УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 1- ПРЕДАВАЊА

Академска 2017/2018

ТЕМА 7: БРОЈНИ РЕДОВИ

7.1. Појам и особине бројног реда
7.2. Редови са позитивним члановима
7.3. Редови са произвољним члановима

ЛИТЕРАТУРА: **Милан Јањић, Математика I, ПМФ, Бања Лука, 2001**

Зоран Митровић, Математика I, Бања Лука, 2016 [1]

Наставник: Биљана Војводић

[1] У припреми предавања је коришћења и књига **Математичка анализа 1, Душан Аднађевић и Зоран Каделбург** (Наука, Београд 1998)

ТЕМА 7: БРОЈНИ РЕДОВИ

7.1. ПОЈАМ И ОСОБИНЕ БРОЈНОГ РЕДА

Дефиниција 7.1. Нека је $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ низ реалних бројева. Израз

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ \dots . + a_n + \cdots \tag{7.1}$$

се назива **бесконачним реалним редом** (или краће **реалним редом).** Реалан број a_n је **општи члан** реда (7.1).

Примјер 7.1. Ред

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

је реалан ред чији је општи члан

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Записујемо га у облику

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}. \square$$

Збирови

$$s_1 = a_1,$$
$$s_2 = a_1 + a_2,$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

се називају **парцијалним сумама** реда (7.1).

Дефиниција 7.2. Ако постоји коначна гранична вриједност низа парцијалних сума $\{s_n\}$ и ако је $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, каже се да ред (7.1) **конвергира** и да му је **збир** једнак s. У том случају пишемо

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Овај запис користимо и када је $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$. За ред који не конвергира (било да је $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ или да не постоји) каже се да је **дивергентан.**

Примјер 7.2. Испитати конвергенцију реда из Примјера 7.1.

Рјешење: Уочимо да се општи члан реда може записати у облику

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Тада је

$$s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Према томе,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

па је ред конвергентан и сума му је једнака 1. Пишемо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1. \square$$

Примјер 7.3. Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Рјешење: Имамо

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\frac{k+1}{k} = \sum_{k=2}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) =$$

$$\ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \cdots + \ln n - \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1) - \ln 2.$$

Дакле,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (\ln(n+1) - \ln 2) = +\infty,$$

па је ред дивергентан. □

Примјер 7.4. Ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots +, \qquad q \neq 0 \tag{7.2}$$

се назива **геометријски ред**. Парцијалне суме реда су

$$s_n = q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \dfrac{q - q^{n+1}}{1-q}, q \neq 1 \\ n, \qquad q = 1 \end{cases}.$$

Одавде добијамо

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{q}{1-q}, |q| < 1$$

па је геометријски ред за $|q| < 1$ конвергентан и сума му је

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}, |q| < 1. \tag{7.3}$$

За $q \geq 1$ је $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ па је ред дивергентан.

За $q \leq -1$ не постоји $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ и ред је дивергентан. □

Примједба 7.1. Из (7.3) за $|q| < 1$ добијамо

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = 1 + \frac{q}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Такође, за $|q| < 1$ и $n_0 = 2,3, \ldots$ имамо

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q} \tag{7.3$_1$}$$

јер је

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n = |k = n - n_0 + 1| = \sum_{k=1}^{\infty} q^{n_0+k-1} = q^{n_0-1} \sum_{k=1}^{\infty} q^k = q^{n_0-1} \frac{q}{1-q} = \frac{q^{n_0}}{1-q}, |q| < 1.$$

Према томе, (7.3$_1$) вриједи за $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. □

Примјер 7.5. Одредити суме сљедећих геометријских редова (уколико су конвергентни):

а) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$, б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, в) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Рјешење: а) $q = 2$, ред дивергира (Примјер 7.4).

б) $q = \frac{1}{3}$, ред конвергира. Његова сума је из (7.3_1) једнака

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

в) $q = -\frac{1}{2}$, $|q| < 1$, ред конвергира. Његова сума је из (7.3_1) једнака

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{12}. \square$$

Упоредо са редом (7.1) посматрамо ред

$$r_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \ \dots . + a_{m+k} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{m+k} \, , m \in \mathbb{N}. \tag{7.4}$$

Ред r_m се назива **остатком** реда (7.1) послије m −тог члана.

Однос између конвергенције реда и његовог остатка даје сљедећа теорема.

Теорема 7.1.

1) Ред (7.1) конвергира ако и само ако конвергира ред (7.4).

2) Ред (7.1) конвергира ако и само је $\lim\limits_{m \to \infty} r_m = 0$.

Доказ: 1) Нека је

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$$

парцијална сума реда (7.1) и

$$s'_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \ \dots . + a_{m+k}$$

парцијална сума реда (7.4). Очигледно је

$$s'_k = s_{m+k} - s_m. \tag{7.5}$$

Ако конвергира ред (7.1) тада је $\lim_{k\to\infty} s_{m+k} = s$. Тада из (7.5) добијамо

$$\lim_{k\to\infty} s'_k = s - s_m,$$

па је и ред (7.4) конвергентан. Обрнуто, ако је ред (7.4) конвергентан тада је $\lim_{k\to\infty} s'_k = s'$. Сада из (7.5) добијамо

$$\lim_{k\to\infty} s_{m+k} = s' + s_m$$

па је и ред (7.1) конвергентан.

2) Ред (7.1) можемо записати у облику $s_m + r_m$. Ако је ред конвергентан тада је

$$r_m = s - s_m.$$

Одавде добијамо $\lim_{m\to\infty} r_m = \lim_{m\to\infty} (s - s_m) = 0$. □

Из Теореме 7.1 закључујемо да **одбацивање коначног броја чланова неког реда не утиче на његову конверегенцију.**

Без доказа наводимо **општи Кошијев критеријум** за конверегенцију редова.

Теорема 7.2. Ред (7.1) конвергира ако и само за свако $\forall \epsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да вриједи

$$(\forall n > n_0, p \in \mathbb{N})\ \left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ \dots . + a_{n+p}\right| < \epsilon. \square \tag{7.6}$$

Из особина граничних вриједности низова лако се показује да је ред чији је општи члан једнак производу скалара и оштег члана конвергентног реда такође конвергентан ред, те да је збир конвергентних редова конвергентан ред. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 7.3.

1) Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, онда конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n, \alpha \in \mathbb{R}$ и вриједи

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2) Ако редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергирају, онда конвергира и њихов збир и вриједи

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,. \square$$

Потребан услов за конвергенцију реда је да његов општи члан тежи нули. Вриједи:

Лема 7.1. Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, онда је $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказ: Из једнакости $a_n = s_n - s_{n-1}, n > 1$ добијамо

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0. \square$$

Примједба 7.2. Услов $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ је потребан, али не и довољан за конвергенцију реда. Дакле, ако општи члан реда не тежи нули, ред је дивергентан, а уколико општи члан тежи нули ред може да буде и конвергентан и дивергентан.

Примјер 7.6. За ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ је $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ али је овај ред дивергентан. Наиме, имамо

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

па је $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$. $\square$

Примјер 7.7. За ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ је $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, па је ред дивергентан. $\square$

7.2. РЕДОВИ СА ПОЗИТИВНИМ ЧЛАНОВИМА

За ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ \dots . + a_n + \cdots$$

кажемо да **ред са позитивним члановима** ако постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је $a_n > 0$ за $n \geq n_0$.

Из услова $a_n > 0$ за $n \geq n_0$, добијамо да је низ парцијалних сума реда са позитивним члановима растући за $n \geq n_0$. Пошто је монотон и ограничен низ конвергентан (видјети Теорему 5.6 у Теми 5) долазимо до **потребног и довољног услова за конвергенцију реда са позитивним члановима.**

Теорема 7.4. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ са позитивним члановима конвергира ако и само ако је низ $\{s_n\}$ његових парцијалних сума ограничен. □

Примјер 7.8. Показати да је **хармонијски ред**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{7.7}$$

дивергентан.

Рјешење: Чланове хармонијског реда можемо груписати на сљедећи начин

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n}}\right)+\cdots$$

Уочимо да је сваки члан у загради већи од последњег члана у загради, тј. да је

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>2\cdot\frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>4\cdot\frac{1}{8}, \qquad \frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}>8\cdot\frac{1}{16}, \ldots$$

$$\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n}}=\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}>2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n}}.$$

Према томе, за s_{2^n} парцијалну суму реда имамо

$$s_{2^n}>1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{16}+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=1+n\cdot\frac{1}{2}$$

па је низ парцијалних сума неограничен. Сада на основу Теореме 7.4 добијамо да је хармонијски ред дивергентан. □

Наводимо неке од критеријума за испитивање конверегенције редова са позитивним члановима.

1. Поредбени критеријуми

1.1. Нека је

$$a_n \leq b_n \;\; (n \geq n_0).$$

Тада:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ конвергира} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ конвергира,}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ дивергира} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ дивергира.}$$

1.2. Нека постоји

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K, \qquad 0 \leq K \leq \infty.$$

Ако је $K < \infty$, тада $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

Ако је $K > 0$, тада $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ дивергира $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира.

1.3. Нека је

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{b_n}{b_{n+1}} \ (n \geq n_0).$$

Тада:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ конвергира} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ конвергира,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ дивергира} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ дивергира.}$$

2. Даламберов критеријум

Нека постоји

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Тада:

$$L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ конвергира,}$$

$$L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ дивергира.}$$

3. Кошијев критеријум

Нека постоји

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L,$$

Тада:

$$L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ конвергира,}$$
$$L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ дивергира.}$$

Примјер 7.9. Испитати конвергенцију редова

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha > 0.$

Рјешење: а) Упоредићемо ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ са редом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ из Примјера 7.2 за који смо показали да је конвергентан. Користимо Поредбени критеријум 1.2. Имамо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

па закључујемо да је и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергентан.

б) Нека је $0 < \alpha < 1$. Тада је

$$n^{\alpha} < n \Rightarrow \frac{1}{n^{\alpha}} > \frac{1}{n}.$$

Из Поредбеног критеријума 1.1 и дивергенције хармонијског реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (Примјер 7.8) добијамо да је ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \qquad 0 < \alpha < 1$$

дивергентан.

Уколико је $\alpha > 1$, упоређујемо дати ред са редом

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right).$$

Овај ред је конвергентан јер је

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right) =$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} - \frac{1}{3^{\alpha-1}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) = 1 - \frac{1}{n^{\alpha}}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha}}\right) = 1.$$

Примјењујући Поредбени критеријум 1.2. добијамо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{n^{\alpha-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1-1+\frac{\alpha-1}{n}-\binom{\alpha-1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha-1-\binom{\alpha-1}{2}\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{\alpha-1}$$

па добијамо да је ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha},\alpha>1$$

конвергентан.

Према томе, ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} \tag{7.8}$$

конвергира за $\boldsymbol{\alpha>1}$ и дивергира за $\boldsymbol{0<\alpha\leq 1}$. $\square$

Примјер 7.10. Испитати конвергенцију редова:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\sqrt{n}}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^n$, д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{3^n}$.

*Рјешење:*а) Користимо поредбени критеријум. Имамо

$$\sqrt{n(n+1)} > \sqrt{n^2} = n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} < \frac{1}{n}.$$

Пошто је хармонијски ред дивергентан, из горње неједнакости не можемо ништа рећи о конвергенцији реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. Међутим, користећи поредбени критеријум 1.2. добијамо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

па је дати ред дивергентан.

б)

$$(n+2)\sqrt{n} > n\sqrt{n} = n^{3/2} \Rightarrow \frac{1}{(n+2)\sqrt{n}} < \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Пошто је ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ конвергентан (Примјер 7.9, $\alpha = 3/2$) из поредбеног критеријума 1.1. добијамо да је и дати ред конвергентан.

в) На основу Даламберовог критеријума имамо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$$

па је ред конвергентан.

г) Примјењујемо Кошијев критеријум. Имамо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n-1}=2>1$$

па је ред дивергентан.

д) На основу Даламберовог критеријума имамо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)(n+3)}{3^{n+1}}}{\dfrac{n(n+2)}{3^n}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)}=\frac{1}{3}<1$$

па је ред конвергентан.□

7.2. РЕДОВИ СА ПРОИЗВОЉНИМ ЧЛАНОВИМА

Нека је дат реални ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ \dots . + a_n + \cdots$$

Теорема 7.5. Ако ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ \dots . + |a_n| + \cdots$$

конвергира, онда конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказ: Пошто је $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ \dots . + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + |\ a_{n+p}|$ из општег Кошијевог критеријума конвергенције редова (Теорема 7.2) добијамо да конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Ако је ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конвергентан, кажемо да је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **апсолутно конвергентан**.

Ако је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергентан али није апсолутно конвергентан, кажемо да је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **условно конвергентан.**

Посматрамо посебну врсту редова, тзв. **алтернативне редове**.

Ред облика

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n = c_1 - c_2 + \ \dots . + (-1)^{n-1}c_n + \cdots \tag{7.9}$$

гдје су c_n позитивни реални бројеви назива се **алтернативни ред**.

Теорема 7.6. (Лајбницив критеријум) Ако је

$$c_{n+1} \le c_n, n \in \mathbb{N} \text{ и } \lim_{n\to\infty} c_n = 0,$$

онда је алтернативни ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ конвергентан.

Доказ: За парцијалне суме s_{2n} реда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ имамо

$$s_{2n} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + (c_{2n-1} - c_{2n}).$$

Због услова $c_{n+1} \le c_n$ добијамо да је низ $\{s_{2n}\}$ растући. Овај низ је и ограничен јер је

$$s_{2n} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - \cdots - (c_{2n-2} - c_{2n-1}) - c_{2n} < c_1.$$

Дакле, постоји $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$. Пошто је

$$s_{2n+1} = s_{2n} + c_{2n+1}$$

и $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, добијамо да је и $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s$. Одавде добијамо да је и $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, односно ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ је конвергентан. □

Примјер 7.11. а) Ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

није апсолутно конвергентан. Овај ред је условно конвергентан према Лајбницовом критеријуму.

б) Ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$$

је апсолутно конвергентан.