U najnižem položaju tačke na putanji, za $\varphi = 90^o$, imamo maksimalnu vrijednost reakcije veze

$$N_{\max} = 3mg = 3G.$$

U ovom zadatku odredili smo reakciju veze N, a tačka dejstvuje na vezu silom pritiska koja ima isti intenzitet i pravac kao ova reakcija, samo suprotan smjer.

SILE OTPORA

Sile otpora su u tehnici ponekad vrlo značajne i treba ih uključiti u jednačine kretanja tačke. Ove sile mogu zavisiti od kretanja tačke. Sile otpora su tangencijalne na putanju tačke i imaju suprotan smjer od smjera kretanja, npr. sila trenja klizanja između dva tijela u dodiru ili sila otpora vazduha.

Kod kretanja krutih tijela u tečnostima i gasovima pojavljuju se takođe otpori kretanja koji se mogu odrediti eksperimentalno. Pokazaćemo dva idealizovana primjera.

a) Ako su brzine kretanja male onda kažemo da je strujanje fluida laminarno, a sila otpora sredine u tom slučaju je proporcionalna prvom stepenu brzine : $F_w = kv$.

   Faktor proporcionalnosti k zavisi od geometrije tijela oko kojeg struji fluid i dinamičke viskoznosti fluida η. Džordž Gabrijel Stoks (1819-1903) je 1854. god. odredio zakon za silu otpora kugle poluprečnika r oko koje struji tečnost brzine v: $F_w = 6\pi\eta r v$.

b) Ako su brzine strujanja veće onda je strujanje turbulentno. Kod turbulentnog strujanja približna sila otpora je proporcionalna drugom stepenu brzine: $F_w = kv^2$.

   Faktor proporcionalnosti k ovdje zavisi od geometrije tijela i gustine fluida ρ koji struji oko tijela.

Često se sila otpora kod turbulentnog strujanja oko tijela piše u obliku: $F_w = c_w \frac{\rho}{2} A_s v^2$. Ovdje je A_s projekcija tijela na ravan koja je okomita na smjer strujanja, a c_w jeste bezdimenzionalna veličina strujanja, koja uključuje više značaja strujanja. Npr. kod modernih automobila c_w je manja od 0,3.

OPŠTI ZAKONI DINAMIKE MATERIJALNE TAČKE

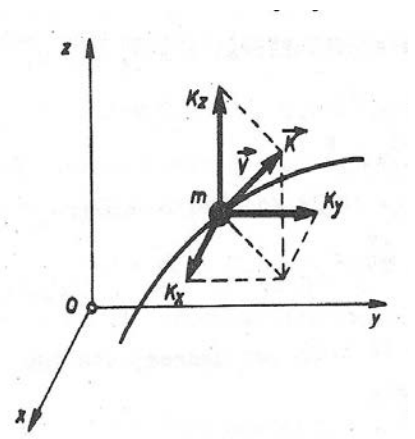
Da bi se izučavanje kretanja materijalne tačke pojednostavilo i da bi se u pojedinim tehničkim problemima odredile samo određene veličine, kao npr. brzina u određenom položaju ili brzina u određenom vremenskom intervalu, a da se pri tome problem kretanja ne proučava u cjelini, izvedeni su opšti zakoni dinamike tačke. Njihovom primjenom izbjegava se integraljenje diferencijalnih jednačina kretanja.

Opšti zakoni povezuju osnovne dinamičke veličine koje karakterišu kretanje (kinetičku energiju, količinu kretanja, moment količine kretanja) sa veličinama koje karakterišu djelovanje sila (rad sile, impuls sile, moment sile).

Opšti zakoni dinamike materijalne tačke su:

- zakon količine kretanja,
- zakon momenata količine kretanja,
- zakon kinetičke energije materijalne tačke.

KOLIČINA KRETANJA. ZAKON KOLIČINE KRETANJA (ZAKON IMPULSA)



Količina kretanja materijalne tačke $\vec{K}$ je vektorska veličina koja predstavlja proizvod mase tačke i vektora brzine tačke, $\vec{K} = m\vec{v}$.

Ovaj vektor je kolinearan sa vektorom brzine i ima isti smjer. Može se razložiti na komponente u pravcu koordinatnih osa referentnog koordinatnog sistema. Jedinica količine kretanja je [kgms^{-1}] ili [Ns].

Impuls sile. Najprije definišimo elementarni impuls sile za beskonačno mali interval vremena. To je vektorska veličina $d\vec{I} = \vec{F}dt$, gdje je dt elementarni vremenski interval. Ovaj vektor je kolinearan sa vektorom sile $\vec{F}$. Sad možemo definisati impuls sile za određeni vremenski interval, npr. $t_0 - t$:

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t} d\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt .$$

Pravac impulsa poklapa se sa pravcem i smjerom sile. Jedinica za impuls sile je [kgms^{-1}] ili [Ns]. Moguće je naći projekcije impulsa sile na ose referentnog koordinatnog sistema.

Impuls sile pokazuje efekat dejstva sile u nekom vremenskom intervalu. Da bismo mogli izračunati vrijednost impulsa sile, sila mora biti poznata funkcija vremena ili konstanta.

Impuls rezultante sistema sile koje dejstvuju na materijalnu tačku u datom vremenskom intervalu, jednak je vektorskom zbiru impulsa komponentnih sila u istom intervalu vremena:

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}_r dt = \int_{t_0}^{t} \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + .. + \vec{F}_n\right) dt = \int_{t_0}^{t} \vec{F}_1 dt + \int_{t_0}^{t} \vec{F}_2 dt + .. + \int_{t_0}^{t} \vec{F}_n dt = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + .. + \vec{I}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{I}_i .$$

Zakon o promjeni količine kretanja materijalne tačke

Ako pođemo od osnovne jednačine dinamike $m\vec{a}=\vec{F}$, gdje je $\vec{F}$ rezultanta svih sila koje dejstvuju na tačku, imamo:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F},$$

pri $m=const$ imamo: $\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)=\vec{F}$, odnosno $\frac{d\vec{K}}{dt}=\vec{F}$.

Ova jednačine iskazuje zakon o promjeni količine kretanja materijalne tačke u diferencijalnom obliku: Izvod vektora količine kretanja tačke po vremenu jednak je rezultujućoj sili koja dejstvuje na tačku.

Sad ćemo uspostaviti vezu između količine kretanja i impulsa sile. Ako pođemo od jednačine

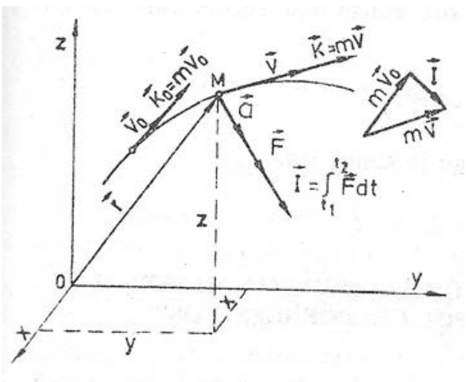
$$d\vec{K}=d\left(m\vec{v}\right)=\vec{F}dt$$

i integralimo je u intervalu vremena t_0-t, dobijamo:

$$\int_{v_0}^{v} d\left(m\vec{v}\right)=\int_{t_0}^{t}\vec{F}dt, \quad \text{odakle je} \quad m\vec{v}-m\vec{v}_0=\vec{I}, \text{ odnosno } \vec{K}-\vec{K}_0=\vec{I}=\sum_{i=1}^{n}\vec{I}_i .$$

Ova jednačina iskazuje zakon o promjeni količine kretanja materijalne tačke u konačnom ili tzv. integralnom obliku: Priraštaj vektora količine kretanja tačke za neki konačni vremenski interval jednak vektorskom zbiru impulsa svih sila koje dejstvuje na tačku u tom interval vremena .

Zakon o održanju količine kretanja materijalne tačke



Ako na materijalnu tačku ne dejstvuju sile ili ako dejstvuje takav sistem sila čiji je vektorski zbir jednak nuli $\vec{F}_r=\sum\vec{F}_i=0$, onda je

$$\frac{d\vec{K}}{dt}=0, \quad \text{odnosno} \quad \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)=0, \quad \text{odakle slijedi da je}$$

$$m\vec{v}=const,$$

odnosno $m\vec{v}-m\vec{v}_0=const$, odakle slijedi $\vec{v}=\vec{v}_0=const$.

Ako je u nekom vremenskom intervalu vektorski zbir impulsa svih sila koje djeluju na tačku jednak nuli, onda je količina kretanja materijalne tačke na kraju tog intervala jednaka količini kretanja na početku intervala, tj. tačka se kreće ravnomjerno pravolinijski , a takvo kretanje naziva se kretanje po inerciji.

MOMENT KOLIČINE KRETANJA. ZAKON MOMENTA KOLIČINE KRETANJA

Iz statike je poznato da je moment sile u odnosu na pol O definisan jednačinom:

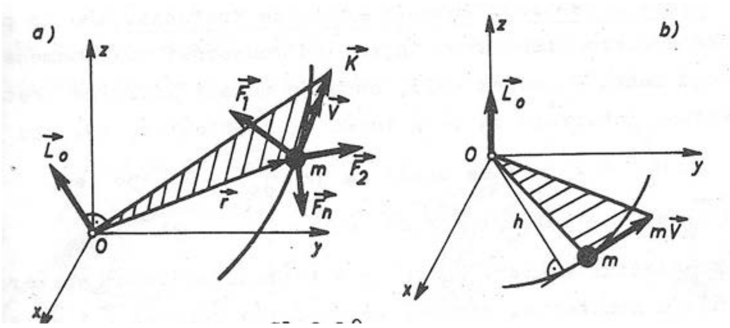
$$\vec{M}_0=\vec{r}\times\vec{F}.$$

Analogna veličina u dinamici je moment količine kretanja materijalne tačke (kinetički moment) i predstavlja moment vektora količine kretanja $\vec{K}$ u odnosu na pol (tačku) O:

$$\vec{L}_o=\vec{r}\times\vec{K}=\vec{r}\times\left(m\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z}\end{vmatrix}$$

gdje je $\vec{r}$ vektor položaja tačke. Očigledno je da se mogu odrediti projekcije vektora momenta količine kretanja u pravcu koordinatnih osa referentnog koordinatnog sistema, koje definišu moment količine kretanja tačke za osu:

$$L_{ox} = L_x = m\left(y\dot{z} - z\dot{y}\right),\, L_{oy} = L_y = m\left(z\dot{x} - x\dot{z}\right),\, L_{oz} = L_z = m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right).$$



Zakon o promjeni momenta količine kretanja materijalne tačke

Možemo uspostaviti zavisnost između momenta količine kretenja tačke i momenta sile.

Ako pođemo od II Njutnovog zakona $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_i$ i pomnožimo sa vektorom položaja tačke $\vec{r}$ dobijamo

$$\vec{r} \times \left(m\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \sum \vec{r} \times \vec{F}_i = \sum \vec{M}_O^{\vec{F}_i}.$$

Ukoliko deriviramo po vremenu vektor konetičkog momenta dobijemo

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt},$$

Pošto su vektori $\vec{v}$ i $m\vec{v}$ kolinearni njihov vektorski proizvod je jednak nuli, pa je

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{r} \times \vec{F}_i = \sum \vec{M}_O^{\vec{F}_i}.$$

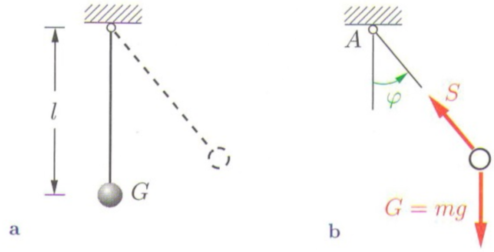
Jednačina izražava zakon o promjeni momenta količine kretanja materijalne tačke: <u>Izvod kinetičkog momenta u odnosu na nepokretni pol O po vremenu jednak je vektorskom zbiru momenata sila koje dejstvuju na pokretnu tačku, računatih za isti nepokretni pol.</u>

Vektorskoj jednačini odgovaraju tri skalarne jednačine:

$$\frac{dL_{Ox}}{dt} = \sum M_{Ox}^{\vec{F}_i},\quad \frac{dL_{Oy}}{dt} = \sum M_{Oy}^{\vec{F}_i},\quad \frac{dL_{Oz}}{dt} = \sum M_{Oz}^{\vec{F}_i}.$$

Primjer: Matematičko klatno

Matematičko klatno predstavlja materijalna tačka težine G obješena u nepokretnoj tački A o neistegljiv konopac dužine l koja izvodi kretanje u vertikalnoj ravni pod djelovanjem vlastite težine. Proizvoljan položaj tačke određen je uglom φ a nakon oslobađanja tačke od djelovanja veze, tačka je po dejstvom težine $\vec{G} = m\vec{g}$ i sile u konopcu $\vec{S}$ (reakcija veze).



Kinetički moment tačke u odnosu na tačku vješanja A i moment sila koje dejstvuju na tačku u odnosu na tačku A su:

$$L_A = lmv = lm(l\dot{\varphi}) = ml^2\dot{\varphi}, \qquad M_A = -mg\sin\varphi l$$

Zakon o promjeni kinetičkog momenta za osu koja prolazi kroz tačku A i koje je okomita na ravan kretanja je u ovom slučaju

$$\frac{dL_A}{dt} = M_A \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\varphi}\right) = -mgl\sin\varphi$$

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

Za male otklone klatna važi aproksimacija $\sin\varphi \approx \varphi$ pa je jednačina kretanja klatna

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 .$$

Ovo je linearna diferencijalna jednačina 2. reda, a kretanje klatna jesu harmonijske oscilacije.

Zakon o održanju momenta količine kretanja materijalne tačke

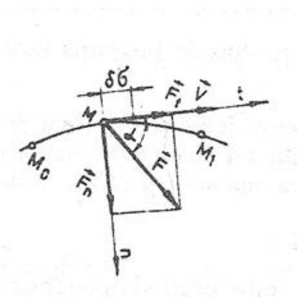
Ako na materijalnu tačku dejstvuje takav sistem sila da je vektorski zbir momenata tih sila u odnosu na nepokretni pol O jednak nuli, $\sum \vec{M}_O^{\vec{F}_i} = 0$, onda je

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0, \qquad \text{odakle je} \qquad \vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = const.$$

Ova jednačina iskazuje zakon o održanju momenta količine kretanja tačke u odnosu na nepokretni pol O. S obzirom da je vektorski proizvod vektora položaja i brzine tačke konstantan, to znači da ovi vektori leže u stalnoj ravni, tj. tačka se kreće u ravni.

ZAKON KINETIČKE ENERGIJE MATERIJALNE TAČKE. RAD SILE. ENERGIJA

Zakon o promjeni kinetičke energije materijalne tačke



Polazeći od Njutnove jednačine $m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$, njenim projektovanjem na pravac tangente dobijamo:

$$ma_t = m\frac{dv}{dt} = \sum F_i \cos\angle\left(\vec{F}_i, \vec{e}_t\right) = \sum F_{it} ,$$

$$m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \sum F_{it} \quad \Rightarrow \quad mv\frac{dv}{ds} = \sum F_{it} \quad \Rightarrow \quad mvdv = \sum F_{it}ds .$$

Pošto je $m = const$, lijeva strana jednačine se može napisati kao $d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$, što predstavlja **diferencijal kinetičke energije tačke**, tj. dE_k . Kinetička energije tačke jednaka je polovini proizvoda mase tačke i kvadrata njene brzine $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Desna strana predstavlja **zbir elementarnih radova sila** koje dejstvuju na tačku.

Posljednja jednačina sada se može napisati kao:

$$dE_k = \sum dA_i .$$

Ova jednačina izražava zakon o promjeni kinetičke energije materijalne tačke u diferencijalnom obliku: Priraštaj kinetičke energije na elementarnom pomjeranju materijalne tačke jednak je algebarskom zbiru radova svih sila koje dejstvuju na tačku na tom pomjeranju.

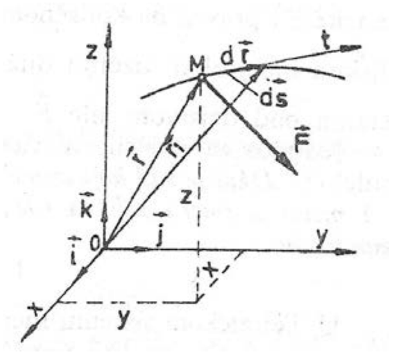
Integraljenjem jednačine između dva konačna različita položaja tačke M_0 i M_1

$$m\int_{v_0}^{v_1} v dv = \sum \int_{M_0}^{M_1} F_i ds \cos\angle\left(\vec{F}_i, \vec{e}_t\right) \qquad \text{dobija se}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_{i0,1} \qquad \text{odnosno} \qquad E_{k1} - E_{k0} = \sum A_{i0,1} \, .$$

Ova jednačina izražava zakon o promjeni kinetičke energije materijalne tačke u konačnom ili integralnom obliku: Promjena kinetičke energije materijalne tačke pri pomjeranju tačke između dva položaja, jednaka je zbiru radova svih sila koje dejstvuju na tačku pri tom pomjeranju.

Rad sile



Neka se materijalna tačka na koju dejstvuje sila pomjera duž putanje s. Ako u beskonačno malom intervalu vremena tačka izvrši elementarno pomjeranje $d\vec{r}$, onda je **elementarni rad** dA **sile** $\vec{F}$ **na elementarnom pomjeranju** $d\vec{r}$ **veličina određena skalarnim proizvodom**

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Ako vektor sile i vektor elementarnog pomjeranja tačke prikažemo preko njihovih komponenata u pravcu osa dekartovog koordinatnog sistema, onda dobijamo analitički izraz za elementarni rad sile:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left(X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}\right) \cdot \left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right) = Xdx + Ydy + Zdz \, .$$

Ako je materijalna tačka izvršila konačno pomjeranje po odsječku svoje putanje između tačaka M_1 i M_2, onda je odgovarajući rad sile na pređenom putu

$$A_{M_1,M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \left(Xdx + Ydy + Zdz\right).$$

Da bi se mogao izračunati ovaj integral neophodno je da sila i pomjeranje zavise od jedne iste promjenljive. Najjednostavnije je izračunati rad kada je sila konstantnog intenziteta u toku pomjeranja ili kada zavisi od položaja tačke. Ako sile zavise od vremena ili brzine tačke, onda je neophodno poznavati i zakon kretanja tačke.

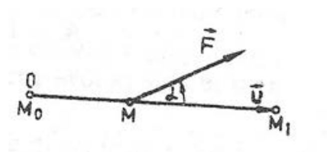
Ako vektor elementarnog pomjeranja iskažemo kao $d\vec{r} = ds\vec{e}_t$, gdje je $\vec{e}_t$ jedinični vektor tangente na putanju tačke u datom položaju, onda je elementarni rad sile

$$dA = \vec{F} \cdot ds\vec{e}_t = Fds\cos\angle\left(\vec{F}, \vec{e}_t\right) = F_t ds$$

gdje je F_t projekcija sile na pravac tangente na putanju u datom položaju. Odavde se vidi da rad na elementarnom pomjeranju *ds* vrši samo tangentna komponenta sile $\overline{F_t}$, dok je rad normalne komponente sile jednak nuli, jer je ona upravna na pravac vektora brzine tačke, tj. na vektoru pomjeranja tačke $d\vec{r} = ds\vec{e}_t$. Očigledno je da rad zavisi od sile i pomjeranja, kao i ugla između njih, tako da može biti pozitivan, negativan i jednak nuli. Rad sile na konačnom pomjeranju je

$$A_{M_1,M_2} = \int_{M_1}^{M_2} Fds\cos\angle\left(\vec{F}, \vec{e}_t\right).$$

Jedinica za rad sile je džul [J]. Džul je rad koji izvrši sila od 1 N kada se njena napadna tačka pomjeri za 1 m u smjeru dejstva sile, tj. džul je jednak njutnmetru [Nm],odnosno vatsekundi [Ws]. Jedinica za kinetičku energiju je ista kao za rad sile, tj. džul [J].



Pri pravolinijskom pomjeranju tačke M rad sile $\vec{F}$ konstantnog intenziteta i pravca određen je skalarnim proizvodom vektora sile i vektora pomjeranja napadne tačke te sile:

$$A=\vec{F}\cdot\vec{u}=Fu\cos\left(\vec{F},\vec{u}\right)$$

Ako je ugao α oštar, rad sile je pozitivan, a ako je ugao α tup rad sile je negativan. Kada je $\alpha=90^0$ rad sile je jednak nuli.

Ako na tačku dejstvuje sistem sila konstantnog intenziteta i pravca, onda je rad tih sila na pravolinijskom pomjeranju $\vec{u}$:

$$A=\vec{F}_r\cdot\vec{u}=\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2+..+\vec{F}_n\right)\cdot\vec{u}=\vec{F}_1\cdot\vec{u}+\vec{F}_2\cdot\vec{u}+..+\vec{F}_n\cdot\vec{u}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\vec{u}$$

$$A=A_1+A_2+...+A_n=\sum_{i=1}^{n}A_i$$

Rad rezultanete sile na konačnom pomjeranju $\vec{u}$ jednak je algebarskom zbiru radova komponentnih sila na tom istom pomjeranju.

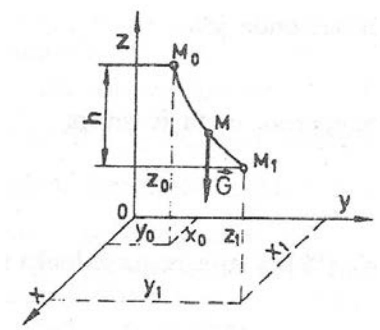
Efekat rada-snaga: pod snagom se podrazumijeva veličina koja karakteriše rad sile u jedinici vremena. Snaga P sile koja dejstvuje u beskonačno malom intervalu vremena *dt* je

$$P=\frac{dA}{dt}=\frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}=X\dot{x}+Y\dot{y}+Z\dot{z}$$

Ako se rad tokom vremena t vrši ravnomjerno, onda je snaga $P=\dfrac{A}{t}$. Jedinica za snagu je vat [W].

Rad sile teže, sile elastičnosti i sile trenja

Rad sile teže



Neka se tačka M pod dejstvom sile teže $\vec{G}$ pomjeri po nekoj krivoj iz položaja $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ u položaj $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$. S obzirom da sila $\vec{G}$ ima projekciju samo u pravcu z-ose, rad sile teže pri tom pomjeranju je

$$A_{M_0,M_1}=\int_{M_0}^{M_1}\left(Xdx+Ydy+Zdz\right)=-\int_{z_0}^{z_1}Gdz=-G\left(z_1-z_0\right)=G\left(z_0-z_1\right)$$

Rad sile teže jednak je proizvodu iz intenziteta sile i odgovarajućeg vertikalnog pomjeranja h njene napadne tačke. Rad je pozitivan ako početni položaj M_0 iznad konačnog položaja M_1 napadne tačke sile, a negativan ako je položaj M_0 ispod konačnog položaja M_1 tačke.

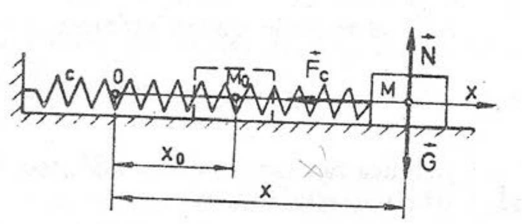
$$A=\pm Gh$$

Rad sile teže ne zavisi od dužine puta niti od oblika trajektorije napadne tačke sile već zavisi samo od normalnog rastojanja između horizontalnih ravni koje prolaze kroz početni i krajnji položaj tačke.

Sile koje imaju osobinu da im rad ne zavisi od dužine puta i oblika trajektorije nazivaju se konzervativne sile.

Rad sile elastičnosti (sile u opruzi):

Neka je tačka M vezana oprugom krutosti *c* koja je drugim krajem vezana za nepokretnu ravan. Ako tačku M izvedemo iz ravnotežnog položaja, ona će pod dejstvom sile uspostavljanja $\vec{F}_c$ vršiti pravolinijsko kretanje. Ako je x veličina deformacije opruge, onda je projekcija sile u opruzi na Ox - osu $F_{cx} = -cx$, a rad sile na konačnom pomjeranju M_0M je određen izrazom:



$$A_{0,1} = \int_{M_0}^{M} F_{cx}dx = -c\int_{x_0}^{x} xdx = -c\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_0}^{x} = \frac{c}{2}\left(x_0^2 - x^2\right)$$

U ovom izrazu x_0 je početna deformacija opruge (deformacija opruge u početnom položaju tačke), a x je krajnja deformacija opruge (deformacija opruge u krajnjem položaju tačke).

Ako nema početne deformacije, $x_0 = 0$, onda je rad sile u opruzi na nekom konačnom pomjeranju x:

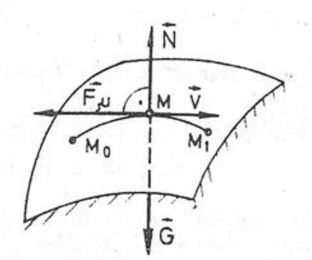
$$A_{0,1} = -\frac{1}{2}cx^2 .$$

Analogno, kod torzione opruge sa konstantom torzione krutosti c_T, rad sile pri deformaciji za ugao φ je:

$$A_{0,1} = -\frac{1}{2}c_T\varphi^2 .$$

Rad sile uspostavljanja $\vec{F}_c$ ne zavisi od oblika trajektorije već samo od početnog i krajnjeg položaja tačke, tako da je sila elastičnosti opruge takođe konzervativna sila.

Rad sile trenja klizanja



Ako se tačka M kreće po hrapavoj površini, onda na nju dejstvuje sila trenja klizanja. Pošto sila trenja klizanja uvijek ima smjer suprotan od smjera pomjeranja tačke M, rad sile trenja je:

$$A_{0,1} = \int_{M_0}^{M} F_{\mu}ds = -\mu\int_{M_0}^{M} Nds$$

Sila trenja klizanja nije konzervativna sila, već disipativna, budući da troši energiju, tj. usljed djelovanja sile trenja energija se pretvara u toplotu.

KONZERVATIVNE (POTENCIJALNE) SILE

Sila $\vec{F}$, odnosno njene projekcije, može da zavisi od pomjeranja njene napadne tačke, tj. da zavisi od položaja tačke. Poseban slučaj ove zavisnosti je kada postoji takva funkcija $U(x, y, z)$ koordinata napadne tačke sile, da se sila $\vec{F}$ može izraziti u obliku gradijenta ove funkcije:

$$\vec{F} = grad\ U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

gdje su projekcije sile na ose jednake parcijalnim izvodima funkcije U,

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Skalarna funkcija $U(x, y, z)$ naziva se funkcija sile, a sila $\vec{F}$ je u tom slučaju konzervativna sila.

Ako je sila konzervativna, onda mora biti zadovoljeno

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

Ove jednačine se mogu kraće zapisati preko rotora sile

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0.$$

Znači, sila $\vec{F}$ će biti konzervativna ako zavisi od položaja i ako je $rot\,\vec{F} = 0$.

Elementarni rad konzervativne sile $\vec{F}$ na pomjeranju $d\vec{r}$ jednak je totalnom diferencijalu funkcije sile:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \right)\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \right) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU.$$

Rad konzervativne sile $\vec{F}$ na konačnom pomjeranju tačke iz položaja $M_0(x_0,y_0,z_0)$ u položaj $M_1(x_1,y_1,z_1)$ je

$$A_{M_0 M} = \int_{M_0}^{M_1} dU = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_0, y_0, z_0) = U_1 - U_0,$$

Rad konzervativne sile zavisi samo od vrijednosti funkcije sile (odnosno potencijalne energije) u krajnjem i početnom položaju, a ne zavisi od oblika putanje kojom se napadna tačka sile kretala.

Često se u mehanici umjesto funkcije sile *U* koristi potencijalna energija $E_p(x,y,z)$, koja je jednaka funkciji sile sa negativnim predznakom, tj. $E_p = -U$.

U tom smislu se rad konzervativne sile može iskazati i preko potencijalne energije

$$A_{M_0 M_1} = \int_{M_0}^{M_1} dU = \int_{M_0}^{M_1} -dE_p = E_{p0} - E_{p1}$$

tj. rad sila konzervativnog polja pri nekom pomjeranju materijalne tačke jednak je razlici vrijednosti potencijalne energije tačke u njenom početnom i krajnjem položaju.

ZAKON ODRŽANJA MEHANIČKE ENERGIJE

Zakon o promjeni kinetičke energije može se napisati kao:

$$E_{k1} - E_{k0} = \sum A_{i0,1} = E_{p0} - E_{p1} \quad \Rightarrow \quad E_{k0} + E_{p0} = E_{k1} + E_{p1} = const,$$

tj. ako sile koje dejstvuju na tačku imaju potencijal onda je zbir kinetičke i potencijalne energije konstantan.

Ovim je iskazan zakon održanja mehaničke energije.

Potencijalna energija materijalne tačke u bilo kojem njenom položaju jednaka je radu koji izvrše sile konzervativnog polja, koje dejstvuju na tačku, pri pomjeranju tačke iz datog u nulti položaj. Potencijalna energije tačke u nultom položaju je jednaka nuli, tj. $E_{p0}=0$.

S obzirom da smo prethodno definisali rad nekih konzervativnih sila, sada te sile možemo iskazati i preko potencijala:

a) potencijal težine $\vec{G}$ na udaljenosti z od površine zemlje naziva se gravitacioni potencijal, $E_p = Gz$

b) potencijal sile u opruzi, ako je opruga rastegnuta za iznos x (odnosno φ kod torzione opruge) je $E_p = \frac{1}{2}cx^2$ (odnosno za torzionu oprugu $E_p = \frac{1}{2}c_T\varphi^2$).

Suprotno od težine i sile u opruzi, sila trenja nema potencijal, tj. sila trenja nije konzervativna. To znači da njen rad zavisi od puta, a usljed sile trenja mehanička energija se pretvara u toplotu. Takve sile nazivamo disipativne sile (sile koje troše energiju).

U sistemima u kojima se pojavljuju takve sile ne vrijedi zakon održanja mehaničke energije, već se mora primijeniti zakon o promjeni kinetičke energije i pri izračunavanju rada sila potrebno je izračunati rad disipativne sile.

DINAMIKA MATERIJALNOG SISTEMA

MATERIJALNI SISTEM. PODJELA SILA KOJE DEJSTVUJU NA MATERIJALNI SISTEM

Pod pojmom materijalni sistem (sistem materijalnih tačaka) podrazumijeva se konačan broj materijalnih tačaka koje su na određeni način povezane. Analiza sistema materijalnih tačaka je veoma važna jer u prirodi i tehnici postoje kretanja u kojim učestvuje više tijela, a ta tijela možemo idealizovati materijalnim tačkama koje obrazuju materijalni sistem.

Diskretan materijalni sistem obrazuju materijalne tačke koje se nalaze na međusobno konačnim rastojanjima.

Ako su mase neprekidno raspoređene u nekom dijelu prostora, tada tačaka ima beskonačno mnogo i sistem obrazuje neprekidnu sredinu.

Oblast prostora ispunjena neprekidno raspoređenom masom predstavlja materijalno tijelo.

Materijalni sistem može biti obrazovan ne samo od skupa materijalnih tačaka, već i od skupa materijalnih tijela.

Sve sile koje dejstvuju na tačke sistema mogu se podijeliti na spoljašnje i unutrašnje sile.

Spoljašnje sile su sile kojima materijalne tačke ili tijela koja ne ulaze u sastav sistema dejstvuju na materijalne tačke ili tijela posmatranog materijalnog sistema, $\vec{F}^{s}$.

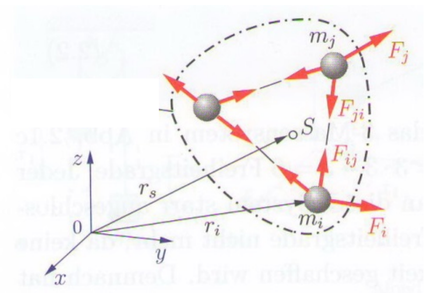
Unutrašnje sile su sile kojima dejstvuju jedna na drugu materijalne tačke (tijela) posmatranog sistema, $\vec{F}^{u}$.

Neke osobine unutrašnjih sila koje dejstvuju na sistem:

1) Vektorski zbir (glavni vektor) svih unutrašnjih sila materijalnog sistema jednak je nuli

$$\vec{F}_R^{u} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{u} = 0$$

Ovo slijedi iz trećeg Njutnovog zakona (akcija=reakcija), tj. između bilo koje dvije tačke materijalnog sistema dejstvuju sile istog intenziteta i pravca a suprotnog smjera, $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ (indeks „$_{ij}$" označava silu kojom j-ta masa sistema dejstvuje na i-tu masu, i obrnuto indeks „$_{ji}$" označava silu kojom i-ta masa sistema dejstvuje na j-tu masu.



2) Vektorski zbir momenata (glavni moment) svih unutrašnjih sila materijalnog sistema u odnosu na proizvoljno izabrani pol o jednak je nuli

$$\vec{M}_O^{\vec{F}_R^{u}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{\vec{F}_i^{u}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{u} = 0 .$$

GEOMETRIJA MASA. MASA MATERIJALNOG SISTEMA. SREDIŠTE (CENTAR) MASA

Kretanje materijalnog sistema osim sila koje dejstvuju na njega zavisi i od ukupne mase sistema i od rasporeda mase u tom sistemu.
Masa materijalnog sistema jednaka je algebarskom zbiru masa svih tačaka ili tijela, koje obrazuju sistem

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Raspored masa materijalnog sistema prevashodno je okarakterisan položajem tačke koja se naziva središte masa ili centar inercije materijalnog sistema. Središte masa ili centar inercije materijalnog sistema sačinjenog od *n* materijalnih tačaka jeste geometrijska tačka C čiji je položaj u odnosu na izabrani sistem referencije Oxyz određen vektorom

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m}.$$

Veličina $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$ naziva se statički moment masa tačaka sistema. Položaj središta C masa moguće je odrediti pomoću Dekartovih koordinata te tačke, tj. projektovanjem vektorske jednačine na ose Dekartovog koordinatnog sistema Oxyz

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m}$$

Očigledno je da položaj središta masa C sistema zavisi samo od rasporeda masa tačaka sistema, a ne zavisi od toga da li na razmatrani sistem dejstvuju ili ne dejstvuju sile, niti zavisi od izbora sistema referencije.
Ako sistem obrazuju kruta tijela, onda se na ovaj način može odrediti i položaj težišta sistema krutih tijela. Težište krutog tijela, odnosno neizmjenljivog materijalnog sistema, poklapa se sa središtem masa sistema. Središte masa je opštiji pojam od težišta, jer težište je definisano samo za kruto tijelo, dok središte masa kako karakteristika rasporeda masa se odnosi na bilo koji materijalni sistem, izmjenljiv ili neizmjenljiv.

MOMENTI INERCIJE MATERIJALNOG SISTEMA (POLARNI, AKSIJALNI, PLANARNI)

Pri translatornom kretanju materijalnog sistema ili krutog tijela, mjera inercije jeste masa sistema (tijela), a karakteristika rasporeda masa u tom slučaju jeste središte C masa ili centar inercije materijalnog sistema. Međutim, pri obrtnom kretanju materijalnog sistema, odnosno krutog tijela mjera inercije jeste moment inercije, koji takođe predstavlja karakteristiku rasporeda masa.
Moment inercije materijalnog sistema odnosno krutog tijela u odnosu na dati pol *O (polarni moment inercije)*, osu *z (aksijalni moment inercije)* ili ravan Π *(planarni moment inercije)* naziva se skalarna veličina koja je jednaka zbiru proizvoda masa svih tačaka sistema i kvadrata rastojanja tačaka od datog pola *O*, ose *z* ili ravni Π:

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \quad \textit{polarni moment inercije}$$

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{iz}^2 \quad \textit{aksijalni moment inercije}$$

$$I_\Pi = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{i\Pi}^2 \quad \textit{planarni moment inercije}$$

U SI sistemu mjera jedinica mjere za moment inercije je kilogram metar na kvadrat $[I] = kgm^2$.

Ako materijalni sistem predstavlja homogeno kruto tijelo, onda je potrebno tijelo (u mislima) rastaviti na konačan broj elementarnih dijelova i odrediti približni moment inercije po datim formulama, a zatim izračunati graničnu vrijednost približnog momenta inercije, pretpostavljajući da broj dijelova *n* na koje smo tijelo rastavili teži beskonačnosti. Moment inercije homogenog tijela u odnosu na proizvoljnu osu je

$$I_z = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} m_i r_{iz}^2 = \int_V r_z^2 dm$$

gdje se integral odnosi na cijelu zapreminu V tijela.

Ako posmatramo materijalni sistem, onda je aksijalni moment inercije tog sistema u odnosu na osu Ox određen sa

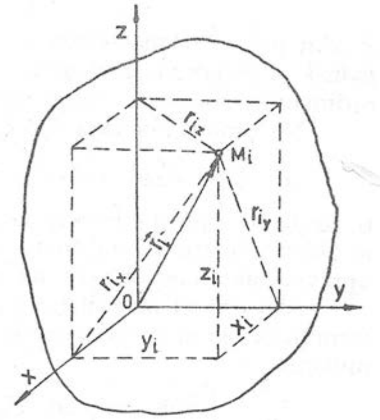
$$I_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{ix}^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(y_i^2 + z_i^2 \right), \text{ jer je } r_{ix}^2 = \left(y_i^2 + z_i^2 \right).$$

Analogno je

$$I_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{iy}^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + z_i^2 \right), I_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{iz}^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right).$$

Polarni moment inercije je

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \right).$$



Sabiranjem aksijalnih momenta inercije za ose Ox, Oy i Oz dobije se

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left(y_i^2 + z_i^2 \right) + \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + z_i^2 \right) + \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right) = 2\sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \right)$$

$$I_{Ox} + I_{Oy} + I_{Oz} = 2I_O$$

tj. zbir aksijalnih momenata inercije materijalnog sistema za tri koordinatne ose Dekartovog pravouglog sistema referencije jednak je dvostrukom polarnom momentu inercije tog sistema za pol O koji se nalazi u koordinatnom početku datog referentnog sistema.

Za homogeno kruto tijelo momenti inercije definisani su sa

$$I_{Ox} = \int_V \left(y^2 + z^2 \right) dm, \; I_{Oy} = \int_V \left(x^2 + z^2 \right) dm, \; I_{Oz} = \int_V \left(x^2 + y^2 \right) dm$$

$$I_O = \int_V \left(x^2 + y^2 + z^2 \right) dm$$

Određivanje momenta inercije nehomogenih tijela ne vrši se korišćenjem ovih formula, već eksperimentalnim metodama.

Moment inercije sistema u odnosu na proizvoljnu osu *z* moguće je izraziti u obliku proizvoda mase sistema i kvadrata linearnog rastojanja od te ose, tj. <u>poluprečnika inercije</u> u odnosu na tu osu

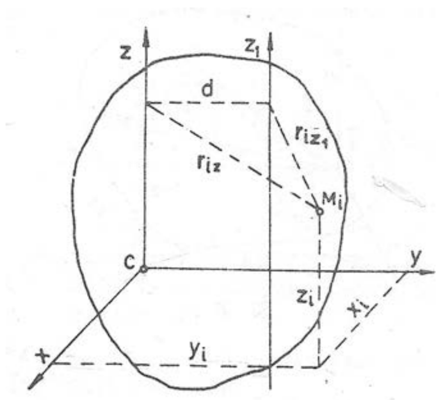
$$I_z = m\rho_z^2$$

Ukoliko je poznat moment inercije sistema za osu, onda se poluprečnik inercije tog sistema za osu određuje formulom

$$\rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}}\,.$$

<u>Poluprečnik inercije sistema je geometrijski jednak rastojanju od ose one tačke u koju treba koncentrisati cjelokupnu masu sistema, da bi moment inercije te tačke bio jednak momentu inercije datog sistema u odnosu na tu osu</u>.

ZAVISNOST IZMEĐU MOMENATA INERCIJE SISTEMA U ODNOSU NA DVIJE PARALELNE OSE (HAJGENS-ŠTAJNEROVA TEOREMA)



Da bi odredili moment inercije sistema u odnosu na osu z_1 koja je paralelna osi Cz koja prolazi kroz središte masa C sistema, postavimo sistem referencije Cxyz sa početkom u tački C (središte masa sistema). Aksijalni momenti inercije u odnosu na ose z i z_1 su

$$I_{Cz} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{iz}^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right),$$

$$I_{z_1} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{iz_1}^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + \left(y_i - d\right)^2\right)$$

odnosno

$$I_{z_1} = I_{Cz} + d^2 \sum_{i=1}^{n} m_i - 2d \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \ .$$

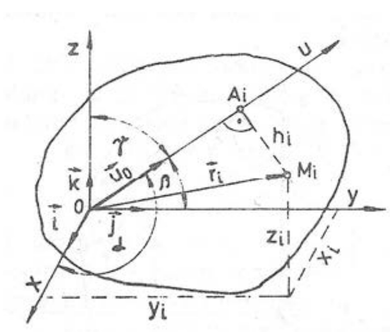
Na osnovu poznate koordinate y_C središta masa C sistema $my_C = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$, a kako je tačka C usvojena za početak sistema referencije Cxyz, to je $y_C = 0$, može se napisati

$$I_{z_1} = I_{Cz} + md^2$$

Ova formula izražava Hajgens - Štajnerovu teoremu: <u>Moment inercije materijalnog sistema (tijela) za neku osu jednak je zbiru iz momenta inercije tog sistema (tijela) u odnosu na paralelnu osu koja prolazi kroz središte masa sistema (težište krutog tijela) i proizvoda mase sistema i kvadrata rastojanja između tih osa (zbir iz sopstvenog momenta inercije i položajnog momenta inercije).</u>

Iz ove formule slijedi da je $I_{z_1} > I_{Cz}$, tj. najmanji je moment inercije za osu koja prolazi kroz središte masa sistema . Moment inercije za osu koja prolazi kroz središte masa sistema naziva se sopstveni moment inercije.

MOMENT INERCIJE ZA OSU PROIZVOLJNOG PRAVCA KROZ DATU TAČKU



Izvedimo moment inercije za osu u koja prolazi kroz tačku O (koordinatni početak) i koja sa osama x,y,z zaklapa uglove α, β, γ. Jedinični vektor $\vec{u}_o$ ose u ima projekcije cosα, cosβ i cosγ.

Ako je *h* rastojanje elementarne mase *dm* od ose u , onda je elementarni moment inercije za osu u

$$dI_u = h^2 dm \,,$$

a moment inercije tijela za osu u je

$$I_u = \int_V h^2 dm .$$

Rastojanje *h* se iskaže kao intenzitet vektorskog proizvoda vektora položaja $\vec{r}$ i jediničnog vektora $\vec{u}_o$:

$$\left|\vec{r} \times \vec{u}_o\right| = r u_o \sin\theta = r \sin\theta = h$$

ili se kvadrat rastojanja h^2 iskaže analitički

$$h^2 = \left(\vec{r} \times \vec{u}_o\right)^2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \left(y\cos\gamma - z\cos\beta\right)^2 + \left(z\cos\alpha - x\cos\gamma\right)^2 + \left(x\cos\beta - y\cos\alpha\right)^2 =$$
$$= \left(y^2 + z^2\right)\cos^2\alpha + \left(x^2 + z^2\right)\cos^2\beta + \left(x^2 + y^2\right)\cos^2\gamma -$$
$$-2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2xz\cos\alpha\cos\gamma$$

Ako sada h^2 zamijenimo u integralu kojim definišemo moment inercije tijela i izdvojimo konstante ispred integrala, dobijemo

$$I_u = \cos^2\alpha \int_V \left(y^2 + z^2\right) dm + \cos^2\beta \int_V \left(x^2 + z^2\right) dm + \cos^2\gamma \int_V \left(x^2 + y^2\right) d -$$

$$-2\cos\alpha\cos\beta \int_V xydm - 2\cos\beta\cos\gamma \int_V yzdm - 2\cos\alpha\cos\gamma \int_V xzdm =$$

$$= I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma$$

Veličine I_{xy}, I_{yz}, I_{xz} nazivaju se centrifugalni momenti inercije (mogu biti veći ili manji od nule ili jednaki nuli):

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_V xydm, \quad I_{yz} = I_{zy} = \int_V yzdm, \quad I_{xz} = I_{zx} = \int_V xzdm$$, centrifugalni momenti inercije.

Negativne vrijednosti centrifugalnih momenata inercije nazivaju se proizvodi inercije:

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int_V xydm, \quad I_{yz} = I_{zy} = -\int_V yzdm, \quad I_{xz} = I_{zx} = -\int_V xzdm$$, proizvodi inercije.

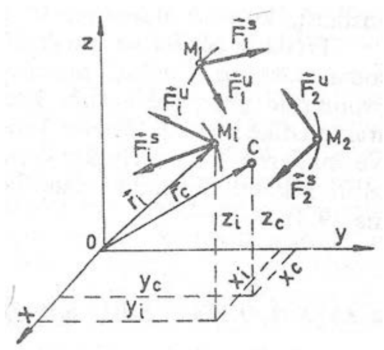
Devet veličina: $I_x, I_y, I_z, I_{xy} = I_{yx}, I_{yz} = I_{zy}, I_{xz} = I_{zx}$ (od kojih je nezavisnih šest) karakterišu inercijska svojstva tijela pri rotaciji (invarijantnu osobinu tijela pri njegovoj rotaciji) i nazivaju se tenzor inercije tijela (matrica inercije):

$$I = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix} .$$

OPŠTI ZAKONI DINAMIKE METERIJALNOG SISTEMA

ZAKON O KRETANJU SREDIŠTA MASA MATERIJALNOG SISTEMA

Posmatramo kretanje materijalnog sistema sačinjenog od n tačaka na koje dejstvuju spoljašnje i unutrašnje sile. Za svaku tačku sistema, ako ih posmatramo kao slobodne, mogu se napisati diferencijalne jednačine kretanja saglasno II Njutnovom zakonu



$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1^s + \vec{F}_1^u$$
$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2^s + \vec{F}_2^u$$
....
$$m_n\vec{a}_n = \vec{F}_n^s + \vec{F}_n^u$$

Sabiranjem jednačina za sve tačke sistema dobije se

$$\sum_{i=1}^{n} m_1\vec{a}_1 = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_1^s + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_1^u$$

Kako je osobina unutrašnjih sila da je $\vec{F}_R^u = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}\,{}_i^u = 0$, a iz vektora položaja središta masa C $m\vec{r}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i$ se diferenciranjem po vremenu dobije $m\ddot{\vec{r}}_C = m\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i$, može se napisati

$$m\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^s = \vec{F}_R^s$$

Ova jednačina izražava zakon o kretanju središta masa materijalnog sistema: <u>Središte masa C (centar inercije) materijalnog sistema kreće se kao materijalna tačka sa masom jednakom zbiru masa svih tačaka sistema na koju dejstvuje glavni vektor svih spoljašnjih sila sistema</u>.

Zakon o održanju kretanja središta masa materijalnog sistema:

Ako na razmatrani materijalni sistem dejstvuje takav sistem sila da je za sve vrijeme kretanja vektorski zbir spoljašnjih sila jednak nuli, $\vec{F}_R^s = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}\,{}_i^s = 0$, onda je

$$m\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^s = \vec{F}_R^s = 0, \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_C = const$$

<u>Ako je glavni vektor spoljašnjih sila koje dejstvuju na metrijalni sistem jednak nuli za sve vrijeme kretanja, onda se središte masa sistema kreće ravnomjerno pravolinijski.</u>

ZAKON KOLIČINE KRETANJA MATERIJALNOG SISTEMA

Količina kretanja materijalnog sistem jednaka je vektorskom zbiru količina kretanja svih tačaka razmatranog sistema $\vec{K} = \sum_{i=1}^{n} \vec{K}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i$, a kako je brzina i-te tačke sistema $\vec{v}_i = \dfrac{d\vec{r}_i}{dt}$, može se napisati

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i = \frac{d}{dt}\left(m\vec{r}_C\right) = m\frac{d\vec{r}_C}{dt} = m\vec{v}_C$$

Vektor količine kretanja materijalnog sistema jednak je proizvodu iz mase sistema i vektora brzine središta masa materijalnog sistema i ima pravac i smjer vektora brzine središta masa sistema.

Količina kretanja karakteriše samo translatorno kretanje materijalnog sistema, odnosno krutog tijela.

Diferenciranjem vektora količine kretanja materijalnog sistema dobije se

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_C\right) = m\frac{d\vec{v}_C}{dt} = m\vec{a}_C = \vec{F}_R^s, \qquad \text{odnosno}$$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}_R^s = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^s$$

Ova jednačina izražava zakon o promjeni količine kretanja materijalnog sistema u diferencijalnom obliku: Izvod po vremenu vektora količine kretanja materijalnog sistema jednak je glavnom vektoru spoljašnjih sila koje dejstvuju na sistem.

Promjenu količine kretanja materijalnog sistema, prema tome, izazivaju samo spoljašnje sile koje dejstvuju na sistem.

Iz $d\vec{K} = \vec{F}_R^s dt$, integraljenjem za neki vremenski interval u granicama od t_0 do t, dobijemo

$$\int_{t_0}^{t} d\vec{K} = \int_{t_0}^{t}\vec{F}_R^s \quad \Rightarrow \quad \vec{K}(t) - \vec{K}(t_0) = \int_{t_0}^{t}\vec{F}_R^s dt = \sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\vec{F}_i^s dt, \qquad \text{odnosno}$$

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \vec{I}^s = \sum_{i=1}^{n}\vec{I}_i^s$$

Jednačina izražava zakon o promjeni (priraštaju) količine kretanja materijalnog sistema u konačnom (integralnom) obliku: Priraštaj količine kretanja materijalnog sistema u konačnom intervalu vremena jednak je vektorskom zbiru impulsa svih spoljašnjih sila koje dejstvuju na sistem u tom intervalu vremena.

Zakon o održanju količine kretanja materijalnog sistema:

Ako na razmatrani materijalni sistem dejstvuje takav sistem sila da je za sve vrijeme kretanja vektorski zbir spoljašnjih sila jednak nuli, $\vec{F}_R^s = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^s = 0$, onda je

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}_R^s = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{K} = m\vec{v}_C = const \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_C = const,$$

tj. brzina središta masa je konstantna ili jednaka nuli ako je u početnom trenutku $\left(\vec{v}_C\right)_0 = 0$.

ZAKON KINETIČKOG MOMENTA (MOMENTA KOLIČINE KRETANJA) MATERIJALNOG SISTEMA

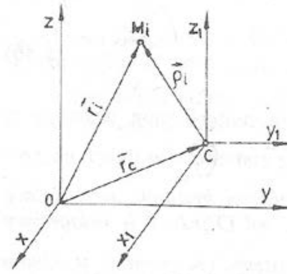
Kinetički moment materijalnog sistema:

Kinetički moment materijalnog sistema u odnosu na nepokretni pol jednak je vektorskom zbiru kinetičkih momenata svih tačaka materijalnog sistema u odnosu na isti pol, tj.

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n}\vec{L}_{iO} = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i\ .$$

Veza između kinetičkog momenta materijalnog sistema u odnosu na nepokretni pol i kinetičkog momenta materijalnog sistema u odnosu na središte masa sistema:

Ako sistem vrši složeno kretanje onda se to kretanje može razložiti na prenosno translatorno kretanje koje se vrši zajedno sa pokretnim sistemom referencije $Cx_1y_1z_1$ sa središtem C kao koordinatnim početkom i relativno kretanje sistema u odnosu na pokretni sistem referencije $Cx_1y_1z_1$.



Položaj proizvoljne tačke M_i sistema u odnosu na nepokretni sistem referencije Oxyz određen je vektorom položaja $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$.

Apsolutna brzina tačke M_i određena je prvim izvodom po vremenu vektora položaja

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_C + \vec{\rho}_i\right) = \vec{v}_C + \vec{v}_{ir},$$

pa se kinetički moment materijalnog sistema u odnosu na nepokretni pol može napisati kao

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_C + \vec{\rho}_i\right) \times \left(m_i\vec{v}_C + m_i\vec{v}_{ir}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_C \times m_i\vec{v}_C + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_C \times m_i\vec{v}_{ir} + \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_C + \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_{ir} =$$

$$= \vec{r}_C \times \vec{v}_C \sum_{i=1}^{n} m_i + \vec{r}_C \times \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{ir} + \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\rho}_i \times \vec{v}_C + \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_{ir} =$$

$$= \vec{r}_C \times m\vec{v}_C + \vec{r}_C \times \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\rho}_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\rho}_i\right) \times \vec{v}_C + \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_{ir}$$

Pošto je položaj središta materijalnog sistema u odnosu na pokretni sistem referencije $Cx_1y_1z_1$ određen sa $m\vec{\rho}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\rho}_i$, a kako je početak pokretnog koordinatnog sistema upravo središte C, onda je $\vec{\rho}_C = 0$, pa je kinetički moment sistema

$$\vec{L}_O = \vec{r}_C \times m\vec{v}_C + \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_{ir} = \vec{r}_C \times \vec{K} + \vec{L}_{Cr}$$

gdje su: $\vec{K} = m\vec{v}_C$-vektor količine kretanja materijalnog sistema, $\vec{L}_{Cr} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_{ir}$- kinetički moment materijalnog sistema u odnosu na središte masa C sistema.

Prema tome: Pri proizvoljnom kretanju materijalnog sistema kinetički moment materijalnog sistema u odnosu na nepokretni pol O jednak je vektorskom zbiru momenta vektora količine kretanja središta masa sistema ($\vec{K} = m\vec{v}_C$) u odnosu na nepokretni pol O i kinetičkog moment materijalnog sistema u odnosu na središte masa sistema pri relativnom kretanju sistema u odnosu na središte masa C.

Zakon o promjeni kinetičkog momenta materijalnog sistema u odnosu na nepokretni pol

Za i-tu tačku sistema, zakon o promjeni kinetičkog momenta u odnosu na nepokretni pol O je

$$\frac{d\vec{L}_{iO}}{dt} = \vec{M}_O^{\vec{F}_i^s} + \vec{M}_O^{\vec{F}_i^u}$$

Ovakva jednačina može se napisati za svaku tačku sistema i kada izvršimo vektorsko sabiranje svih tih jednačina dobije se

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_{iO}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{\vec{F}_i^s} + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{\vec{F}_i^u}, \quad \text{odnosno} \quad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{iO} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{\vec{F}_i^s} + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{\vec{F}_i^u},$$

a kako je vektorski zbir momenata unutrašnjih sila u odnosu na pol O jednak nuli, dobije se

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{\vec{F}_i^s}.$$

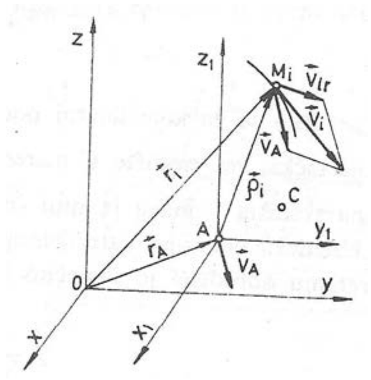
Ova jednačina izražava zakon o promjeni kinetičkog momenta materijalnog sistema u odnosu na nepokretni pol: Izvod po vremenu vektora kinetičkog momenta materijalnog sistema u odnosu na nepokretni pol jednak je vektorskom zbiru momenata (glavnom momentu) svih spoljašnjih sila koje dejstvuju na sistem u odnosu na isti nepokretni pol O.

ZAKON KINETIČKE ENERGIJE MATERIJALNOG SISTEMA (KRUTOG TIJELA). KENIGOVA TEOREMA

Kinetička energija materijalnog sistema. Kenigova teorema

Kinetička energija materijalnog sistema jednaka je zbiru kinetičkih energija E_{ki} svih materijalnih tačaka tog sistema:

$$E_k = \sum_{i-1}^{n} E_{ki} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2$$



gdje je v_i apsolutna brzina materijalne tačke.

Proizvoljno apsolutno kretanje materijalnog sistema u odnosu na nepokretni sistem referencije Oxyz može se posmatrati kao zbir iz translatornog kretanja sistema zajedno sa pokretnim sistemom referencije $Ax_1\ y_1\ z_1$ i relativnog kretanja materijalnog sistema u odnosu na pokretni sistem referencije $Ax_1\ y_1\ z_1$.

Položaj proizvoljne tačke M_i u odnosu na nepokretni sistem referencije Oxyz određen je sa $\vec{r}_i = \vec{r}_A + \vec{\rho}_i$, a apsolutna brzina tačke M_i je vektorski zbir brzine pola A i relativne brzine tačke M_i u odnosu na pol A

$$\vec{v}_i = \vec{v}_A + \vec{v}_{ir}$$

Kinetičke energije sistema je

$$E_k = \sum_{i-1}^{n} E_{ki} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{v}_A + \vec{v}_{ir}\right)\cdot\left(\vec{v}_A + \vec{v}_{ir}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_A \cdot \vec{v}_{ir} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{ir} \cdot \vec{v}_{ir} = \frac{1}{2} v_A^2 \sum_{i=1}^{n} m_i + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_A \cdot \vec{v}_{ir} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_{ir}^2$$

Zbir u sredini izraza je

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_A \cdot \vec{v}_{ir} = \vec{v}_A \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{ir} = \vec{v}_A \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho}_{ir} = \vec{v}_A \frac{d}{dt}\left(m\vec{\rho}_C\right) = m\vec{v}_A \cdot \vec{v}_{Cr}$$

gdje je $\vec{v}_{Cr}$ relativna brzina središte masa materijalnog sistema u odnosu na pokretni sistem referencije.

Ako se za koordinatni početak pokretnog sistema referencije izabere upravo središte masa C materijalnog sistema, onda je $\vec{v}_A = \vec{v}_C$, a relativna brzina središta jednaka je nuli $\vec{v}_{Cr} = 0$, tako da je kinetičke energija materijalnog sistema:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_{ir}^2$$

Ova jednačina izražava **Kenigovu teoremu** o kinetičkoj energiji materijalnog sistema: Kinetička energija materijalnog sistema pri njegovom proizvoljnom apsolutnom kretanju jednaka je algebarskom zbiru iz kinetičke energije $\frac{1}{2} m v_C^2$ središta masa materijalnog sistema, pretpostavljajući da je u središtu C koncentrisana cjelokupna masa sistema, i kinetičke energije $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_{ir}^2$ pri relativnom kretanju materijalnog sistema u odnosu na pokretni sistem referencije $Cx_1\ y_1\ z_1$ koji je postavljen sa početkom u središtu masa.

Primjenom Kenigove teoreme mogu se izvesti izrazi za kinetičku energiju krutog tijela pri translatornom kretanju, pri obrtanju oko nepokretne ose, pri ravnom kretanju i pri opštem kretanju. Kako homogeno kruto tijelo predstavlja neizmjenljivi materijalni sistem sa neprekidnim rasporedom mase, kinetička energije krutog tijela računa se kao

$$E_k = \frac{1}{2}\int_V v^2 dm\,.$$

Translatorno kretanje tijela: Pri translatornom kretnju krutog tijela sve tačke tijela kreću se na isti način, tj. imaju iste brzine, pa je

$$E_k = \frac{1}{2}\int_V v^2 dm = \frac{1}{2}v^2\int_V dm = \frac{1}{2}mv^2$$

Obrtanje tijela oko nepokretne ose: Pri obrtanju tijela oko nepokretne ose tačke tijela se kreću po kružnim putanjama sa centrom na obrtnoj osi, a intenziteti brzina su $v = r\omega$, tako da je kinetičke energija tijela

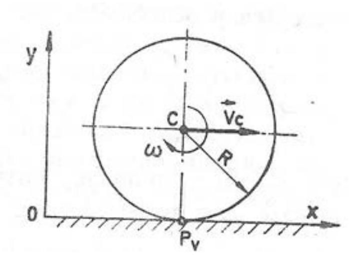
$$E_k = \frac{1}{2}\int_V v^2 dm = \frac{1}{2}\int_V (r\omega)^2\, dm = \frac{1}{2}\omega^2\int_V r^2 dm = \frac{1}{2}I_z\omega^2$$

gdje je I_z moment inercije tijela u odnosu na obrtnu osu Oz.

Ravno kretanje krutog tijela: Kako se ravno kretanje tijela može razložiti na translatorno kretanje tijela zajedno sa težištem C i na relativno obrtno kretanje tijela oko ose Cζ koja prolazi kroz težište, onda je relativna brzina i-te tačke tijela u odnosu na središte C, $v_{ir} = v_i^C = \rho_i\omega$, pa je kinetička energija tijela

$$E_k = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_{C\zeta}\omega^2$$

gdje je $\frac{1}{2}mv_C^2$ kinetička energija tijela usljed translatornog dijela kretanja, a $\frac{1}{2}I_C\omega^2$ je kinetička energija tijela usljed obrtanog dijela kretanja tijela oko ose Cζ koja ne mijenja svoj položaj u odnosu na tijelo, pa se ne mijenja ni moment inercije $I_{C\zeta}$ u odnosu na tu osu.



Ako se iskoristi izraz za brzinu centra mase C i Štajnerova teorema, kinetičke energija tijela je

$$E_k = \frac{1}{2}m\left(\overline{CP_v}\,\omega\right)^2 + \frac{1}{2}I_{C\zeta}\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m\overline{CP_v}^2 + I_{C\zeta}\right)\omega^2 = \frac{1}{2}I_{Pv}\omega^2$$

gdje je I_{Pv} moment inercije tijela za osu koja prolazi kroz trenutni pol brzina P_v. Ovaj izraz izražava činjenicu da se ravno kretanje može predstavi kao trenutno obrtanje oko ose kroz trenutni pol brzina P_v.

Međutim, kako se položaj trenutnog pola brzina mijenja tokom kretanja tijela, tako se mijenja i moment inercije tijela za osu koja prolazi kroz pol brzina, pa nije uvijek zgodno odrediti kinetičku energiju tijela ovim obrascem.

Opšte kretanje krutog tijela: Opšte kretanje krutog tijela može se predstaviti kao složeno kretanje sastavljeno od translatornog kretanja tijela zajedno sa težištem C tijela i relativnog obrtanja oko tačke C, odnosno trenutne obrtne ose koja prolazi kroz tačku C tijela i koja mijenja pravac tokom kretanja. Kinetička energija tijela je

$$E_k = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_\Omega\omega^2$$

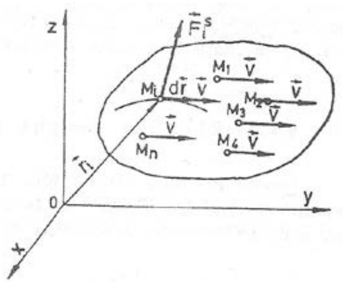
gdje je I_Ω moment inercije tijela u odnosu na trenutnu obrtnu osu CΩ koja prolazi kroz težište krutog tijela.

Kinetička energija sistema krutih tijela određena je zbirom kinetičkih energija pojedinih tijela koja obrazuju sistem :

$$E_k = \sum_{i-1}^{n} E_{ki} \ .$$

Rad sila koje dejstvuju na kruto tijelo:

a) Translatorno kretanje tijela:

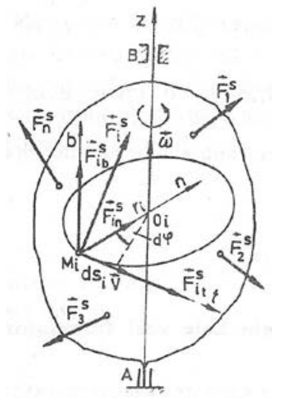


Ukupni elementarni rad sila je:

$$dA = \sum dA_i = \sum \vec{F}_i^s \cdot d\vec{r} = d\vec{r} \sum \vec{F}_i^s = \vec{F}_R^s \cdot d\vec{r}$$

Rad sila na konačnom pomjeranju je: $A_{1,2} = \sum_{i=1}^{n} \int_{I}^{II} \vec{F}_i^s \cdot d\vec{r}$

b) Obrtanje tijela oko nepokretne ose:



Silu $\vec{F}_i^s$ koja dejstvuje na i-tu tačku tijela možemo razložiti u pravcu osa prirodnog triedra, tako da je elementarni rad *i*-te sile:

$$dA_i = \vec{F}_i^s \cdot d\vec{r}_i = \left(\vec{F}_{it}^s + \vec{F}_{in}^s + \vec{F}_{ib}^s \right) \cdot ds_i \vec{e}_t = F_{it}^s \cdot ds_i = F_{it}^s r_i d\varphi = M_z^{\vec{F}_i^s} d\varphi$$

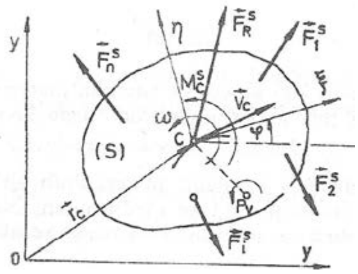
Ukupni elementarni rad svih sila koje dejstvuju na tijelo je:

$$dA = \sum dA_i = \sum M_z^{\vec{F}_i^s} d\varphi = M_z d\varphi$$

Rad svih sila koje dejstvuju na tijelo pri konačnom obrtanju je:

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z d\varphi$$

c) Ravno kretanje tijela:



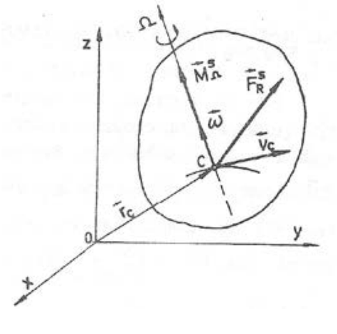
Kako se ravno kretanje sastoji iz translatornog kretanja tijela sa izabranim polom i obrtanja tijela oko ose koja prolazi kroz izabrani pol, ako sve sile koje dejstvuju na tijelo redukuju na pol (težište C) dobiće se glavni vektor spoljašnjih sila i glavni moment sila, pa je elementarni rad sila određen sa

$$dA = \vec{F}_R^s \cdot d\vec{r}_C + M_{C\zeta} d\varphi \, ,$$

gdje je $M_{C\zeta} = \sum M_{C\zeta}^{\vec{F}_i^s}$ glavni moment spoljašnjih sila u odnosu na osu koja prolazi kroz težište a upravna je na ravan kretanja. Rad spoljašnjih sila na konačnom pomjeranju tijela je:

$$A = \int_{C_I}^{C_{II}} \vec{F}_R^s \cdot d\vec{r}_C + \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{C\zeta} d\varphi \, .$$

d) Opšte kretanje krutog tijela:



U slučaju opšteg kretanja tijelo se obrće oko tačke C koja se takođe kreće u prostoru, rad vrši i glavni vektor i glavni moment spoljašnjih sila

$$\delta A = \vec{F}_R^s \cdot d\vec{r}_C + M_\Omega^s \delta\alpha$$

gdje je $M_\Omega^s = \sum_{i=1}^{n} M_\Omega^{\vec{F}_i^s}$ glavni moment spoljašnjih sila u odnosu na trenutnu obrtnu osu koja prolazi kroz pokretni pol C tijela.

Zakon o promjeni kinetičke energije sistema

Za i-tu tačku sistema može se napisati zakon o promjeni kinetičke energije

$$\frac{1}{2}m_i v_i^2 - \frac{1}{2}m_i v_{i0}^2 = A_i^s + A_i^u$$

gdje je A_i^s rad svih spoljašnjih sila koje dejstvuju na tačku i A_i^u rad svih unutrašnjih sila koje dejstvuju na tačku. Sabiranjem jednačina za sve tačke sistema dobije se

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_{i0}^2 = \sum_{i=1}^{n}A_i^s + \sum_{i=1}^{n}A_i^u$$

$$E_k - E_{k0} = \sum_{i=1}^{n}A_i^s + \sum_{i=1}^{n}A_i^u$$

Jednačina iskazuje zakon o promjeni kinetičke energije u konačnom obliku za izmjenljivi materijalni sistem: Priraštaj kinetičke energije izmjenljivog materijalnog sistema pri njegovom pomjeranju iz početnog u krajnji položaj jednak je zbiru radova svih spoljašnjih i unutrašnjih sila koje dejstvuju na izmjenljivi sistem na tom pomjeranju. Treba primijetiti da promjena kinetičke energije sistema zavisi i od unutrašnjih sila, tj. rad unutrašnjih sila različit je od nule u slučajevima kada se pri kretnju tijela deformišu ili ako su unutrašnje veze ostvarene preko elastičnih elemenata-opruga, rastegljivih konopaca i sl.

U slučaju neizmjenljivog sistema rad unutrašnjih sila jednak je nuli, $\sum_{i=1}^{n}A_i^u = 0$, pa je zakon

$$E_k - E_{k0} = \sum_{i=1}^{n}A_i^s$$

tj. priraštaj kinetičke energije neizmjenljivog materijalnog sistema na nekom njegovom pomjeranju jednak je zbiru radova svih spoljašnjih sila koje dejstvuju na neizmjenljivi sistem na tom pomjeranju.

Zakon o promjeni kinetičke energije može se napisati i u diferenicijalnom obliku:

$$d\left(\sum\frac{1}{2}m_i v_i^2\right) = \sum\vec{F}_i^s\cdot d\vec{r}_i + \sum\vec{F}_i^u\cdot d\vec{r}$$

$$dE_k = \sum dA_i^s + \sum dA_i^u \quad \textit{za izmjenljivi sistem}$$

$$dE_k = \sum dA_i^s \quad \textit{za neizmjenljivi sistem}$$

Diferencijal kinetičke energije materijalnog sistema jednak je zbiru elementarnih radova svih spoljašnjih sila i unutrašnjih sila koje dejstvuju na sistem.

Zakon o održanju mehaničke energije

Ako sve sile koje vrše rad pri kretanju tijela predstavljaju konzervativne sile, onda se njihov elementarni rad može izraziti kao totalni diferencijal funkcije sile U(x,y,z), odnosno pomoću potencijalne energije E_p:

$$dA = dU = -dE_p$$

Iz zakona o promjeni kinetičke energije imamo:

$$dE_k = dA = -dE_p \qquad \text{odakle je} \qquad d\left(E_k + E_p\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_k + E_p = E = const$$

Pri kretanju materijalnog sistema pod dejstvom konzervativnih (potencijalnih) sila, zbir kinetičke i potencijalne energije (mehanička energija) sistema ostaje nepromjenjen za sve vrste kretanja.

ELEMENTI ANALITIČKE MEHANIKE

GENERALISANE (UOPŠTENE) KOORDINATE.
BROJ STEPENI SLOBODE MATERIJALNOG SISTEMA

Broj stepeni slobode kretanja materijalnog sistema jeste broj nezavisno promjenljivih koordinata koje potpuno određuju položaj svih tačaka tog sistema u prostoru, tj. koje određuju položaj sistema.

Ako posmatramo sistem od „n“ materijalnih tačaka, onda taj sistem ima 3n Dekartovih koordinata (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n) jer svakoj tački odgovaraju po tri koordinate. Neka je broj holonomnih veza između koordinate tačaka jednak *„r“* i neka su jednačine veze zapisane u obliku, tako da indeks *„p“* označava redni broj veze

$$f_p\left(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n\right) = 0, \left(p = 1, 2, ..., r\right).$$

Ako je broj veza jednak ukupnom broju koordinata, tj. r=3n, to znači da se sistem neće kretati i prethodnim jednačinama su određene sve 3n koordinate materijalnog sistema. Da bi se sistem mogao kretati potrebno je da broj veza *„r“* bude manji od 3n (broj koordinata). U slučaju kada je r<3n nisu sve koordinate tačaka sistema nezavisne među sobom, jer se na osnovu *„r“* jednačina veza može *„r“* koordinata izraziti pomoću ostalih (3n-*r*) koordinata.

Stoga se (3n-*r*) koordinata sistema mogu se razmatrati kao nezavisno promjenljive, koje mogu uzimati proizvoljne vrijednosti i koje potpuno određuju položaj sistema, a ostalih *„r“* koordinata određuje se preko jednačina veze kao funkcija tih nezavisnih koordinata.

Broj nezavisnih koordinata materijalnog sistema jednak je broju stepeni slobode sistema i određuje se

$s = 3n - r$, gdje „n“ broj tačaka sistema a „r“ je broj holonomnih veza.

Nezavisni parametri čiji je broj jednak broju stepeni slobode materijalnog sistema $s = 3n - r$ i pomoću kojih se može u svakom trenutku jednoznačno odrediti položaj sistema, nazivaju se generalisane koordinate sistema.

Pri opisivanju položaja tačaka materijalnog sistema nije neophodno koristiti isključivo Dekartove koordinate, nego je često zgodnije uočiti skup od „s“ nezavisno promjenljivih generalisanih koordinata, koje mogu imati karakter pravolinijskih koordinata, rastojanja ili uglova, preko kojih je potpuno određen položaj svake tačke sistema. Preko generalisanih koordinata q_1, q_2,.., q_s (s-broj stepeni slobode sistema) mogu se izraziti i Dekartove koordinate svake tačke sistema

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_1, q_2, .., q_s\right), \left(i = 1, 2, .., n\right).$$

Na osnovu definicije generalisanih koordinata kretanje materijalnog sistema biće potpuno određeno ako su generalisane koordinate q_k poznate funkcije vremena

$$q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), ..., q_s = q_s(t).$$

VIRTUALNO (MOGUĆNO) POMJERANJE MATERIJALNOG SISTEMA

Virtualno ili mogućno pomjeranje materijalnog sistema naziva se svako zamišljeno beskonačno malo pomjeranje tačaka sistema koje u datom trenutku dopuštaju veze kojima je sistem podvrgnut.

Drugim riječima, virtualno pomjeranje je svako zamišljeno beskonačno malo pomjeranje tačaka sistema koje bi te tačke mogle da izvrše u datom trenutku iz datog položaja ne narušavajući veze.

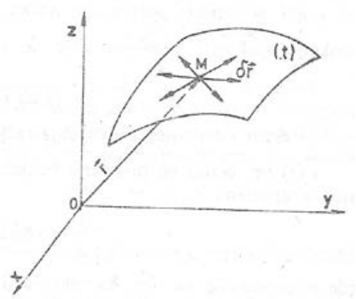
Virtualno ili mogućno pomjeranje jeste geometrijski pojam jer to pomjeranje ne zavisi od dejstva sile na sistem, već zavisi samo od karaktera veza kojima je sistem podvrgnut.

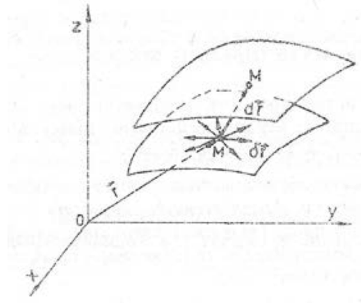
Posmatrajmo materijalnu tačku M koja se kreće po nepokretnoj površini čija jednačina $f\left(x, y, z\right) = 0$ predstavlja jednačinu holonomne stacionarne veze zadržavajuće veze. Tačka ima dva stepena slobode, jer su od tri koordinate tačke dvije nezavisne, a treća se određuje pomoću jednačine veze. Zamislimo da je vrijeme *t* prestalo da se mijenja i razmotrimo u kojim se sve pravcima tačka može pomjerati po površini.

Vektor $\delta\vec{r}$ beskonačno malog pomjeranja tačke M pri kome ona ne napušta datu površ jeste vektor virtualnog pomjeranja i on je usmjeren po tangenti na površ u tački M u bilo kom pravcu.

Stvarno pomjeranje tačke M po površi zavisi kako od sila koje dejstvuju na tačku i karaktera veze tako i od početnih uslova kretanja i ono je funkcija vremena.

U slučaju stacionarnih veza (veze koje ne zavise od vremena) pravac vektora stvarnog pomjeranja $d\vec{r}$ poklapa se sa pravcem jednog od vektora virtualnog pomjeranja, dok u slučaju nestacionarnih veza stvarno pomjeranje $d\vec{r}$ tačke se uopšte ne poklapa ni sa jednim od mogućnih pomjeranje tačke M.





Pri stvarnom pomjeranju tačke M vektor pomjeranja $d\vec{r}$ je diferencijal funkcije položaja $\vec{r}=\vec{r}\left(t\right)$,

$$d\vec{r}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\vec{k}$$

Vektor virtualnom pomjeranja tačke M po svom smislu je varijacija funkcije $\vec{r}=\vec{r}\left(t\right)$ pri čemu se promjena funkcije određuje pri konstantnoj vrijednosti argumenta vremena *t*, pa je

$$\delta\vec{r}=\delta x\,\vec{i}+\delta y\,\vec{j}+\delta z\vec{k}$$

gdje su $\delta x,\delta y,\delta z$ varijacije koordinata x,y,z tačke M.

Prve varijacije formalno se određuju na isti način kao i diferencijali dx,dy,dz funkcije, pri čemu se vrijeme smatra konstantnim.

Ako se položaj tačaka sistema izrazi neposredno preko generalisanih koordinata, tada je kretanje sistema podvrgnutog stacionarnim vezama određeno sa konačnim jednačinama kretanja $q_k=q_k\left(t\right),\left(k=1,2,..,s\right)$.

Elementarna pomjeranja u intervalu vremena *dt* data su preko odgovarajućih priraštaja generalisanih koordinata

$$d\vec{r}_i=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}dq_k,\quad\left(i=1,2,..,N\right)$$

a virtualna pomjeranja prikazujemo u obliku

$$\delta\vec{r}_i=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k,\quad\left(i=1,2,..,N\right).$$

RAD SILA NA VIRTUALNIM POMJERANJIMA

Rad sile $\vec{F}_i$,koja predstavlja rezultantu svih sila koje dejstvuju na proizvoljnu tačku M$_i$ sistema, na virtualnom pomjeranju $\delta\vec{r}_i$ te tačke izračunavamo analogno elementarnom radu te sile na stvranom pomjeranju tačke, tj.

$$\delta A_i=\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=F_i\delta s_i\cos\angle\left(\vec{F}_i,\delta\vec{r}_i\right),$$

gdje je intenzitet vektora virtualnog pomjeranja $\left|\delta\vec{r}_i\right|$ tačke M jednak luku δs_i trajektorije koju može da opiše tačka M$_i$ pri svom virtualnom pomjeranju, tj. $\left|\delta\vec{r}_i\right|=\delta s_i$.

Rad sila na virtualnim pomjeranjima sistema naziva se virtualni ili mogući rad.

Za sve tačke razmatranog sistema mogu se napisati jednačine za rad sile, pa sabiranjem tih jednačina za cio materijalni sistem dobijamo

$$\delta A=\sum_{i=1}^{n}\delta A_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{n}F_i\delta s_i\cos\left(\vec{F}_i,\delta\vec{r}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i\right).$$

GENERALISANE SILE

Rad sila na virtualnim pomjeranjima moguće je izraziti preko generalisanih koordinata sistema.

Ako varijaciju $\delta\vec{r}_i$ vektora položaja tačke izrazimo pomoću varijacija $\delta q_1,\delta q_2,..,\delta q_s$ generalisanih koordinata

$$\delta\vec{r}_i=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k=\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2}\delta q_2+...+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_s}\delta q_s\quad\left(i=1,2,..,N\right)$$

onda je virtualni rad

$$\delta A=\sum_{i=1}^{n}\delta A_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k\ ,$$

ili, mijenjajući redosljed sabiranja,

$$\delta A=\sum_{k=1}^{s}\delta q_k\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}.$$

Možemo uvesti oznaku

$$Q_k=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\quad\left(k=1,2,..,s\right)$$

Tako da se izraz za virtualni rad može zapisati kao

$$\delta A=\sum_{k=1}^{s}Q_k\cdot\delta q_k=Q_1\delta q_1+Q_2\delta q_2+..+Q_s\delta q_s$$

<u>Množitelji $Q_1,Q_2,..,Q_s$ uz varijacije generalisanih koordinata $\delta q_1,\delta q_2,..,\delta q_s$ u izrazu za virtualni rad aktivnih sila koje dejstvuju na sistem, nazivaju se generalisane sile sistema.</u>

Broj generalisanih sila sistema jednak je broju generalisanih koordinata, odnosno broju stepeni slobode sistema.

Dimenzija generalisane sile zavisi od dimenzije odgovarajuće generalisane koordinate i određuje se sa $\left[Q\right]=\frac{\left[A\right]}{\left[q\right]}=\frac{\left[rad\right]}{\left[q\right]}$, što znači da ako generalisana koordinata ima dimenziju dužine (m) onda generalisana sila ima dimenziju obične sile (N), ali ako je za generalisanu koordinatu usvojen ugao onda generalisana sila ima dimenziju momenta sile (Nm).

Ako na sistem dejstvuju konzervativne sile, potencijalna energija sistema je E_p= -U , gdje je U funkcija sile, onda se generalisane sile mogu odrediti kao

$$Q_k=-\frac{\partial E_p}{\partial q_k}\quad\left(k=1,2,..,s\right),$$

<u>tj. generalisana sila sistema jednaka je parcijalnom izvodu potencijalne energije sistema po odgovarajućoj generalisanoj koordinati uzetim sa negativnim predznakom.</u>

OSNOVNE JEDNAČINE DINAMIKE MATERIJALNOG SISTEMA

- Lagranževe jednačine prve vrste
- Opšta jednačina statike (Lagranžev princip virtualnih pomjeranja)
- Opšta jednačina dinamike (Lagranž-Dalamberov princip)
- Lagranževe jednačine druge vrste

OPŠTA JEDNAČINA STATIKE (LAGRANŽEV PRINCIP VIRTUALNIH POMJERANJA)

Lagranžev princip virtualnih pomjeranja (opšta jednačina statike) izražava potrebne i dovoljne uslove za ravnotežu svakog materijalnog sistema: Za ravnotežu sila u svakoj tački materijalnih sistema podvrgnutih idealnim holonomnim stacionarnim zadržavajućim vezama potrebno je i dovoljno da zbir radova svih aktivnih sila koje dejstvuju na sistem na svakom virtualnom pomjeranju sistema bude jednak nuli pod pretpostavkom da su početne brzine svih tačaka sistema jednake nuli. Matematički izraz ovog principa je

$$\delta A=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^a\cdot\delta\vec{r}_i=0\,.$$

Lagranžev princip virtualnih pomjeranja može se iskazati i pomoću generalisanih sila sistema:

$$\delta A=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^a\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{k=1}^{s}Q_k\cdot\delta q_k=0$$

Kako su sve varijacije generalisanih koordinata $\delta q_1,\delta q_2,..,\delta q_s$ nezavisne među sobom, jednačina će biti zadovoljena samo ako su svi koeficijenti $Q_1,Q_2,..,Q_s$ uz nezavisne varijacije jednaki nuli, tj.

$$Q_1=0,\,Q_2=0,...,\,Q_s=0$$

Za ravnotežu materijalnog sistema sa zadržavajućim idealnim, stacionarnim i holonomnim vezama, potrebno je i dovoljno da generalisane sile koje odgovaraju izabranim generalisanim koordinatama sistema budu jednake nuli, pod pretpostavkom da su početne brzine svih tačaka sistema jednake nuli.

Ako na sistem dejstvuju konzervativne sile, onda se Lagranžev princip virtualnih pomjeranja može se iskazati sa

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_1}=0,\ \frac{\partial E_p}{\partial q_2}=0,\ ...,\ \frac{\partial E_p}{\partial q_s}=0$$

Da bi sistem bio u stabilnoj ili labilnoj ravnoteži potencijalna energija sistema mora imati ekstremne vrijednosti, minimum ili maksimum, pa slijedi: Ako u datom položaju konzervativnog sistema potencijalna energija sistema ima ekstremnu vrijednost onda je taj položaj ravnoteže sistema stabilan ili labilan. Ako se zahtijeva da položaj ravnoteže sistema bude stabilan položaj, onda potencijalna energija sistema u tom položaju mora imati minimum.

OPŠTA JEDNAČINA DINAMIKE (LAGRANŽ-DALAMBEROV PRINCIP)

Ako posmatramo sistem materijalnih tačaka $P_{1,}P_2,..,P_n$ koji je podvrgnut uticaju samo idealnih veza, možemo napisati jednačine kretanja za materijalne tačke sistema, kao za skup slobodnih tačaka koje smo oslobodili veza a dejstvo veza zamijenili odgovarajućim silama:

$$m_i\vec{a}_i=\vec{F}_i^a+\vec{R}_i\quad\left(i=1,2,..,n\right).$$

Svaku od ovih jednačina pomnožimo sa odgovarajućim vektorom virtualnih pomjeranja i zatim saberemo sve tako dobijene jednačine:

$$m_1\vec{a}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 = \vec{F}_1^{\,a} \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{R}_1 \cdot \delta\vec{r}_1$$

$$m_1\vec{a}_1 \cdot \delta\vec{r}_2 = \vec{F}_1^{\,a} \cdot \delta\vec{r}_2 + \vec{R}_1 \cdot \delta\vec{r}_2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,a} \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i$$

....

$$m_n\vec{a}_n \cdot \delta\vec{r}_n = \vec{F}_n^{\,a} \cdot \delta\vec{r}_n + \vec{R}_n \cdot \delta\vec{r}_n$$

Po pretpostavci su veze sistema idealne, pa je $\sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ (rad reakcija idealnih veza na virtualnom pomjeranju jednak je nuli), a onda je gornja jednačina može napisati kao

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,a} \cdot \delta\vec{r}_i \,, \qquad \text{odnosno} \qquad \sum_{i=1}^{n} \left(-m_i\vec{a}_i\right) \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,a} \cdot \delta\vec{r}_i = 0\,.$$

Veličine $\left(-m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i^{\,in}\right)$ koje imaju dimenziju sila nazivaju se **inercijalne sile**, a odnose se na svaku materijalnu tačku ponaosob. Uvodeći termin inercijalne sile, gornja jednačina iskazuje Lagranž-Dalamberov princip (opštu jednačinu dinamike): <u>Pri proizvoljno kretanju materijalnog sistema sa idealnim zadržavajućim vezama u svakom trenutku vremena zbir radova svih aktivnih sila i svih uslovno pridodatih sila inercije na svakom virtualnom pomjeranju sistema jednak je nuli</u>.

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i^{\,a} + \vec{F}_i^{\,in}\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0\,.$$

Lagranž-Dalamberov princip (opšta jednačinu dinamike) omogućuje da se napišu diferencijalne jednačine kretanja bilo kog materijalnog sistema. Na taj način iz ovog principa slijede i svi opšti zakoni kretanja materijalnog sistema.

LAGRANŽEVE JEDNAČINE DRUGE VRSTE

Ako se sistem koji ima više stepeni slobode sastoji iz sistema krutih tijela koja se ne kreću translatorno, primjena Lagranž-Dalamberovog principa usložnjava problem formiranja diferencijalnih jednačina kretanja sistema, zbog toga što je, osim izračunavanja virtualnih radova aktivnih sila, glavnih vektora i glavnih momenata sila inercije razmatranog sistema, potrebno iz formiranih jednačina eliminisati zavisne koordinate i njihove varijacije.

Zbog toga je u takvim složenim slučajevima pogodnije formirati diferencijalne jednačine kretanja sistema u odnosu na generalisane koordinate, što se postiže Lagranževim jednačinama druge vrste.

Izvođenje Lagranževih jednačina druge vrste proističe iz Lagranž-Dalamberovog principa, gdje se vektori virtualnih pomjeranja iskazuju u funkciji generalisanih koordinata

$$za \quad \delta\vec{r}_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k\,, \quad \left(i = 1, 2, .., n\right)$$

$$iz \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i^{\,a} - m_i\vec{a}_i\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i^{\,a} - m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\right) \cdot \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k = 0$$

Ovu jednačinu pomnožimo sa (-1) i promijenimo red sabiranja,

$$\sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,a} \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k = 0\,.$$

Drugi zbir u zagradi ove jednačine je generalisana sila sistema, tako da jednačina postaje

$$\sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} - Q_k\right)\delta q_k = 0\,.$$

Prvi član pod znakom sume u zagradi prethodne jednačine napisaćemo kao

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}=\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)-m_i\vec{v}_i\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}.$$

Razmotrimo parcijalne izvode koji figurišu u jednačini:
Brzina proizvoljne tačke sistema podvrgnutog nestacionarnim vezama je

$$\vec{v}_i=\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+..+\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dt}+\frac{\partial \vec{r}_i}{dt}=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial \vec{r}_i}{dt}$$, gdje je $\dot{q}_k$ generalisana brzina,

a brzina proizvoljne tačke sistema podvrgnutog stacionarnim vezama je

$$\vec{v}_i=\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+..+\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dt}=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k.$$

Odavde je parcijalni izvod brzine po bilo kojoj generalisanoj koordinati jednak $\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$.

U slučaju stacionarnih veza je

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}=\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k\partial q_2}\dot{q}_2+...+\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k\partial q_s}\dot{q}_s,$$

a s druge strane je

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k}=\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_1\partial q_k}\dot{q}_1+\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_2\partial q_k}\dot{q}_2+...+\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_s\partial q_k}\dot{q}_s,$$

pa se može uspostaviti jednakost

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}=\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k}.$$

Sada je

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}=\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)-m_i\vec{v}_i\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}=\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}\right)-m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k}$$

Pošto je

$$m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right),\quad m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k}=\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right),$$

prethodni izraz se može napisati u obliku

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right).$$

Vratimo se na jednačinu

$$\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}-Q_k\right)\delta q_k=0$$

koju sad možemo napisati kao

$$\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2}-\frac{\partial}{\partial q_k}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2}-Q_k\right)\delta q_k=0 \quad \text{ili} \quad \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial E_k}{\partial q_k}-Q_k\right)\delta q_k=0.$$

S obzirom da su varijacije generalisanih koordinata $\delta q_1,\delta q_2,...,\delta q_s$ proizvoljne i različite od nule, to je prethodna jednačina zadovoljena samo onda kada je izraz u zagradi jednak nuli, tj.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial E_k}{\partial q_k}=Q_k,\quad (k=1,2,..,s).$$

Ove jednačine su diferencijalne jednačine kretanja materijalnog sistema izražene preko generalisanih koordinata i nazivaju se **Lagranževe jednačine druge vrste**. Integracijom ovih jednačina uz korišćenje početnih uslova kretanja određuju se jednačine kretanja sistema $q_1=q_1(t),q_2=q_2(t),...,q_s=q_s(t)$.

Kada je materijalni sistem podvrgnut holonomnim vezama, broj Lagranževih jednačina druge vrste jednak je broju generalisanih koordinata sistema, tj. broju stepeni slobode materijalnog sistema.

Prednost Lagranževih jednačina druge vrste u odnosu na druge metode proučavanja kretanja materijalnog sistema je u tome što broj diferencijalnih jednačina kretanja sistema ne zavisi od broja članova sistema, već isključivo od broja stepeni slobode sistema. Takođe, sile koje dejstvuju na sistem uključene su u Lagranževe jednačine druge vrste preko generalisanih sila u koje ulaze samo aktivne sile, a sve reakcije idealnih veza su isključene.

Lagranževe jednačine druge vrste za konzervativne sisteme

Ako na sistem dejstvuju konzervativne sile, onda je $Q_k = -\frac{\partial E_p}{\partial q_k}$, pa Lagranževe jednačine II vrste glase

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial E_k}{\partial q_k} = -\frac{\partial E_p}{\partial q_k}, \quad (k = 1, 2, .., s).$$

Pošto je potencijalna energija stacionarnih konzervativnih sistema funkcija samo generalisanih koordinata, $E_p = E_p(q_1, q_2, .., q_s)$, tj. ne zavisi od generalisanih brzina, to se jednačine mogu napisati kao

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (E_k - E_p)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial (E_k - E_p)}{\partial q_k} = 0, \quad (k = 1, 2, .., s).$$

Veličina $E_k - E_p = L$ naziva se Lagranževa funkcija ili kinetički potencijal, pa se jednačine mogu napisati

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (k = 1, 2, .., s).$$

Ove jednačine predstavljaju Lagranževe jednačine II vrste za konzervativne sisteme.

DINAMIKA KRUTOG TIJELA

DINAMIKA KRUTOG TIJELA

Pod krutim tijelom podrazumijevamo poseban slučaj materijalnog sistema sa kontinuiranim rasporedom mase kod koga se rastojanja između tačaka sistema ne mijenja pod djelovanjem spoljašnjih i unutrašnjih sila.

Proučavanje kretanja krutog tijela podrazumijeva uspostavljanje zavisnosti između sila koje dejstvuju na tijelo i kretanja tijela. Za ovu analizu najčešće se koriste opšti zakoni dinamike materijalnog sistema i to ZAKON KOLIČINE KRETANJA i ZAKON MOMENTA KOLIČINE KRETANJA.

Kao što je u kinematici kretanje krutog tijela definisano za svaki poseban tip kretanja, tako ćemo u ovom dijelu razmotriti:

1. Dinamiku translatornog kretanja krutog tijela
2. Dinamiku rotacije tijela oko nepokretne ose
3. Dinamiku ravnog kretanja tijela
4. Dinamiku opšteg (prostornog)kretanja tijela

DINAMIKA TRANSLATORNOG KRETANJA TIJELA

Pri translatornom kretanju sve tačke tijela kreću se na isti način, tako da je dovoljno proučiti kretanje jedne tačke tijela čija je masa jednaka masi tijela i na koju dejstvuje sila jednaka glavnom vektoru spoljašnjih sila koje dejstvuju na tijelo. Ukoliko za tu tačku izaberemo težište tijela S (centar inercije), možemo primijeniti zakon o kretanju centra inercije, tj. težišta krutog tijela:

$$m\ddot{\vec{r}}_S = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \ .$$

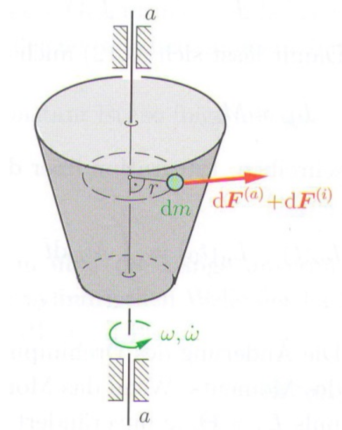
Projekcije ove vektorske jednačine na pravce Dekartovih koordinatnih osa su:

$$m\ddot{x}_S = F_x \qquad m\ddot{y}_S = F_y \qquad m\ddot{z}_S = F_z$$

Ove jednačine predstavljaju diferencijalne jednačine translatornog kretanja krutog tijela.

DINAMIKA ROTACIJE TIJELA OKO NEPOKRETNE OSE

Kada tijelo rotira oko nepokretne ose svaka tačka tijela opisuje kružnu putanju. Elementarna masa dm pri rotaciji ima brzinu $v = r\omega$, a njen kinetički moment u odnosu na osu rotacije je



$$dL_a = rvdm = r^2\omega dm$$

Za tijelo koje rotira oko nepokretne ose $a-a$, kinetički moment za obrtnu osu dobijemo integraljenjem (zbrajanjem po svim elementarnim masama)

$$L_a = \int dL_a = \omega \int r^2 dm = J_a\omega \ ,$$

gdje je J_a moment inercije tijela u odnosu na obrtnu osu.

Zakon o promjeni kinetičkog momenta tijela je

$$\frac{dL_a}{dt} = M_a \ , \qquad \text{tj.} \quad \frac{d}{dt}\left(J_a\omega\right) = M_a \ , \quad \text{odakle je}$$

$$J_a\ddot{\varphi} = M_a$$

Ova jednačina iskazuje diferencijalniu jednačinu rotacije krutog tijela oko nepokretne ose.

Može se uočiti analogija između translatornog kretanja i obrtanja oko nepokretne ose: pri rotaciji tijela mjera inercije tijela nije masa već moment inercije; umjesto translatorne brzine imamo ugaonu brzinu tijela; umjesto sila imamo dejstvo momenta sila u odnosu na osu rotacije.

RAD , ENERGIJA I SNAGA PRI ROTACIJI TIJELA

Kinetička energija tijela koje rotira oko nepokretne ose a-a je:

$$E_k = \frac{1}{2}\int v^2 dm = \frac{1}{2}\int (r\omega)^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2 dm = \frac{1}{2}J_a\omega^2$$

Pri rotaciji tijela za mali ugao $d\varphi$, rad vrši moment vanjskih sila M_a izračunat za obrtnu osu a-a:

$$dA = M_a d\varphi$$

Pri konačnoj rotaciji tijela od položaja φ_0 do položaja φ, konačni rad momenta sile je

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_a d\varphi .$$

Snaga je definisana kao prvi izvod rada po vremenu

$$P = \frac{dA}{dt} = M_a\omega$$

Integraljenjem zakona kinetičkog momenta $J_a\ddot{\varphi} = M_a$ po uglu rotacije φ, dobije se

$$J_a\int_{\varphi_0}^{\varphi} \ddot{\varphi} d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_a d\varphi$$

Kako je $d\varphi = \dot{\varphi}dt$ i $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\right) = \frac{1}{2}2\dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \dot{\varphi}\ddot{\varphi}$, imamo da je vrijednost integrala s lijeve strane jednakosti

$$J_a\int_{t_0}^{t} \ddot{\varphi}\dot{\varphi}dt = J_a\int_{\dot{\varphi}_0}^{\dot{\varphi}} d\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\right) = \frac{1}{2}J_a\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}J_a\dot{\varphi}_0^2$$

tako da se dobije zakon o promjeni kinetičke energije tijela u konačnom obliku:

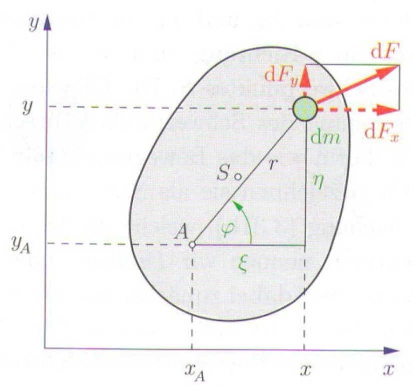
$$\frac{1}{2}J_a\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}J_a\dot{\varphi}_0^2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_a d\varphi, \text{ odnosno } E_k - E_{k0} = A .$$

DINAMIKA RAVNOG KRETANJA KRUTOG TIJELA

Da bi tijelo vršilo ravno kretanje potrebno je da budu zadovoljeni sljedeći uslovi:

a) Da tijelo posjeduje ravan materijalne simetrije. Iz ovog uslova slijedi da će svaka osa upravna na ravan materijalne simetrije biti glavna osa inercije za tačku u kojoj osa probija ravan simetrije.
b) Da su sile koje dejstvuju na tijelo takve da se pri redukciji na bilo koju tačku ravni materijalne simetrije tijela dobija glavni vektor koji leži u ravni materijalne simetrije i glavni moment upravan na ravan materijalne simetrije.

Razmotrimo kruto tijelo čije tačke se kreću u ravni xOy i u ravnima paralelnim ovoj ravni. Položaj tijela definisan je koordinatama referentne tačke A $\left(x_A, y_A\right)$ i uglom rotacije φ.



Na infinitezimalnu masu dm dejstvuje vanjska sila $d\vec{F}$, koja ima komponente $d\vec{F}_x$ i $d\vec{F}_y$. Ova masa nalazi se na nekom rastojanju r od proizvoljne tačke A, tako da su projekcije tog rastojanja

$$\xi = r\cos\varphi \text{ i } \eta = r\sin\varphi$$

a položaj infinitezimalne mase u odnosu na Dekartov sistem određen je koordinatama:

$$x = x_A + \xi = x_A + r\cos\varphi$$

$$y = y_A + \eta = y_A + r\sin\varphi .$$

Komponente brzine i ubrzanja mase dm su:

$$\dot{x} = \dot{x}_A - r\dot{\varphi}\sin\varphi = \dot{x}_A - \eta\dot{\varphi} \qquad \dot{y} = \dot{y}_A + r\dot{\varphi}\cos\varphi = \dot{y}_A + \xi\dot{\varphi}$$

$$\ddot{x} = \ddot{x}_A - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi = \ddot{x}_A - \ddot{\varphi}\eta - \dot{\varphi}^2\xi \qquad \ddot{y} = \ddot{y}_A + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi = \ddot{y}_A + \ddot{\varphi}\xi - \dot{\varphi}^2\eta$$

Jednačine kretanja elementarne mase dm u pravcima osa x i y su:

$$\ddot{x}dm = \ddot{x}_A dm - \ddot{\varphi}\eta dm - \dot{\varphi}^2\xi dm = dF_x$$

$$\ddot{y}dm = \ddot{y}_A dm + \ddot{\varphi}\xi dm - \dot{\varphi}^2\eta dm = dF_y$$

Integraljenjem jednačina dobiju se komponente vanjske sile F_x i F_y, i moment ovih sila u odnosu na A:

$$F_x = \int dF_x = \ddot{x}_A\int dm - \ddot{\varphi}\int \eta dm - \dot{\varphi}^2\int \xi dm$$

$$F_y = \int dF_y = \ddot{y}_A\int dm + \ddot{\varphi}\int \xi dm - \dot{\varphi}^2\int \eta dm$$

$$M_A = \int \xi dF_y - \int \eta dF_x = \ddot{y}_A\int \xi dm + \ddot{\varphi}\int \xi^2 dm - \dot{\varphi}^2\int \xi\eta dm - \ddot{x}_A\int \eta dm + \ddot{\varphi}\int \eta^2 dm + \dot{\varphi}^2\int \xi\eta dm$$

Ako tačku A izaberemo tako da pada u centar inercije S (težište tijela) onda su statički momenti $\int \xi dm$ i $\int \eta dm$ jednaki nuli, masa tijela je $m = \int dm$, aksijalni moment inercije s obzirom na osu koja prolazi kroz centar S je $J_S = \int r^2 dm = \int\left(\xi^2 + \eta^2\right)dm$, tako da prethodne jednačine poprimaju jednostavniji oblik:

$$m\ddot{x}_S = F_x$$

$$m\ddot{y}_S = F_y$$

$$J_S\ddot{\varphi} = M_S$$

Ove jednačine predstavljaju diferencijalne jednačine ravnog kretanja krutog tijela. Ovdje su F_x i F_y komponente glavnog vektora vanjskih sila u pravcima osa x i y, a M_S je moment vanjskih sila u odnosu na tačku S.

Prve dvije jednačine određuju kretanje težišta tijela i jednake su jednačinama koje smo imali kod kretanja centra inercije (translatorno kretanje tijela). Treća jednačina je zakon kinetičkog momenta za težište tijela (centar inercije) ili momentna jednačina.

Ponovo se može naglasiti : Ako se kao referentna tačka uzme težište tijela, onda ove jednačine opisuju opšte kretanje krutog tijela u ravni. To znači da iz ovih jednačina možemo izvesti jednačine koje odgovaraju čistoj translaciji ili čistoj rotaciji tijela.

Na primjer:

a) Ako tijelo miruje , $\left(\ddot{x}_S = 0, \ddot{y}_S = 0, \ddot{\varphi} = 0\right)$, proizilaze jednačine statičke ravnoteže.

b) Za poseban slučaj translacije je $\left(\dot{\varphi} = 0, \ddot{\varphi} = 0\right)$, tako da je $M_S = 0$, tj. moment spoljašnjih sila u odnosu na težište jednak je nuli. Kretanje težišta je opisano jednačinama $m\ddot{x}_S = F_x$ i $m\ddot{y}_S = F_y$

c) Ako tijelo izvodi čistu rotaciju oko ose koja prolazi kroz tačku A i okomita je na ravan xOy, onda je tačka A nepokretna $\left(\ddot{x}_A = 0, \ddot{y}_A = 0\right)$, a moment inercije tijela za obrtnu osu je $J_A = \int\left(\xi^2 + \eta^2\right)dm$, tako da je jednačina kretanja $J_A\ddot{\varphi} = M_A$ i jednaka je diferencijalnoj jednačini rotacije tijela oko nepokretne ose.

ZAKON KOLIČINE KRETANJA I MOMENTA KOLIČINE KRETANJA. ZAKON KINETIČKE ENERGIJE

Ako se integrale jednačine kretanja težišta i jednačine rotacije oko težišta unutar vremenskog intervala $\Delta t = t - t_0$, onda možemo dobiti jednačine $x_{S0} = x_S\left(t_0\right)$, pa je zakon promjene količine kretanja i momenta količine kretanja određen jednačinama:

$$m\dot{x}_S - m\dot{x}_{S0} = I_x, \qquad m\dot{y}_S - m\dot{y}_{S0} = I_y$$

$$J_S\dot{\varphi} - J_{S0}\dot{\varphi}_0 = \hat{M}_S$$

gdje je: $I_x = \int_{t_0}^{t} F_x dt$, $I_y = \int_{t_0}^{t} F_y dt$ - impuls sile, $\hat{M}_S = \int_{t_0}^{t} M_S dt$ - impuls momenta sile.

Pri translatornom kretanju tijela u ravni važe prve dvije jednačine, dok pri rotaciji tijela oko nepokretne ose važi samo treća jednačina.

Možemo izračunati i kinetičku energiju tijela koje vrši ravno kretanje. Ako za referentnu tačku usvojimo težište tijela, onda su komponente brzine tačke koja odgovara nekoj elementarnoj masi:

$$\dot{x} = \dot{x}_S - \eta\dot{\varphi} \qquad \dot{y} = \dot{y}_S + \xi\dot{\varphi},$$

a kinetička energija tijela je

$$E_k = \frac{1}{2}\int v^2 dm = \frac{1}{2}\int\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)dm = \frac{1}{2}\left\{\left(\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2\right)\int dm - 2\dot{x}_S\dot{\varphi}\int \eta dm + 2\dot{y}_S\dot{\varphi}\int \xi dm + \dot{\varphi}^2\int\left(\xi^2 + \eta^2\right)dm\right\}$$

Kako su statički momenti $\int \xi dm$ i $\int \eta dm$ jednaki nuli s obzirom na težište tijela, a integral $J_S = \int\left(\xi^2 + \eta^2\right)dm$ predstavlja aksijalni moment inercije za osu koja prolazi kroz težište, dobijemo:

$$E_k = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}J_S\dot{\varphi}^2.$$

Kod ravnog kretanja krutog tijela kinetička energija sastoji se iz dva člana, kinetičke energije translacije težišta $\frac{1}{2}mv_S^2$ i kinetičke energije rotacije oko ose koja prolazi kroz težište $\frac{1}{2}J_S\dot{\varphi}^2$.

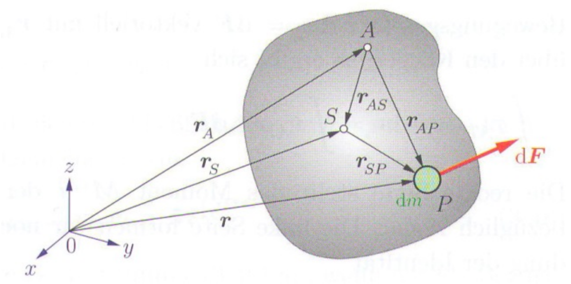
Zakon o promejni kinetičke energije kod ravnog kretanja krutog tijela je:

$$E_k - E_{k0} = \sum A\left(\vec{F}_i\right) = \sum \int_{M_0}^{M} \vec{F}_i \cdot d\vec{r} + \sum \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{Si} \cdot d\varphi.$$

DINAMIKA SFERNOG I OPŠTEG (PROSTORNOG) KRETANJA KRUTOG TIJELA

ZAKON KOLIČINE KRETANJA I ZAKON MOMENTA KOLIČINE KRETANJA

Iz kinematike je poznato da se kretanje slobodnog krutog tijela može posmatrati kao kretanje složeno iz translacije tijela zajedno sa težištem (centrom inercije) i sfernog kretanja oko težišta (centra inercije). Stoga se opšte kretanje krutog tijela opisuje zakonom količine kretanja (translacija težišta) i zakonom momenta količine kretanja (obrtanje tijela oko težišta).



Razmotrimo kruto tijelo mase m, pri čemu smatramo da beskonačno mnogo infinitezimalnih masa dm sačinjava tijelo.

Na infinitezimalnu masu dm dejstvuje spoljašnja sila $d\vec{F}$.

Položaj težišta tijela S u odnosu na nepokretni Dekartov sistem referencije određen je vektorom položaja $\vec{r}_S$ koji ima koordinate x, y, z, tako da je

$$m\vec{r}_S = \int \vec{r}dm .$$

Deriviranjem dva puta po vremenu dobije se dvije jednačine:

$$m\dot{\vec{r}}_S = \int \dot{\vec{r}}dm$$

$$m\ddot{\vec{r}}_S = \int \ddot{\vec{r}}dm$$

Desna strana prve jednačine je količina kretanja krutog tijela (zbrajanje po svim infinitezimalnim količinama kretanja $d\vec{K} = \vec{v}dm = \dot{\vec{r}}dm$), tako da je

$$m\dot{\vec{r}}_S = \int \dot{\vec{r}}dm = \int d\vec{K} = \vec{K} \ .$$

U drugoj jednačini pod integralom na desnoj strani je spoljašnja sila koja dejstvuje na infinitezimalnu masu, $d\vec{F} = \ddot{\vec{r}}dm = \vec{a}dm$, tako da je

$$m\ddot{\vec{r}}_S = \int \ddot{\vec{r}}dm = \int d\vec{F} = \vec{F}$$

Slijedi da deriviranjem po vremenu prve jednačine, tj. količine kretanja krutog tijela dobijamo silu koja dejstvuje na kruto tijelo, tj. drugu jednačinu:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F} .$$

Ova jednačina iskazuje <u>zakon količine kretanja tijela</u>: Težište krutog tijela kreće se kao tačka u koju je koncentrisna masa cijelog tijela kada na nju dejstvuje glavni vektor spoljašnjih sila koje dejstvuju na tijelo.

<u>Zakon momenta količine kretanja</u> postavićemo spram proizvoljne tačke A tijela.

Ako zakon količine kretanja za infinitezimalnu masu, $\vec{a}dm = d\vec{F}$, pomnožimo s lijeva vektorom položaja tačke P u odnosu na tačku A, $\vec{r}_{AP}$, i integralimo za čitavo tijelo, dobijemo

$$\int \vec{r}_{AP} \times \vec{a}dm = \int \vec{r}_{AP} \times d\vec{F}$$

Desna strana jednakosti predstavlja moment spoljašnjih sila u odnosu na tačku A, $\int \vec{r}_{AP} \times d\vec{F} = \vec{M}_A$.

Lijevu stranu jednakosti možemo preformulisati ako koristimo identitet

$$\vec{r}_{AP} \times \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_{AP} \times \vec{v}\right) - \frac{d\vec{r}_{AP}}{dt} \times \vec{v}$$

Brzinu infinitezimalne mase možemo iskazati sa

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{v}_P^A, \quad \text{gdje je} \quad \vec{v}_P^A = \dot{\vec{r}}_{AP} = \vec{\omega}\times\vec{r}_{AP}$$

gdje je $\vec{r}_{AP} = \vec{r}_{AS} + \vec{r}_{SP}$ i $\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{AP}\right)\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{AP}\right) = 0$.

Sada je identitet:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{AP}\times\vec{a} &= \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_{AP}\times\vec{v}\right) - \left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{AP}\right)\times\left[\vec{v}_A + \left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{AP}\right)\right] = \\
&= \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_{AP}\times\vec{v}\right) - \left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{AP}\right)\times\vec{v}_A = \\
&= \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_{AP}\times\vec{v}\right) - \left[\vec{\omega}\times\left(\vec{r}_{AS}+\vec{r}_{SP}\right)\right]\times\vec{v}_A = \\
&= \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_{AP}\times\vec{v}\right) - \left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{AS}\right)\times\vec{v}_A - \left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{SP}\right)\times\vec{v}_A
\end{aligned}$$

Moment količine kretanja tijela spram tačke A odredimo tako da zbrojimo sve infinitezimalne momente

$$\vec{L}_A = \int d\vec{L}_A = \int \vec{r}_{AP}\times\vec{v}dm .$$

Kako je položaj težišta određen sa $\int \vec{r}_{SP}dm = 0$, a masa tijela je $m = \int dm$, imamo da je:

$$\begin{aligned}
\int \vec{r}_{AP}\times\vec{a}dm &= \int\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_{AP}\times\vec{v}\right) - \left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{AS}\right)\times\vec{v}_A - \left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{SP}\right)\times\vec{v}_A\right]dm = \\
&= \frac{d}{dt}\int\left(\vec{r}_{AP}\times\vec{v}\right)dm - \left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{AS}\right)\times\vec{v}_A\int dm - \left(\vec{\omega}\times\int\vec{r}_{SP}dm\right)\times\vec{v}_A = \\
&= \frac{d\vec{L}_A}{dt} - \left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{AS}\right)\times\vec{v}_A m
\end{aligned}$$

Kako je $\int \vec{r}_{AP}\times\vec{a}dm = \int \vec{r}_{AP}\times d\vec{F} = \vec{M}_A$, imamo: $\quad \dfrac{d\vec{L}_A}{dt} - \left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{AS}\right)\times\vec{v}_A m = \vec{M}_A$,

a ova jednačina iskazuje <u>zakon kinetičkog momenta krutog tijela u odnosu na pokretnu tačku A</u>. Kako se brzina težišta S može iskazati u odnosu na tačku A, $\vec{v}_S = \vec{v}_A + \vec{v}_S^A$, imamo da je $\vec{v}_S^A = \vec{\omega}\times\vec{r}_{AS} = \vec{v}_S - \vec{v}_A$, pa je gornja jednačina :

$$\begin{aligned}
&\frac{d\vec{L}_A}{dt} - \left(\vec{v}_S - \vec{v}_A\right)\times\vec{v}_A m = \vec{M}_A \\
&\frac{d\vec{L}_A}{dt} - \vec{v}_S\times\vec{v}_A m + \vec{v}_A\times\vec{v}_A m = \vec{M}_A \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\vec{L}_A}{dt} + \vec{v}_A\times\vec{K} = \vec{M}_A \\
&\frac{d\vec{L}_A}{dt} + \vec{v}_A\times\vec{v}_S m = \vec{M}_A
\end{aligned}$$

Posljednja jednačina takođe iskazuje <u>zakon kinetičkog momenta krutog tijela u odnosu na pokretnu tačku A</u>.

Jednostavniji oblik jednačine dobije se kada se tačka A smjesti u težište S ($\vec{r}_{AS} = 0$):

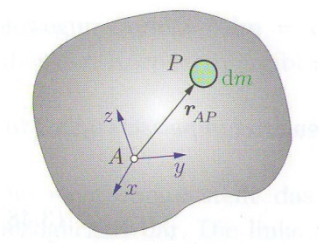
$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \vec{M}_S$$

ili ako je tačka A ujedno nepokretna tačka ($\vec{v}_A = 0$), pa imamo zakon kinetičkog momenta u odnosu na nepokretni pol: $\quad \dfrac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A$.

MOMENT KOLIČINE KRETANJA . TENZOR INERCIJE. OJLEROVE DINAMIČKE JEDNAČINE

Ako brzinu infinitezimalne mase iskažemo u odnosu na tačku A, $\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{v}_P^A = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}$, onda je moment količine kretanja tijela:

$$\vec{L}_A = \int d\vec{L}_A = \int \vec{r}_{AP} \times \vec{v} dm = \int \vec{r}_{AP} \times \left(\vec{v}_A + \vec{v}_P^A\right) dm = \int \vec{r}_{AP} dm \times \vec{v}_A + \int \vec{r}_{AP} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}\right) dm .$$



Ako kao referentnu tačku A izaberemo težište tijela S ili neku nepokretnu tačku, onda nestaje prvi član s desne strane jednakosti , pa je moment količine kretanja:

$$\vec{L}_A = \int \vec{r}_{AP} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}\right) dm .$$

U tom slučaju vektor kinetičkog momenta $\vec{L}_A$ može se eksplicitno odrediti ako pokretni koordinatni sistem (sistem vezan za tijelo) postavimo u referentnoj tački A i definišemo vektor položaja i vektor ugaone brzine sa:

$$\vec{r}_{AP} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} .$$

Ako ove vrijednosti uvrstimo u jednačinu za kinetički moment $\vec{L}_A$, dobije se:

$$\vec{L}_A = \begin{bmatrix} L_{Ax} \\ L_{Ay} \\ L_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z \\ J_{yx}\omega_x + J_y\omega_y + J_{yz}\omega_z \\ J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_z\omega_z \end{bmatrix}$$

gdje su :

$$J_x = \int \left(y^2 + z^2\right) dm$$

$$J_y = \int \left(z^2 + x^2\right) dm \qquad \text{- aksijalni momenti inercije tijela}$$

$$J_z = \int \left(x^2 + y^2\right) dm$$

$$J_{xy} = J_{yx} = -\int xydm$$

$$J_{yz} = J_{zy} = -\int yzdm \qquad \text{- proizvodi inercije (centrifugalni momenti inercije)}$$

$$J_{zx} = J_{xz} = -\int zxdm$$

Aksijalni momenti inercije i centrifugalni momenti inercije formiraju tenzor inercije tijela za tačku A kao ishodište koordinatnog sistema, koji je simetričan u u odnosu na dijagonalu:

$$\underline{\underline{J_A}} = \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_y & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \text{- tenzor inercije}$$

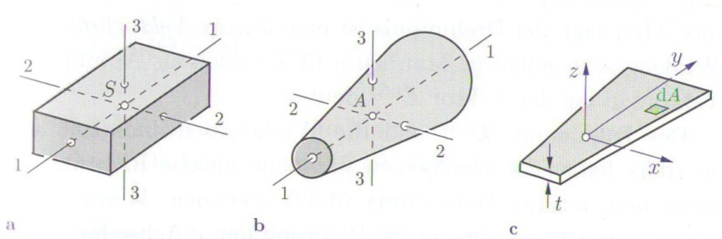
Inercijska svojstva krutog tijela u odnosu na tačku A jednoznačno su određena tenzorom inercije. Očigledno je da su aksijalni momenti inercije i centrifugalni momenti inercije tijela zavisni od izbora referentne tačke A i orjentacije osa x, y, z .

Bez dokaza navodimo da za svaku referentnu tačku postoji jedan poseban koordinatni sistem s osama $1, 2, 3$ za koje su centrifugalni momenti inercije jednaki nuli, taj koordinatni sistem naziva se glavni koordinatni sistem, a njegove ose su glavne ose inercije.

Aksijalni momenti inercije za glavne ose poprimaju ekstremne vrijednosti i nazivaju se glavni momenti inercije tijela. Za glavne ose inercije tenzor inercije poprima jednostavan oblik:

$$\underline{\underline{J_A}} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}$$

Homogena simetrična tijela imaju glavne ose inercije u osama simetrije. Na primjer, ose simetrije paralelopipeda prolaze kroz njegovo težište i one su glavne ose inercije. Rotacijski simetrična tijela imaju jednu glavnu osu inercije u osi simetrije, a svaka osa koja je okomita na osu simetrije (glavnu osu) je ujedno glavna osa inercije.



U posebnom slučaju tijela koje ima malu debljinu t (npr. tanka ploča), infinitezimalna masa može se iskazati kao $dm = \rho t dA$ (ρ je specifične gustina materijala). Kako je veličina z malena u odnosu na x i y, može se pri integraciji zanemariti $(z \approx 0)$. Za takvo tijelo aksijalni moment inercije u odnosu na osu x je

$$J_x = \rho t \int y^2 dA = \rho t I_x$$

gdje je I_x moment inercije površine u odnosu na osu x.

Za isto tijelo na sličan način dobijamo i ostale momente inercije:

$$J_y = \rho t I_y \qquad J_z = \rho t \left(J_x + J_y \right) = \rho t I_p$$

$$J_{xy} = \rho t I_{xy} \qquad J_{xz} = J_{yz} = 0$$

Za ovaj poseban slučaj tijela male debljine očigledna je direktna zavisnost između momenta inercije tijela i momenta inercije površine. Kako u pokazanom primjeru ravan xy predstavlja ravan simetrije, to je jedna glavna osa okomita na tu ravan, a preostale dvije glavne ose leže u toj ravni. Određivanje glavnih momenata inercije objašnjeno je u otpornosti materijala.

Ako je poznat tenzor inercije tijela i vektor ugaone brzine rotacije, moguće je matrično odrediti kinetički moment tijela tako da matricu tenzora inercije pomnožimo sa vektorom ugaone brzine:

$$\underline{L_A} = \underline{\underline{J_A}} \cdot \underline{\omega}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_y & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} J_x\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z \\ J_{yx}\omega_x + J_y\omega_y + J_{yz}\omega_z \\ J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_z\omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{Ax} \\ L_{Ay} \\ L_{Az} \end{bmatrix}$$

Ova jednačina predstavlja prostorno uopštenje kinetičkog momenta kako je ranije definisan. Kinetički moment je linearna vektorska funkcija ugaone brzine. Vektor kinetičkog momenta $\vec{L}_A$ i vektor ugaone brzine $\vec{\omega}$ u opštem slučaju nemaju iste pravce.

Ako se vektor kinetičkog momenta pri opštem kretanju tijela uvrsti u zakon kinetičkog momenta, mora se voditi računa da je zakon kinetičkog momenta iskazan u odnosu na nepokretni sistem referencije, tj. kinetički moment se derivira spram nepokretnog koordinatnog sistema, dok je kinetički moment izračunat za koordinatni sistem koji je vezan za tijelo i kreće se sa tijelom. Izvod kinetičkog momenta po vremenu biće

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d_r\vec{L}_A}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_A$$

gdje je $\frac{d_r\vec{L}_A}{dt}$ relativni izvod po vremenu, tj. derivacija izračunata za pokretni koordinatni sistem (objašnjeno u kinematici složenog kretanja tačke). Ovdje je $\vec{\omega}$ ugaona brzina kojom tijelo rotira oko pola A (sferno kretanje tijela oko pola A), odnosno ugaona brzina kojom koordinatni sistem vezan za tijelo rotira oko A.

Zakon o promjeni kinetičkog momenta pri opštem kretanju tijela napisan u matričnoj formi je:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d_r\vec{L}_A}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_A = \vec{M}_A$$

$$\frac{d_r\left(\underline{\underline{J_A}} \cdot \underline{\omega}\right)}{dt} + \underline{\omega} \times \left(\underline{\underline{J_A}} \cdot \underline{\omega}\right) = \underline{M_A}$$

$$\underline{\underline{J_A}} \cdot \frac{d_r\underline{\omega}}{dt} + \underline{\omega} \times \left(\underline{\underline{J_A}} \cdot \underline{\omega}\right) = \underline{M_A}$$

Kao referentna tačka A može se izabrati ili težište tijela ili neka prostorna nepokretna tačka.

Ako pretpostavimo da su poznate glavne ose $1, 2, 3$ inercije tijela, onda je tenzor inercije dijagonalan, a zakon kinetičkog momenta napisan preko projekcija (komponenata) u pravcima tih osa je:

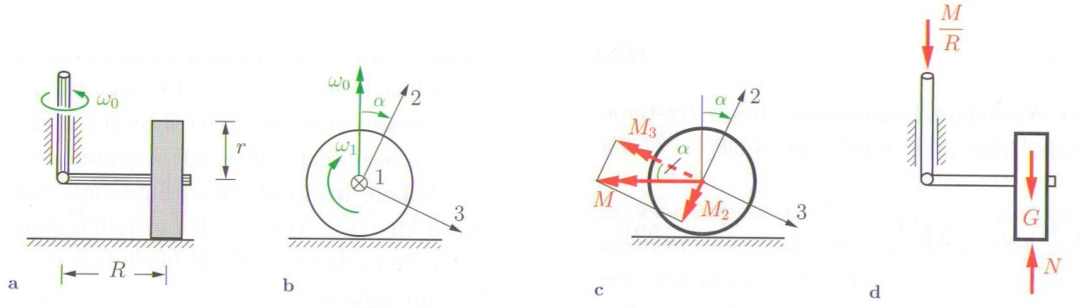
$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} - \left(J_2 - J_3\right)\omega_2\omega_3 = M_1$$

$$J_2 \frac{d\omega_2}{dt} - \left(J_3 - J_1\right)\omega_3\omega_1 = M_2$$

$$J_3 \frac{d\omega_3}{dt} - \left(J_1 - J_2\right)\omega_1\omega_2 = M_3$$

U gornjim jednačinama su M_1, M_2, M_3 projekcije momenta spoljašnjih sila na glavne ose inercije. Jednačine su poznate su kao <u>Ojlerove dinamičke jednačine</u>. Ove tri spregnute jednačine su nelinearne diferencijalne jednačine i predstavljaju diferencijalne jednačine sfernog kretanja tijela (zakona kinetičkog momenta tijela pri rotaciji oko pola A) u odnosu na koordinatni sistem koji je vezan za tijelo i čije ose se poklapaju sa glavnim osama inercije tijela.

Rješavanje Ojlerovih dinamičkih jednačina matematički može biti vrlo komplikovano ako ose koordinatnog sistema vezane za tijelo nisu unaprijed poznate (npr. kod kretanja žiroskopa). Jednostavniji primjer za analizu je kretanje točka mlina za mljevenje uglja koji se okreće konstantnom ugaonom brzinom oko vertikalne ose.



Primjer: U ovom slučaju je lako odrediti glavne ose inercije valjka za drobljenje uglja. Ose $1,2,3$ su glavne ose inercije valjka, a kako je tijelo rotacijski simetrično tijelo imamo da je $J_2 = J_3$. Valjak kotrlja po horizontalnoj podlozi bez proklizavanja, ω_1 je ugaona brzina sopstvene rotacije, a ω_0 je ugaona brzina precesionog kretanja valjka. Ako sa α označimo ugao sopstvene rotacije onda je $\omega_1 = \dot{\alpha}$. Iz poznate brzine tačke koja predstavlja centar valjka možemo napisati

$$\omega_1 r = \omega_0 R \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \dot{\alpha} = \frac{R}{r}\omega_0, \quad \dot{\omega}_1 = 0$$

$$\omega_2 = \omega_0 \cos\alpha, \quad \omega_3 = -\omega_0 \sin\alpha$$

$$\dot{\omega}_2 = -\omega_0 \dot{\alpha} \sin\alpha = \omega_1 \omega_3, \quad \dot{\omega}_3 = -\omega_0 \dot{\alpha} \cos\alpha = -\omega_1 \omega_2$$

Ako uvrstimo Ojlerove jednačine dobijemo

$$M_1 = 0$$

$$M_2 = \left(J_2 - J_3 + J_1\right)\omega_1\omega_3 = -J_1\omega_0^2 \frac{R}{r}\sin\alpha$$

$$M_3 = \left(-J_3 - J_1 + J_2\right)\omega_1\omega_2 = -J_1\omega_0^2 \frac{R}{r}\cos\alpha$$

Ovo znači da na valjak dejstvuje moment veličine $M = \sqrt{M_2^2 + M_3^2} = J_1\omega_0^2 \frac{R}{r}$. Ovaj moment ima horizontalni pravac i okomit je na osu valjka. Posljedica djelovanja ovog momenta jeste sila $\frac{M}{R}$, tako da se sila $\vec{N}$ između valjka i podloge (reakcija veze) sastoji se iz težine valjka $\vec{G}$ i dijela koji potiče od rotacije valjka i koji iznosi $\frac{M}{R}$, tako da je

$$N = G + \frac{M}{R} = G + \frac{J_1\omega_0^2}{r}$$

Može se zaključiti da se sila kojom valjak drobi ugalj može znatno povećati ako se poveća ugaona brzina ω_0

REAKCIJE U LEŽAJEVIMA KOD KRETANJA TIJELA U RAVNI

Zadržimo se kod zakona kinetičkog momenta pri opštem kretanju tijela napisanog u matričnoj formi , koji važi za slučaj opšteg kretanja krutog tijela ili pri obrtanju tijela oko nepokretne tačke:

$$\underline{\underline{J}}_A \cdot \frac{d_r \underline{\omega}}{dt} + \underline{\omega} \times \left(\underline{\underline{J}}_A \cdot \underline{\omega}\right) = \underline{M}_A$$

Ako se ograničimo na kretanje tijela u ravni xy, onda je vektor ugaone brzine usmjeren samo po pravcu ose z, $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$, tako da je:

$$\omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = \omega.$$

Pri ovom uslovu i za $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = \ddot{\varphi}$, zakon kinetičkog momenta projektovan na ose x, y, z biće

$$J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2 = M_x$$
$$J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2 = M_y$$
$$J_z\varepsilon = M_z$$

Prve dvije jednačine ukazuju da momenti M_x i M_y, okomiti na osu z, moraju djelovati ako su centrifugalni momenti inercije I_{xz} i J_{yz} različiti od nule. Ovi momenti predstavljaju momente spoljnih sila koje dejstvuju na tijelo. Prema zakonu akcije i reakcije, tijelo momentima iste veličine samo suprotnog smjera dejstvuje na ležajeve.

Primjena ovih jednačina važna je kod obrtanja krutog tijela oko nepokretne ose. Momenti koji dejstvuju u ležajevima tehničkih sistema (rotor, točak) su posljedica djelovanja sila inercije i najčešće su nepoželjni. Ukoliko postoje ovi reaktivni momenti koji opterećuju ležajeve, kažemo da tijelo nije dinamički uravnoteženo (balansirano).

Moment spoljašnjih sila okomit na osu rotacije biće jednak nuli samo ako su centrifugalni momenti inercije za obrtnu osu jednaki nuli, tj. $I_{xz} = J_{yz} = 0$. Ovaj uslov je ispunjen kada je osa rotacije jedna od glavnih osa inercije tijela. Za tijelo kažemo da je statički uravnoteženo kada težište tijela leži na osi rotacije.

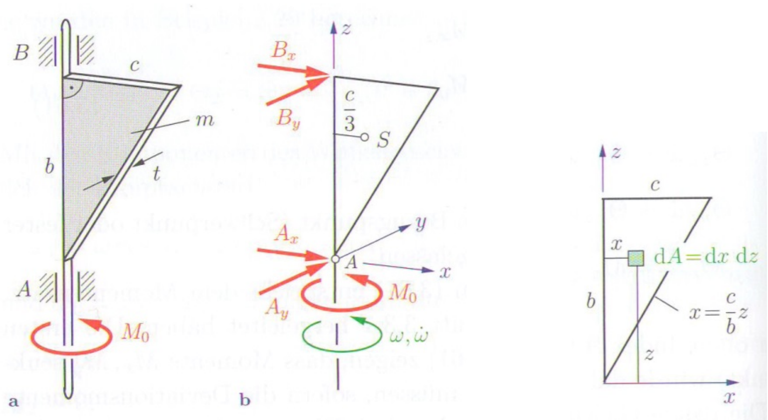
Da bi tijelo bilo dinamički uravnoteženo moraju biti zadovoljeni uslovi da:

a) težište tijela leži na obrtnoj osi
b) obrtna osa je glavna osa inercije

Ako težište tijela leži na glavnoj osi, onda tu osu nazivamo glavna centralna osa inercije. Prema tome, uslov dinamičke uravnoteženosti tijela koje rotira oko nepokretne ose može se iskazati na sledeći način: Dinamičke reakcije u ležištima tijela biće jednake nuli pod uslovom da je obrtna osa ujedno glavna centralna osa inercije tijela.

Dinamičko uravnotežavanje tijela koje se obrće oko nepokretne ose ima veliki značaj u tehnici, jer se pri maloj neuravnoteženosti dijelova mašina koji se obrću velikim ugaonim brzinama stvaraju dinamički pritisci velikih intenziteta, što može dovesti do trajnih deformacija ležišta a i samog dijela mašine. Zbog toga se nastoji da dijelovi mašina koji rotiraju oko nepokretnih osa imaju simetričan oblik u odnosu na osu rotacije. Međutim, ukoliko to nije konstruktivno izvodljivo, to se u opštem slučaju otklanjanje dinamičke neuravnoteženosti može postići dodavanjem ili odstranjivanjem dvije koncentrisane mase u proizvoljno izabranim ravnima koje su okomite na obrtnu osu

Primjer 1.: Tanka homogena trougaona ploča uležištena je ležajevima A i B. Poznat je pogonski moment M_0 pod čijim djelovanjem ploča rotira. Napisati jednačine kretanja i odrediti reakcije u ležajevima A i B.



Za opisivanje kretanja dovoljno je primijeniti zakon kinetičkog momenta pri rotaciji tijela oko ose. Za određivanje reakcija u ležajevima potrebno je napisati zakon kinetičkog momenta za ose okomite na osu rotacije i zakon količine kretanja za težište ploče.

Kada oslobodimo ploču veza, umjesto veza (ležajeva) dodajemo reakcije veza. Koordinatni sistem xyz ima ishodište u ležaju A i taj koordinatni sistem rotira zajedno sa pločom. Težište ploče S pri rotaciji ploče opisuje kružnu putanju, a ubrzanje težišta ima centripetalnu (normalnu) i tangencijalnu komponentu.

Centripetalno (normalno) ubrzanje težišta je $a_{Sx} = -x_S\omega^2 = -\frac{c}{3}\omega^2$, a tangencijalno ubrzanje je $a_{Sy} = x_S\varepsilon = \frac{c}{3}\varepsilon$. Zakon količine kretanja primjenjen za težište ploče je:

$$ma_{Sx} = \sum F_x = A_x + B_x \qquad\qquad -\frac{mc\omega^2}{3} = A_x + B_x$$
$$\Rightarrow$$
$$ma_{Sy} = \sum F_y = A_y + B_y \qquad\qquad \frac{mc\varepsilon}{3} = A_y + B_y$$

Za primjenu zakona kinetičkog momenta, potrebni su nam masa i momenti inercije ploče.

$$dm = \rho t dA = \rho t dx dy \quad \Rightarrow \quad m = \int_A \rho t dA = \rho t \cdot \frac{1}{2} cb$$

$$J_z = \rho t \int x^2 dA = \rho t \iint_A x^2 dx dy = \rho t \int_0^b \left\{ \int_0^{\frac{c}{b}z} x^2 dx \right\} dz = \frac{mc^2}{6}$$

$$J_{xz} = -\rho t \int xz dA = -\rho t \iint_A xz dx dz = -\rho t \int_0^b \left\{ \int_0^{\frac{c}{b}z} x dx \right\} dz = -\frac{mcb}{4}$$

$$J_{yz} = 0$$

Sad primijenimo zakon kinetičkog momenta :

$$\begin{aligned} J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2 &= M_x \\ J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2 &= M_y \\ J_z\varepsilon &= M_z \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} J_{xz}\varepsilon &= M_x \\ J_{xz}\omega^2 &= M_y \\ J_z\varepsilon &= M_z \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -\frac{mcb}{4}\varepsilon &= -b \cdot B_y \\ -\frac{mcb}{4}\omega^2 &= b \cdot B_x \\ \frac{mc^2}{6}\varepsilon &= M_0 \end{aligned}$$

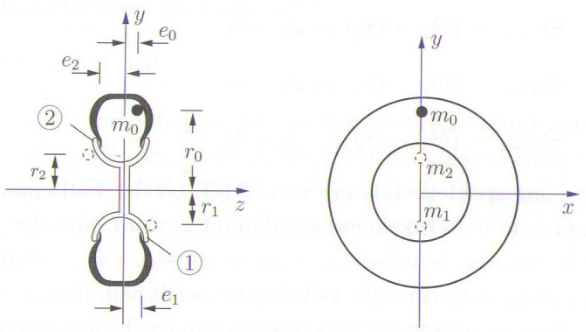
Ako je u početnom trenutku $\omega_0 = \omega(t_0) = 0$, onda se iz posljednje jednačine (to je diferencijalna jednačina obrtanja ploče oko nepokretne ose) integraljenjem dobije ugaona brzina $\omega = \omega(t)$:

$$\frac{mc^2}{6}\varepsilon = M_0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{6M_0}{mc^2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{6M_0}{mc^2} t \left[s^{-1} \right].$$

Reakcije u ležajevima dobije se iz sistema jednačina:

$$\begin{aligned} -\frac{mc\omega^2}{3} &= A_x + B_x \qquad -\frac{mcb}{4}\varepsilon = -b \cdot B_y \\ \frac{mc\varepsilon}{3} &= A_y + B_y \qquad -\frac{mcb}{4}\omega^2 = b \cdot B_x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A_x &= -\frac{\omega^2 mc}{12},\ A_y = \frac{M_0}{2c}, \\ B_x &= -\frac{\omega^2 mc}{4},\ B_y = \frac{3M_0}{2c} \end{aligned}$$

Primjer 2: Točak koji rotira oko ose z ima neuravnoteženu masu m_0 na radijusu r_0. Kolike mase treba dodati na mjestima 1 i 2 da bi uravnotežili točak.



Točak će biti uravnotežen ako težište sistema leži na obrtnoj osi i ako su centrifugalni momenti inercije jednaki nuli.

Prvi uslov, težište sistema na obrtnoj osi, znači da je :

$$m_0 r_0 + m_2 r_2 = m_1 r_1 .$$

Drugi uslov, centrifugalni moment sistema jednak nuli, znači da je:

$$J_{zy} = -m_0 r_0 e_0 + m_1 r_1 e_1 + m_2 r_2 e_2 = 0 .$$

Rješavanjem ovog sistema jednačina dobijemo kolike mase m_1 i m_2 trebamo dodati na definisana mjesta da bi sistem bio dinamički uravnotežen:

$$m_1 = m_0 \frac{r_0 \left(e_0 + e_2\right)}{r_1 \left(e_1 + e_2\right)}, \quad m_2 = m_0 \frac{r_0 \left(e_0 - e_1\right)}{r_2 \left(e_1 + e_2\right)} .$$

POSEBNA POGLAVLJA DINAMIKE

- **Teorija udara**
- **Oscilacije materijalne tačke**

UDAR (SUDAR)

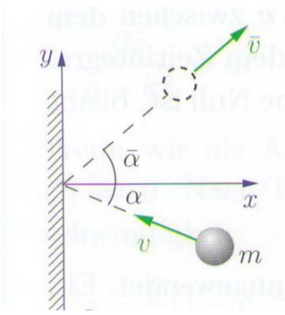
Udar predstavlja kretanje materijalne tačke (sistema materijalnih tačaka) koje se dešava pod dejstvom udarnih sila, pri čemu je interval vremena u kojem dejstvuju sile beskonačno mali. Pod dejstvom udarnih sila nastupaju konačne promjene brzine materijalne tačke, dok je promjena položaja tačke zanemarljiva.

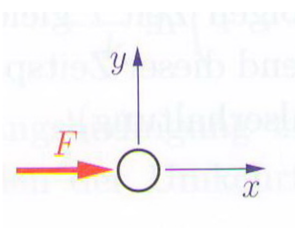
Udarne sile, $\vec{F}^{ud}$, su trenutne sile velikog intenziteta koje dejstvuju unutar beskonačno malog intervala vremena. Njihov intenzitet se tokom udara mijenja od nule do veoma velike vrijednosti i ponovo pada do nule. Zbog toga se u teoriji udara kao mjera mehaničkog uzajamnog dejstva tijela koja se sudaraju uzima udarni impuls ili impuls udarne sile, $\vec{I}^{ud} = \int_0^{t_s} \vec{F}^{ud} dt$, gdje je t_s vrijeme udara.

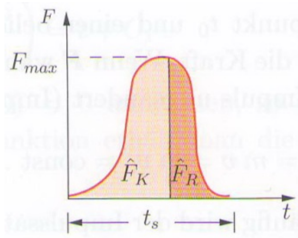
Impuls obične sile $\vec{F}$ za beskonačno mali interval udara t_s je mala veličina reda t_s, tako da se može zanemariti u odnosu na udarni impuls.
Osnovni zakon u teoriji udara koji opisuje kretanja tačke je zakon o promjeni količine kretanja tačke

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{I}^{ud} .$$

KOSI UDAR KUGLE U NEPOKRETNU PREGRADU







Posmatrajmo materijalnu tačku (kuglu) koja udara pod nekim uglom u nepokretnu pregradu. Intenzitet brzine tačke prije udara je v a nakon udara intenzitet brzine je $\bar{v}$. Za usvojeni koordinatni sistem, možemo projektovati jednačinu zakona količine kretanja na pravce koordinatnih osa i dobiti dvije skalarne jednačine:

$$x) \rightarrow \quad m\bar{v}_x - mv_x = I_x^{ud}$$
$$y) \uparrow \quad m\bar{v}_y - mv_y = I_y^{ud}$$

Sa slike se vidi da su projekcije

$$v_x = -v\cos\alpha, \quad v_y = v\sin\alpha$$
$$\bar{v}_x = \bar{v}\cos\bar{\alpha}, \quad \bar{v}_y = \bar{v}\sin\bar{\alpha}$$

Pretpostavimo da je zid gladak, tako da na tačku dejstvuje sila samo u pravcu normale, tj. u pravcu x ose, dok je $I_y^{ud} = 0$, tako da je $\bar{v}_y = v_y$. Ovo znači da se komponenta brzine tačke u pravcu y ose ne mijenja za ovaj tip udara.

Da bi odredili promjenu brzine u pravcu x ose, rastavimo udar u dva vremenska intervala:

- Kompresijski period u kojem nastaje deformacija tijela,
- Restitucijiski period u kojem se tijelo potpuno ili djelimično vraća u prvobitni oblik.

Sila koja dejstvuje na tijelo tokom udaru mijenja svoj intenzitet i to tako da u kompresijskom periodu raste od nule do maksimalne vrijednosti $F_{\max}$, a u restitucijskom periodu ova sila opada do nule. Ako primijenimo zakon količine kretanja za ova dva vremenska perioda, imamo:

- Kompresijski period: $m \cdot 0 - mv_x = I_K$
- Restitucijski period: $m\bar{v}_x - m \cdot 0 = I_R$

Ove jednačine sadrže nepoznatu brzinu tačke nakon udara u pravcu x ose, $\bar{v}_x$, i nepoznate impulse kompresijskog i restitucijskog perioda, I_K i I_R. Da bi odredili ove tri nepoznate veličine, potrebno je pridodati još jednu jednačinu, što ćemo učiniti primjenom hipoteze o deformisanju u periodu restitucije.

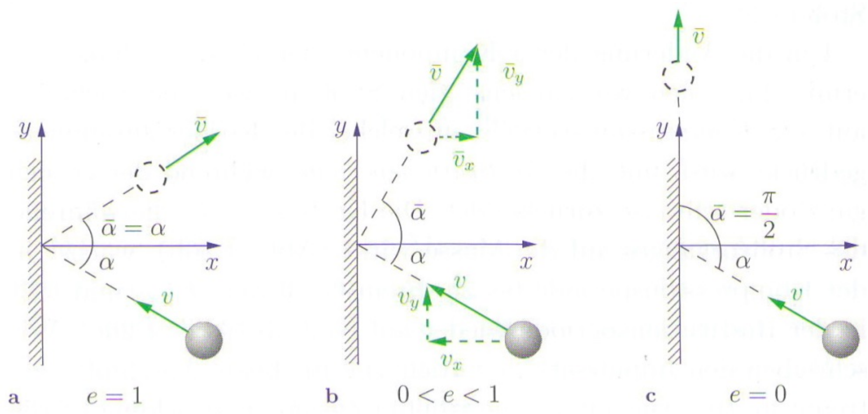
Razmotrimo tri različita slučaja:

A) **Idealno elastični udar**: u ovom slučaju uzimamo da su deformacije i sile u periodu kompresije i restitucije potpuno jednake.

Tada tijelo nakon udara poprima isti oblik kao prije udara (tj. poprima prvobitni oblik), a impulsi su jednaki, $I_R = I_K$, pa je

$m\bar{v}_x = -mv_x \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_x = -v_x$, tj. $\bar{v} = v, \bar{\alpha} = \alpha$.

Kod idealno-elastičnog udara kugle o nepokretnu pregradu brzine prije i nakon udara su jednake, a upadni ugao jednak odbojnom uglu (isto vrijedi u optici pod pojmom zakona refleksije).



Slika: a) idealno elastičan udar, b) idealno plastičan udar, c) djelimično elastičan udar

B) **Idealno plastični udar**: u ovom slučaju ukupna deformacija koju tijelo doživi u kompresijskom periodu ostaje u potpunosti.

Impuls u restitucijskom periodu jednak je nuli, $I_R = 0$, pa je

$$\bar{v}_x = \bar{v}\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\alpha} = \frac{\pi}{2}.$$

Ovo znači da tačka kliže po glatkom zidu sa brzinom $\bar{v} = \bar{v}_y = v_y = v\sin\alpha$.

C) **Djelimično elastični udar**: realno tijelo nakon udara samo djelimično poprimi prvobitni oblik, što se izražava na način da je impuls u periodu restitucije određen *koeficijentom udara (restitucije)*, $I_R = e \cdot I_K$.

Koeficijent (faktor) udara, e, ima graničnu vrijednost $e = 1$ kod idealno elastičnog udara, odnosno $e = 0$ kod idealno plastičnog udara.

U slučaju djelimično elastičnog udara koeficijent udara ima vrijednost između ovih graničnih vrijednosti, $0 \le e \le 1$.

Dakle dobijamo:

$$m\bar{v}_x = e(-mv_x) \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_x = -ev_x,$$

a odbojni ugao možemo definisati sa

$$tg\bar{\alpha} = \frac{\bar{v}_y}{\bar{v}_x} = \frac{v_y}{-ev_x} = \frac{1}{e}tg\alpha .$$

Kako je koeficijent udara $e < 1$, to je $tg\bar{\alpha} > tg\alpha$, odnosno $\bar{\alpha} > \alpha$, tj. odbojni ugao je veći od upadnog ugla.

Koeficijent udara e možemo definisati kao omjer komponenti brzine okomitih na pregradu koje tijelo ima poslije udara i prije udara:

$$e = -\frac{\bar{v}_x}{v_x} = \frac{|\bar{v}_x|}{|v_x|}$$

U ovom izrazu v_x je negativno, a e ima pozitivnu vrijednost.

Koeficijent udara ili koeficijent restitucije može se odrediti eksperimentalno ako se kugla pusti sa visine h_1 da padne na nepokretnu horizontalnu podlogu. Brzina koju kugla postigne neposredno prije udara je $v = \sqrt{2gh_1}$. Nakon udara kugla se kreće od podloge brzinom $\bar{v}$, a dostignuće visinu $h_2 = \frac{\bar{v}^2}{2g}$, odakle je $\bar{v} = \sqrt{2gh_2}$.

Ako je koeficijent restitucije $e = -\frac{\bar{v}_x}{v_x}$, onda je $e = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} \quad \Rightarrow \quad e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$, pa se koeficijent udara može dobiti na osnovu visine kugle prije i nakon udara. Kod idealno elastičnog udara je $h_2 = h_1$ pa je $e = 1$, dok je kod idealno plastičnog udara je $h_2 = 0$ pa je $e = 0$.

Primjer: Hokejaški pak udari brzinom v o glatku ogradu pod uglom $\alpha = 45^0$ i odbije se pod uglom $\beta = 30^0$. Kolika je brzina nakon udara i koliki je koeficijent udara?

Budući da je ograda glatka, količina kretanja u smjeru ograde ostaje nepromijenjena:

$$\rightarrow: \quad m\bar{v}\cos\beta = mv\cos\alpha$$

$$\bar{v} = v\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = v\sqrt{\frac{2}{3}}$$

U smjeru okomitom na ogradu događa se udar sa koeficijentom restitucije e,

$$v_x = -v\sin\alpha, \quad \bar{v}_x = \bar{v}\sin\beta$$

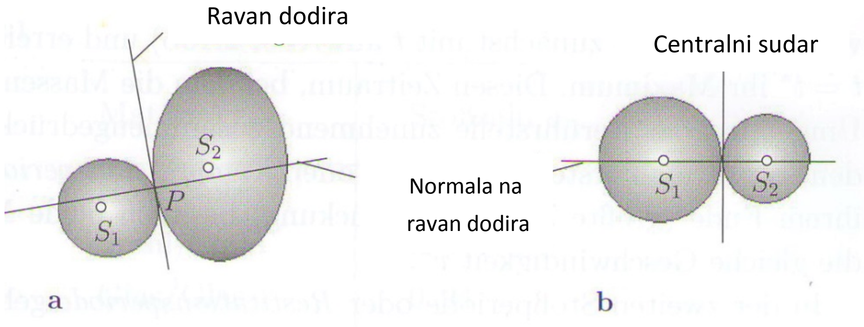
$$e = -\frac{\bar{v}_x}{v_x} = \frac{\bar{v}}{v}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{v\sqrt{\frac{2}{3}}}{v}\cdot\frac{\sin 30^0}{\sin 45^0} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

CENTRALNI SUDAR

Za razliku od udara tijela (tačke) o nepokretnu pregradu, sudar predstavlja međusobni dodir dva tijela. Sudar uzrokuje promjenu količina kretanja tijela unutar kratkog vremenskog intervala tokom kojeg sile koje dejstvuju na tijela imaju velike intenzitete. Posljedica ovog jesu deformacije u neposrednoj zoni kontakta tijela koje zavise od vremena i zbog čega je tačno razmatranje problema sudara komplikovano.

Međutim, moguće je opisati sudar uz pomoć idealizacije promjena stanja kretanja, zbog čega se uvode sljedeće pretpostavke:

a) Vrijeme trajanja sudara t_s je tako malo da su promjene položaja tijela u tom vremenu zanemarljive
b) Sile između tijela u tački dodira su toliko velike da se ostale, obične sile mogu zanemariti tokom vremena sudara
c) Deformacije tijela su tako malene da su i one zanemarljive, tj. tijela smatramo krutim.



Slika: ravan dodira tijela i normala sudara

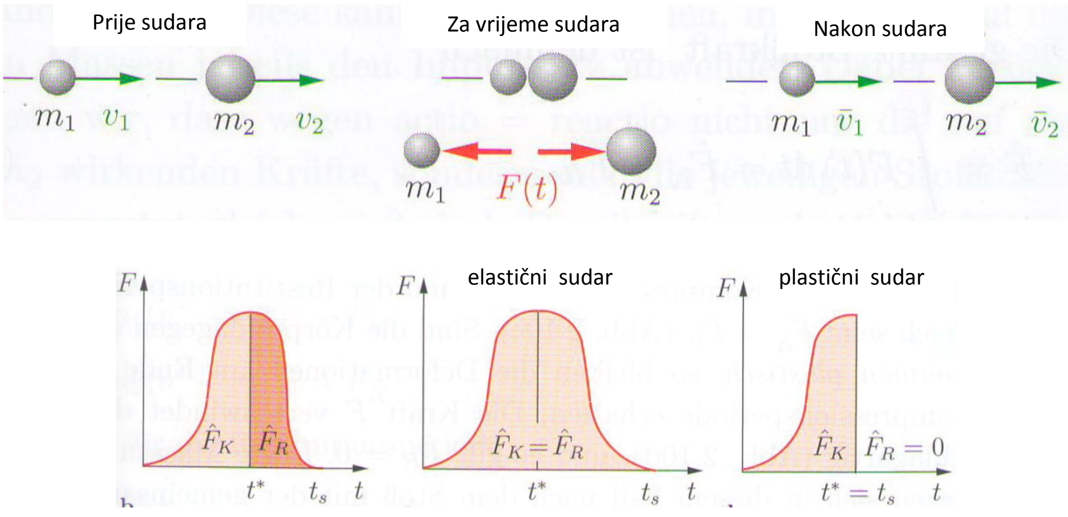
Na slici su prikazana dva tijela u sudaru. Tačka dodira P leži u ravni sudara. Okomica na ravan sudara povučena kroz tačku P određuje normalu ili okomicu sudara.

Ako brzine središta masa tijela neposredno prije sudara imaju pravac zajedničke normale, onda se sudar naziva upravni sudar. Ako ovo nije ispunjeno, onda imamo kosi sudar.

Ako zajednička normala u tački dodira P prolazi kroz središta masa ovih tijela, onda se sudar naziva centralni sudar, a ako to nije ispunjeno onda je sudar ekscentrični.

Ako brzine središta masa tijela neposredno prije sudara imaju pravac zajedničke normale i ako zajednička normala u tački dodira P prolazi kroz središta masa ovih tijela, onda se sudar naziva upravni centralni sudar.

Posmatrajmo upravni centralni sudar dvije kugle masa m_1 i m_2, koje se kraću brzinama v_1 i v_2 ($v_1 > v_2$).



Slika: promjena sile kojom tijela međusobno djeluju

U trenutku $t = 0$ nastupa prvi dodir. Sila $F(t)$ kojom tijela međusobno djeluju jedno na drugo prvo raste i u trenutku t^* dostigne maksimum. To razdoblje u kojem se mase u neposrednoj blizini tačke dodira međusobno pritiskaju nazivamo prvi period sudara ili period kompresije. Na kraju tog perioda (najveće međusobno pritiskanje masa) obje mase imaju jednaku brzinu. U drugom periodu sudara, periodu restitucije, deformacije tijela se vraćaju djelimično ili potpuno, a sila međusobnog djelovanja opada na nulu.

Po isteku vremena t_s sudar je završen i nema sile dodira a obje mase se nastavljaju kretati nezavisno jedna od druge brzinama $\overline{v}_1$ i $\overline{v}_2$.

Površine ispod grafikona $F(t)$ predstavljaju impulse perioda kompresije i restitucije:

$$I_K = \int_0^{t^*} F(t)dt \qquad I_R = \int_{t^*}^{t_s} F(t)dt$$

Ukupan impuls sudara je: $$I = \int_0^{t_s} F(t)dt = I_K + I_R.$$

Ako su tijela koja se sudaraju potpuno elastična onda su impulsi u periodu kompresije i restitucije jednaki, $I_K = I_R$.

Ako su tijela potpuno plastična onda na kraju kompresijskog razdoblja deformacije ostaju trajno, a sila na mjestu dodira nestaje, pa je impuls restitucije $I_R = 0$. U tom slučaju nakon sudara obje mase se kreću zajedničkom brzinom v^*, tj. nastavljaju kretanje kao da su jedno tijelo.

U opštem slučaju, kada su tijela djelimično elastična, impuls u restitucijskom periodu je $I_R = e \cdot I_K$, $0 \le e \le 1$, gje je *e*-koeficijent sudara (restitucije). Vrijednosti koeficijent sudara za pojedine vrste materijala su prikazane u tabeli.

Materijal	Koeficijent sudara
Drvo -drvo	≈0,5
Čelik-čelik	0,6....0,8
Staklo-staklo	0,94
Pluto-pluto	0,5....0,6

Koeficijent sudara zavisi i od kvaliteta obrade površina oba tijela a u nekom smislu i od brzina tijela u sudaru, tako da se može odrediti samo mjerenjem. Pri vrijednosti $e = 1$ sudar je idealno elastičan, za $e = 0$ sudar je idealno plastičan, a za $0 \le e \le 1$ sudar djelimično elastičan.

Usljed sudara mase m_1 i m_2 doživljavaju promjenu brzina, koje se mogu izračunati ako se primjeni zakon količine kretanja na obe mase. Pri tome se mora paziti da za sile koje dejstvuju na ove mase važi zakon akcija=reakcija i da su impulsi suprotno usmjereni a jednaki po intenzitetu.

Za kompresijski period vrijede jednačine:

$$m_1\left(v^* - v_1\right) = -I_K \qquad m_2\left(v^* - v_2\right) = I_K$$

A za restitucijski period vrijede jednačine:

$$m_1\left(\overline{v}_1 - v^*\right) = -I_K \qquad m_2\left(\overline{v}_2 - v^*\right) = I_K$$

Uz ove jednačine pridodajemo i $I_R = e \cdot I_K$, tako da imamo pet jednačina sa pet nepoznatih veličina, $\overline{v}_1, \overline{v}_2, v^*, I_K, I_R$.

Rješavanjem jednačina dobiju se brzine nakon sudara:

$$\overline{v}_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - e m_2\left(v_1 - v_2\right)}{m_1 + m_2} \qquad \overline{v}_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + e m_2\left(v_1 - v_2\right)}{m_1 + m_2}$$

Ako je sudar idealno plastičan, $e = 0$, brzine su:

$$\overline{v}_1 = \overline{v}_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

tj. brzina tijela je jednaka brzini v^* na kraju perioda kompresije.

Ako je sudar idealno elastičan, $e=1$, brzine su

$$\overline{v}_1=\frac{2m_2v_2+v_1\left(m_2-m_1\right)}{m_1+m_2}\qquad \overline{v}_2=\frac{2m_1v_1+v_2\left(m_2-m_1\right)}{m_1+m_2}$$

Ako su obe mase jednake, $m_1=m_2=m$, onda su brzine $\overline{v}_1=v_2$ i $\overline{v}_2=v_1$, tj. mase su izmijenile brzine. Npr. ako je masa m_2 bila u mirovanju prije sudara, ona će nakon sudara imati brzinu koju je masa m_1 imala prije sudara, dok će masa m_1 poslije sudara ostati u mirovanju.

Nezavisno o vrsti sudara, količina kretanja sistema ostaje sačuvana (održanje količine kretanja materijalnog sistema):

$$m_1\overline{v}_1+m_2\overline{v}_2=\frac{1}{m_1+m_2}\left[m_1^2v_1+m_1m_2v_2-em_1m_2\left(v_1-v_2\right)+m_1m_2v_1+m_2^2v_2+em_1m_2\left(v_1-v_2\right)\right]=m_1v_1+m_2v_2$$

Ako odredimo razliku brzina nakon sudara dobijemo:

$$\overline{v}_2-\overline{v}_1=\frac{e\left(v_1-v_2\right)\left(m_1+m_2\right)}{m_1+m_2}=e\left(v_1-v_2\right)$$

U ovom izrazu v_1-v_2 predstavlja razliku brzina masa koje se međusobno približavaju, tj. razliku brzina koje mase imaju prije sudara, dok $\overline{v}_2-\overline{v}_1$ predstavlja razliku brzina masa nakon sudara, tj. relativnu brzinu udaljavanja masa nakon sudara.

Iz posljednjeg izraza proizilazi da je koeficijent sudara jednak odnosu relativnih brzina masa nakon i prije sudara, tj. relativne brzine razdvajanja i relativne brzine približavanja masa:

$$e=-\frac{\overline{v}_1-\overline{v}_2}{v_1-v_2}.$$

Gubitak mehaničke energije pri sudaru (zbog plastičnog deformisanja i zagrijavanja) dobije se iz razlike kinetičkih energija prije i poslije sudara:

$$\Delta E_k=E_{k0}-E_k=\left(\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}\right)-\left(\frac{m_1\overline{v}_1^2}{2}+\frac{m_2\overline{v}_2^2}{2}\right)=\frac{1-e^2}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(v_1-v_2\right)^2$$

Za idealno elastični sudar ($e=1$)nema gubitka kinetičke energije, dok je najveći gubitak kinetičke energije kod idealno plastičnog sudara ($e=0$).

Kao primjeri sudara masa u tehnici mogu se navesti procesi kovanja, probijanja, zabijanje klina i dr.

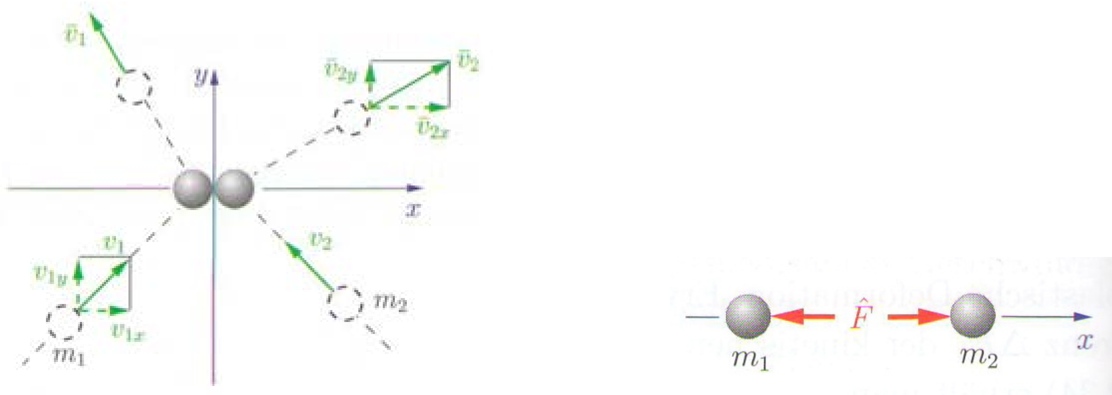
Kod kovanja je masa m_2 prije sudara u mirovanju, tj. $v_2=0$. Ako definišemo koeficijent iskorišćenja energije η (stepen korisnog djelovanja) kao odnos gubitka energije ΔE_k i unesene energije $E_{k0}=\frac{m_1v_1^2}{2}$, onda je

$$\eta=\frac{\Delta E_k}{E_{k0}}=\frac{E_{k0}-E_k}{E_{k0}}=\left(1-e^2\right)\frac{m_2}{m_1+m_2}=\left(1-e^2\right)\frac{1}{1+\frac{m_1}{m_2}}.$$

Kod kovanja je, zbog plastičnog deformisanja tijela, potrebno da stepen iskorišćenja energije bude što veći. Za idealno plastičan sudar, $e=0$, očigledno je da se to postiže što manjim odnosom $\frac{m_1}{m_2}$, tj. što većom masom nakovnja m_2 u odnosu na masu čekića m_1. Cjelokupna kinetička energija sistema troši se na deformaciju tijela koje se kuje, a tijela nakon sudara ostaju nepokretna ($E_k=0$).

Kod probijanja probojac treba biti male mase m_2 u odnosu na masu čekića m_1 , pa u tom slučaju odnos $\frac{m_1}{m_2}$ treba biti što veći, a cjelokupna kinetička energija sistema troši se na pomjeranje tijela nakon sudara. To znači da u ovom slučaju nema gubitka kinetičke energije, $E_{k0} = E_k$,tj. sistem se poslije sudara kreće istom kinetičkom energijom koju je imao na početku sudara, a tijela se prilikom sudara ne deformišu. U ovom slučaju koeficijent iskorišćenja energije je odnos kinetičke energije sistema nakon sudara i kinetičke energije sistema prije sudara, $\eta = \frac{E_k}{E_{k0}}$.

Kosi centralni sudar



Slika: kosi centralni udar

Razmotrimo kosi centralni sudar, a zbog jednostavnosti se ograničimo na sudar dvije mase u jednoj ravni.

Pretpostavimo da su površine masa idealno glatke što znači da udarne sile i njihovi impulsi imaju pravac normale sudara. Ako x osu orijentišemo u pravcu normale, a y osu orijentišemo u ravni dodira, onda je zakon količine kretanja za y osu:

$$m_1\bar{v}_{1y} - m_1 v_{1y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_{1y} = v_{1y}$$

$$m_2\bar{v}_{2y} - m_2 v_{2y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_{2y} = v_{2y}$$

Komponente brzine okomite na normalu sudara ostaju kod glatkih površina masa nepromijenjene.

U smjeru normale sudara, tj. x ose, jednačine su kao i kod upravnog sudara. Pri tome treba uvrstiti komponente brzina u smjeru normale sudara, pa su jednačine

$$m_1\bar{v}_{1x} - m_1 v_{1x} = -I$$

$$m_2\bar{v}_{2x} - m_2 v_{2x} = I$$

Na desnoj strani jednačina su impulsi sila sudara za cijelo razdoblje sudara t_s.

Uslov sudara određuje dodatnu jednačinu, koeficijent sudara:

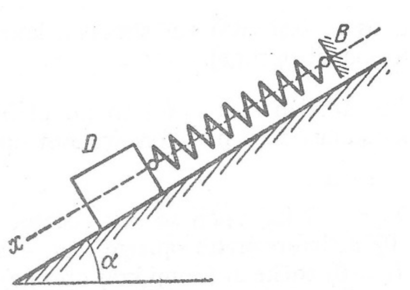
$$e = -\frac{\bar{v}_{1x} - \bar{v}_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}}$$

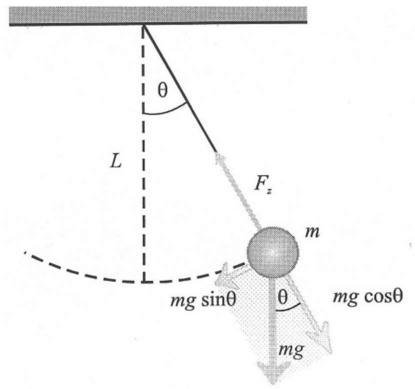
Iz ove tri jednačine određuju se nepoznate veličine $\bar{v}_{1x}$, $\bar{v}_{2x}$ i I .

OSCILACIJE MATERIJALNE TAČKE

OSNOVNI POJMOVI O OSCILATORNOM KRETANJU

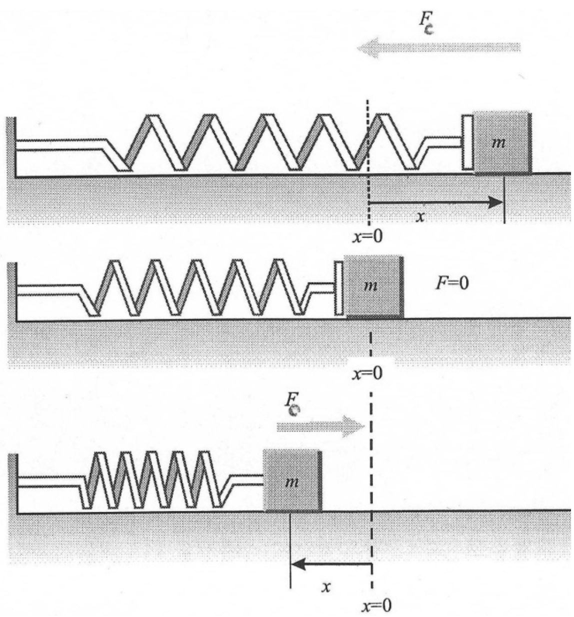
Oscilatorno kretanje je periodično kretanje tijela oko nekog ravnotežnog položaja. Tijelo se kreće po istoj putanji ali neprekidno prolazi, iz dva različita smjera, kroz jednu tačku koja predstavlja položaj ravnotežne. Osim termina **oscilacija**, u tehničkoj praksi koristi se i termin **vibracija**. Vibracija u opštem smislu predstavlja oscilatorno kretanje mehaničkog sistema pri čemu su pomjeranja tačaka sistema mala u poređenju sa dimenzijama samog sistema. Primjeri oscilatornog kretanja su: ljuljanje na ljuljaški, kretanje klatna sata, vibriranje žica žičanih muzičkih instrumenata, itd. Oscilacije tijela mogu da se vrše po pravoj liniji (npr. teg okačen o oprugu) ili po kružnom luku (kuglica okačena o tanak konac).





Harmonijske oscilacije vrše se pod djelovanjem harmonijske sile. Harmonijska sila je sila čiji je intenzitet proporcionalan **elongaciji** (to je rastojanju tijela od ravnotežnog položaja) i usmjerena je uvijek ka ravnotežnom položaju, tj. smjer djelovanja sile je takav da uvijek nastoji tijelo vratiti u ravnotežni položaj. Razmotrimo mehanički sistem koji se sastoji od tijela mase m vezanog za kraj opruge krutosti c, koje može da se kreće bez trenja po horizontali.

Kada opruga nije ni istegnuta ni sabijena, telo je u položaju odredjenim sa $x=0$, koji se naziva **položajem ravnoteže** sistema. Iz iskustva je poznato da kada se tijelo izvede iz ovog položaja, počinje da osciluje oko njega. Ukoliko otklon tijela iz ravnotežnog položaja označimo sa x (elongacija), onda sila koja djeluje na tijelo, $\vec{F}_c$, teži da ga vrati u ravnotežni položaj. Projekcija ove sile na pravac kretanja tijela je $F_c = -cx$.



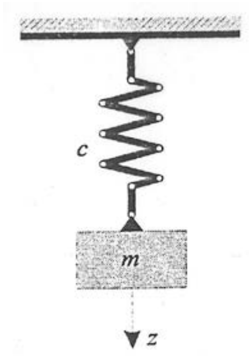
Ova sila se zove **sila elastičnosti opruge, sila uspostavljanja** ili **restituciona sila**, jer je uvijek usmjerena ka ravnotežnom položaju, odnosno uvijek je suprotnog smjera od smjera pomijeranja tijela. Pod djelovanjem ove sile tijelo vrši tzv. **slobodne oscilacije**.

Osim slobodnih oscilacija, postoje i **prinudne oscilacije**. To su oscilacije koje nastaju pod djelovanjem poremećajne, odnosno prinudne periodične sile, koja nastaje kao posljedica neuravnoteženosti dijelova mašina, odnosno dejstvom promjenljivog magnetnog polja, itd.

Ukoliko se u razmatranju oscilatornog kretanja zamenare sile otpora onda imamo slučaj **slobodnih neprigušenih oscilacija** i **prinudnih neprigušenih oscilacija**. Međutim, ukoliko pored restitucione sile i poremećajne sile na tijelo dejstvuje i sila otpora, onda imamo slučaj **slobodnih prigušenih oscilacija** i **prinudnih prigušenih oscilacija**.

SLOBODNE NEPRIGUŠENE OSCILACIJE TAČKE

Problem slobodnih oscilacija bez prigušenja može se analizirati na primjeru vertikalnog harmonijskog oscilatora:



Odgovarajuća diferencijalna jednačina kretanja u pravsu ose z je

$$m\ddot{z} = -cz \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{z} + \frac{c}{m} z = 0 .$$

Ako uvedemo oznaku $\omega^2 = \dfrac{c}{m}$, diferencijalna jednačina slobodnih oscilacija je:

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0 .$$

Opšte rješenje ove homogene linearne diferencijalne jednačine je harmonijska funkcija oblika:

$$z(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t = A_z \cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

Ovo je **zakon slobodnih oscilacija tačke** (određuje elongaciju tijela u datom trenutku vremena t), gdje je:

A_z - **amplituda oscilovanja**, to je maksimalni otklon (elongacija) tačke od ravnotežnog položaja,

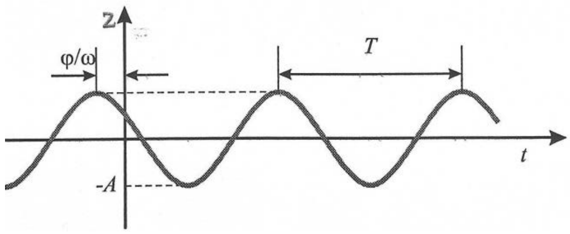
ω - **kružna frekvencija** slobodnih oscilacija iskazana u [rad/s] ili [s^{-1}]

φ_0 - **početna faza** kretanja [rad]

$\left(\omega t + \varphi_0\right)$ - **faza kretanja**,

C_1, C_2 - integracione konstante koje zavise od početnih uslova kretanja.

Zakon slobodnih oscilacija, tj. zavisnost elongacije tijela koje vrši prosto harmonijsko oscilovanje od vremena, data je na sljedećoj slici:



Bitne karakteristike harmonijskog kretanja su period i frekvencija oscilovanja.
Period oscilovanja, T, je vrijeme potrebno tački da prođe jedan pun ciklus kretanja. Iskazuje se u sekundama i određuje se iz:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Frekvencija oscilovanja predstavlja broj oscilacija koje telo napravi u jedinici vremena. Iskazuje se u hercima [Hz] ili [s^{-1}], a određuje se kao recipročna vrijednost perioda:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Linearna brzina i ubrzanje tačke koja vrši slobodne harmonijske oscilacije dobiju se diferenciranjem po vremenu zakona oscilovanja (elongacije):

$$v = \dot{z} = \frac{dz}{dt} = -\omega A_z \sin(\omega t + \varphi_0) = -A_v \sin(\omega t + \varphi_0)$$

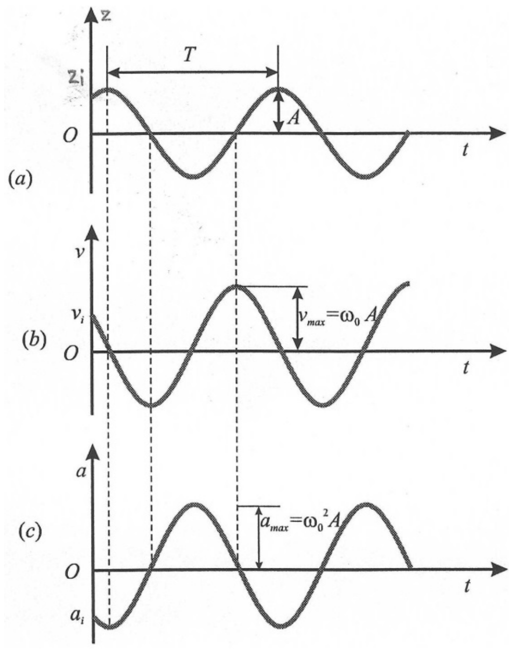
$$a = \ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt} = -\omega^2 A_z \cos(\omega t + \varphi_0) = -A_a \cos(\omega t + \varphi_0)$$

U ovim izrazima su amplitude brzine i ubrzanje iskazane preko amplitude elongacije:

$$A_v = \omega A_z$$

$$A_a = \omega^2 A_z = \omega A_v.$$

Na sljedećoj slici su prikazane zavisnosti elognacije, brzine i ubrzanja, respektivno. Sa slike se vidi da se faza brzine razlikuje od faze elongacije za $\pi/2$ radijana, odnosno, tamo gde z ima maksimum ili minimum, brzina je nula. Takodje, tamo gde je elongacija nula, brzina je maksimalna. Osim toga se vidi da je faza ubrzanja pomjerena za π radijana u odnosu na fazu elongacije, što znači da tamo gde z ima maksimum i ubrzanje ima maksimalnu vrednost, ali suprotnog predznaka u odnosu na znak elongacije.



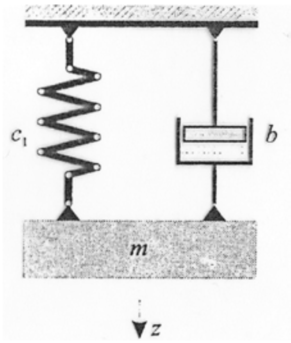
SLOBODNE PRIGUŠENE OSCILACIJE

Oscilatorno kretanje koje je prethodno razmatrano se odvija u idealnim sistemima, bez trenja, i jednom kada bi bilo uspostavljeno u sistemu, odvijalo bi se trajno. U realnim sistemima, čije se kretanje odvija nekoj sredini (vazduh, voda, idr.), potrebno je uzeti u obzir dejstvo okoline na kretanje tijela. Sila kojom sredina djeluje na tijelo u kretanju zavisi od osobina sredine (gustine, viskoznosti, ...), od oblika tijela koje se kreće i njegove brzine.

Stoga će opisivanje oscilovanja biti realnije kada se osim restitucione sile uzme u obzir i sila otpora sredine. Posljedica njenog postojanja je da se oscilovanje usporava sa vremenom jer se ukupna mehanička energija sistema troši na savladavanje otpora sredine. Usljed toga će se energija smanjivati sa vremenom a oscilacije priguštivati pa se ovaj (realan) tip oscilovanja naziva **prigušeno oscilovanje**.

Uzima se da je sila otpora proporcionalna prvom stepenu brzine tijela, $\vec{F}_w = -b\vec{v}$, i uvijek je usmjerena suprotno od smjera kretanja tijela (suprotstavlja se kretanju tijela). Ovdje je b koeficijent proporcionalnosti izmedju sile otpora sredine i brzine kretanje tijela.

Model slobodnih prigušenih oscilacija dat je na sljedećoj slici:



Odgovarajuća diferencijalna jednačina slobodnih prigušenih oscilacija tačke u pravsu ose z je:

$$\ddot{z} = -cz - b\dot{z} \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} + \frac{b}{m}\dot{z} + \frac{c}{m}z = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} + 2\delta\dot{z} + \omega^2 z = 0$$

čije rješenje zavisi od oblika korijena tzv. karakteristične jednačine:

$$\lambda_{1,2} = \omega\left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

gdje su : $\omega^2 = \frac{c}{m}$, $\delta = \frac{b}{2m}$, $\xi = \frac{\delta}{\omega} = \frac{b}{2\sqrt{cm}}$.

Veličina δ naziva se koeficijent prigušenja, a veličina ξ je bezdimenzioni koeficijent.

Opšte rješenje diferencijalne jednačine predstavlja **zakon slobodnih prigušenih oscilacija tačke**:

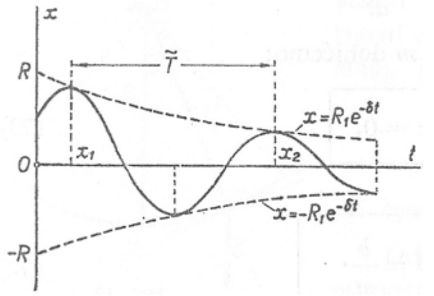
$$z(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Oscilatorno kretanje opisano ovim zakonom može biti periodično (imati harmonijski karakter) ili aperiodično, što zavisi od korijena $\lambda_{1,2}$ karkateristične jednačine,tj. od odnosa veličina δ i ω:

- $\delta < \omega$ - ovo je slučaj tzv. **malog prigušenja**. Korijeni $\lambda_{1,2}$ karakteristične jednačine su konjugovano kompleksni. Nastaje slaba oscilacija sa opadajućim harmonijskim kretanjem, opisanim zakonom:

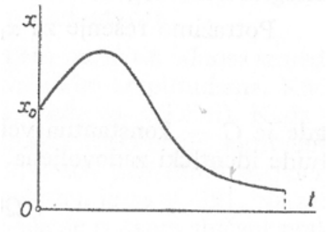
  $$z(t) = Re^{-\delta t}\cos(pt + \alpha)$$

  gdje je $p = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$ - kružna frekvencija slobodnih prigušenih oscilacija, a amplituda $Re^{-\delta t}$ ima opadajući karakter:



Zavisnost elongacije od vremena za slučaj malog prigušenja

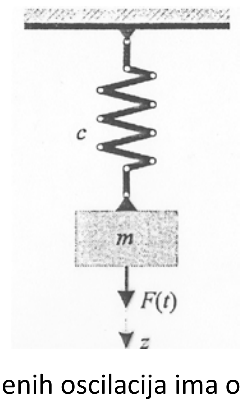
- $\delta = \omega$ - ovo je slučaj tzv. **graničnog prigušenja**. Korijeni $\lambda_{1,2}$ karakteristične su realni i jednaki. Nastaje aperiodično kretanje.
- $\delta > \omega$ - ovo je slučaj tzv. velikog prigušenja. Korijeni $\lambda_{1,2}$ karakteristične su realni i različiti. Nastaje jaka oscilacija sa aperiodičnim kretanjem:



Zavisnost elongacije od vremena za slučaj velikog i graničnog prigušenja

PRINUDNE OSCILACIJE

Ukoliko na tijelo, osim restitucione sile, djeluje i prinudna (poremećajna) sila koja ima harmonijski karakter, $F(t) = F_0 \cos(\Omega t - \theta_0)$, tijelo će vršiti prinudne oscilacije. Model mehaničkog sistema sa prinudnim neprigušenim oscilacijama predstavljen je na sljedećoj slici:



Diferencijalna jednačina prinudnih neprigušenih oscilacija ima oblik:

$$m\ddot{z} = -cz + F_0 \cos(\Omega t - \theta_0) \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} + \frac{c}{m} z = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t - \theta_0) \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} + \omega^2 z = h \cos(\Omega t - \theta_0)$$

gdje je: F_0 - amplitude poremećajne sile

Ω - kružna frekvencija poremećajne sile

θ_0 - početna faza poremećajne sile

$\omega = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ - kružna frekvencija slobodnih (sopstvenih) oscilacija

Ako se pogleda diferencijalna jednačina prinudnih oscilacija, očigledno je da je lijevi dio jednačine upravo isti kao kod slobodnih oscilacija tačke, dok desni dio jednačine predstavlja harmonijsku funkciju. Ovo je nehomogena diferencijalna jednačinu sa konstantnim koeficijentima, čije je opšte rješenje zbir rješenja odgovarajuće homogene jednačine i tzv. partikularnog rješenja:

$$z(t) = z_H(t) + z_P(t).$$

Kinematička jednačina prinudnih oscilacija opisuje zbir slobodne i prinudne oscilacije kružnih frekvencija ω i Ω, odnosno perioda $T_s = \frac{2\pi}{\omega}$ i $T_p = \frac{2\pi}{\Omega}$:

$$z(t) = z_H(t) + z_P(t) = (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) + C_3 \cos(\Omega t - \theta_0)$$

$$z(t) = C\cos(\omega t - \varphi_0) + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}\cos(\Omega t - \theta_0).$$

Ovaj zakon kretanja (elongacija) izveden je pod pretpostavkom da se zanemaruju otpori kretanja. Ipak, u relanim uslovima usljed postojanja otpora, slobodne oscilacije se vrlo brzo prigušuju i nemaju većeg uticaja na rezultujuće kretanje. Primaran značaj imaju prinudne oscilacije koje se i pri postojanju otpora ne prigušuju.

Ako je $\omega > \Omega$, amplituda $\frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}$ prinudne oscilacije je pozitivna, a faza prinudne oscilacije jednaka je fazi prinudne sile, tako da zakon prinudnog oscilovanja ima fomu, tj.:

$$z_P(t) = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}\cos(\Omega t - \theta_0)$$

Ako je $\omega < \Omega$, amplituda $\frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}$ prinudne oscilacije je negativna, a faza prinudne oscilacije u odnosu na fazu prinudne sile se uvećava za π, tako da je :

$$z_P(t) = -\frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}\cos(\Omega t - \theta_0) = \frac{h}{\Omega^2 - \omega^2}\cos(\Omega t - \theta_0 + \pi).$$

Prema tome, znak amplitude i faza prinudne oscilacije zavisi od odnosa kružnih frekvencija slobodnih oscilacija i prinudne sile, koji se naziva **koeficijent poremećaja**:

$$\psi = \frac{\Omega}{\omega}.$$

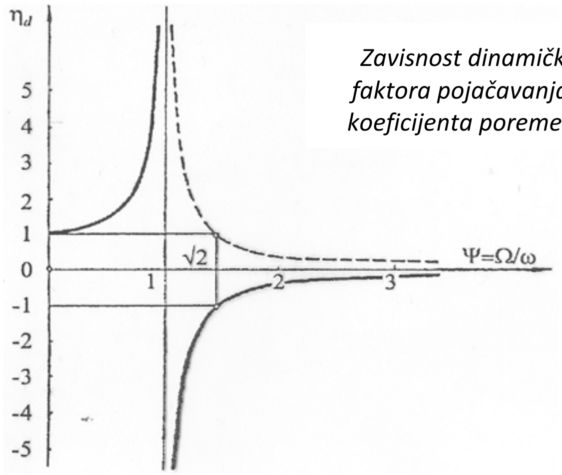
Promjena amplitude prinudnih oscilacija u zavisnosti od koeficijenta poremećaja može se opisati preko **dinamičkog faktora pojačavanja,** η_d, koji predstavlja odnos amplituda prinudnih oscilacija pri dinamičkom i statičkom dejstvu poremećajne sile:

$$\eta_d = \frac{z_d}{z_{st}} = \frac{1}{1-\psi^2}$$

Prema dijagramu datom na sljedećoj slici, kada je $\omega > \Omega$, dinamički factor pojačavanja može se smanjiti najviše do jedinice (amplituda prinudnih oscilacija pri dinamičkom dejstvu poremećajne sile može se smanjiti najviše do amplitude prinudnih oscilacija pri statičkom djelovanju poremećajne sile).

Kada je $\omega = \Omega$, dinamički faktor pojačavanja postaje beskonačan, $\eta_d = \infty$, i tada su amplitude prinudnih oscilacija beskonačno velike. Ova pojava naziva se **rezonancija**.

Kada je $\omega < \Omega$, koeficijent $\eta_d \to 0$, pa se u ovoj oblasti može postići da amplituda prinudnih oscilacija pri dinamičkom dejstvu poremećajne sile teži nuli.



Zavisnost dinamičkog faktora pojačavanja od koeficijenta poremećaja

$$\psi < 1, \quad 0 < \Omega < \omega$$
$$T_p > T_s$$
$$z_d > z_s$$
$$\psi = 1, \quad \Omega = \omega$$
$$T_p = T_s$$
$$z_d \to \infty$$
$$\psi > 1, \quad \Omega \geq \omega$$
$$T_p < T_s$$
$$z_d = \frac{z_s}{1-\psi^2}$$

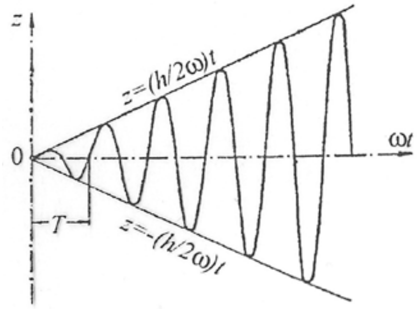
REZONANCIJA

Pojava rezonancije nastupa kada je kružna frekvencija slobodnih oscilacija jednaka kružnoj frekvenciji poremećajne sile, $\omega = \Omega$. Teorijski, rezonancija ima za posljedicu beskonačno veliku amplitudu prinudne oscilacije, što ne odgovara obliku amplitude $C_3 = \dfrac{h}{\omega^2 - \Omega^2}$. Amplituda prinudne oscilacije za slučaj rezonancije je linearna funkcija vremena , $\pm \dfrac{h}{2\omega} t$, a prinudna oscilacija je opisana sa:

$$z_P = \frac{h}{2\omega} t \cos\left[(\Omega t - \theta_0) - \frac{\pi}{2} \right]$$

Faza prinudnih oscilacija, $\left[(\Omega t - \theta_0) - \dfrac{\pi}{2} \right]$, u slučaju rezonancije zaostaje za fazom prinudne sile, $(\Omega t - \theta_0)$, za $\dfrac{\pi}{2}$.

Grafik prinudnih oscilacija za slučaj rezonancije dat je na slici:



Rezonantno oscilovanje za relani mehanički sistem predstavlja režim nestacionarnog kretanja, kojeg treba izbjegavati zbog razornog dejstva rezonancije na sistem. Ukoliko ovakav režim kretanja nije moguće u potpunosti izbjeći, treba nastojati da vrijeme zadržavanja sistema u ovakvom nestacionarnom režimu rada bude što kraće.

LITERATURA

[1] L. Rusov: Kinamatika , Dinamika, Naučna knjiga Beograd, 1988.

[2] D. Gross, idr: Technische Mechanik 1 - Statik, Springer, 2009.

[3] D. Gross, idr: Engineering mechanics 3 - Dynamics, Springer, 2011.

[4] S. M. Targ: Teorijska mehanika – kratki kurs, Građevinska knjiga Beograd, 1985.

[5] N. Naerlović-Veljković: Mehanika 2, Naučna knjiga Beograd, 1992.

[6] V. Doleček: Dinamika, Mašinski fakultet Sarajevo, 2007.

SADRŽAJ