УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 1- ПРЕДАВАЊА

Академска 2017/2018

ТЕМА 5: ГРАНИЧНЕ ВРИЈЕДНОСТИ

5.1. Гранична вриједност низа
5.2. Гранична вриједност функције
5.3. Непрекидне функције

ТЕМА 6: ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАЧУН

6.1. Први извод
6.2. Геометријска интерпретација извода. Диференцијал функције
6.3. Теореме о средњим вриједностима
6.4. Изводи вишег реда
6.5. Тејлорова формула
6.7. Испитивање функције

ЛИТЕРАТУРА: **Милан Јањић, Математика I, ПМФ, Бања Лука, 2001**
Зоран Митровић, Математика I, Бања Лука, 2016[1]

Наставник: Биљана Војводић

---

[1] У припреми предавања коришћена је и **Математичка анализа, Милан Меркле,** Електротехнички факултет (Београд 1997)

ТЕМА 5: ГРАНИЧНЕ ВРИЈЕДНОСТИ

5.1. ГРАНИЧНА ВРИЈЕДНОСТ НИЗА

Дефиниција 5.1. Пресликавање $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ називамо **реални низ (низ)** $\boldsymbol{x}$. Број $x(n)$ се назива $\boldsymbol{n}$ **−ти члан низа (општи члан)** и означава се са x_n. Број n је **индекс** члана.

Низ $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ обично означавамо са $(\boldsymbol{x_n})$ или $\{\boldsymbol{x_n}\}$.

Аналогно се могу дефинисати низови комплексних бројева, као пресликавање из скупа $\mathbb{N}$ у $\mathbb{C}$.

Примјер 5.1. а) Формулом $x_n = \frac{1}{n}$ дефинисан је низ чији су чланови $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$.

б) Чланови низа $x_n = (-1)^n$ су $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$.

в) Низ $x_n = sin\frac{n\pi}{2}$ има чланове $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots$ □

Примјер 5.2. Низови се могу задавати и помоћу рекурентних формула. Низ $\{x_n\}$ дефинисан са

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 1, \qquad x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \qquad n = 3,4,\dots$$

се назива **Фибоначијев низ**.[2]

Дакле, чланови низа су 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...

Може се показати да је $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Ако се дуж подијели на два дијела тако да се мањи дио према већем односи као већи према цијелој дужи, тада је тај однос једнак $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$, док је однос већег дијела према мањем једнак $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$. Овакав начин подјеле дужи је познат као **златни пресјек**.[3] □

[2] Leonardo Fibonacci (1175-1250), италијански математичар

[3] Златни пресјек је био познат још у античко вријеме и представљао је стандард хармоније у умјетничким дјелима. Сматрало се да је најљепши правоугаоник код којег се странице односе у размјери златног пресјека, те да централну фигуре слике не треба постављати у средину, већ по правилу златног пресјека.

Дефиниција 5.2. Реалан број x је **гранична вриједност** низа $\{x_n\}$ ако вриједи

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |x_n - x| < \epsilon \tag{5.1}$$

Пишемо: $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} x_n = x}$ или $\boldsymbol{x_n \to x}$ **кад** $\boldsymbol{n} \to \infty$.

Кажемо да низ $\{x_n\}$ **конвергира ка** $\boldsymbol{x}$ или **тежи ка** $\boldsymbol{x}$ када $n \to \infty$.

Ако је низ конвергентан, то значи да се у свакој ϵ-околини тачке x налазе **скоро сви чланови низа,** тј. чланови $x_n, n \geq n_0$.

За низ који не конвергира, кажемо да **дивергира**.

Примјер 5.3. Показати да је:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, б) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, |q| < 1$.

Рјешење: а) За дато $\epsilon > 0$ нека је n_0 такав да је $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Такав природан број n_0 постоји на основу Архимедове теореме.[4] Тада је

$$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

б) За $q = 0$ једнакост вриједи. Нека је $q \neq 0$. Тада је за произвољно $\epsilon > 0$

$$|q^n| = |q|^n < \epsilon \Leftrightarrow |q|^n < |q|^{log_{|q|}\epsilon} \Leftrightarrow n > log_{|q|}\epsilon$$

јер је $|q| < 1$. Дакле ако је n_0 такав да је $n_0 > log_{|q|}\epsilon$ добијамо

$$(\forall n \geq n_0)\ |q^n| \leq |q|^{n_0} < |q|^{log_{|q|}\epsilon} = \epsilon$$

па је $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. □

Примјер 5.4. Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \geq 0$, тада је $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^\alpha = 0, \alpha > 0$.

Рјешење: Пошто је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, за дато $\epsilon > 0$ постоји n_0 такав да је

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n| < \epsilon^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Одавде добијамо

$$n \geq n_0 \Rightarrow |(x_n)^\alpha| < (\epsilon^{1/\alpha})^\alpha = \epsilon$$

па је $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^\alpha = 0$. □

---

[4] Видјети Теорему 1.3 у Теми 1 (стр. 29)

Дефиниција 5.3. Низ $\{x_n\}$ **дивергира ка плус бесконачно** и пишемо $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ако је

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\; x_n > K. \tag{5.2}$$

Низ $\{x_n\}$ **дивергира ка минус бесконачно** и пишемо $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ ако је

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\; x_n < -K. \tag{5.3}$$

Примјер 5.5. Показати да низ $x_n = 2^n$ дивергира ка плус бесконачно.

Рјешење: Нека је $K > 0$ и нека је n_0 такав да је $n_0 > K - 1$. Тада користећи биномну формулу добијамо

$$n \geq n_0 \Rightarrow 2^n \geq 2^{n_0} = (1+1)^{n_0} = 1 + n_0 + \frac{n_0(n_0-1)}{2} + \cdots + 1 \geq 1 + n_0 > K$$

тј. $\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$. □

Примјер 5.6. Показати да низ $x_n = (-1)^n$ нема ни коначну ни бесконачну граничну вриједност.

Рјешење: Чланови низа x_n имају само двије вриједности: 1 и -1. Ако би постојао $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, тада би се у свакој околини тачке x налазили скоро сви чланови низа x_n. Дакле, у свакој околини тачке x би се налазили и 1 и -1, што је немогуће јер нпр. у интервалу дужине $\frac{1}{2}$ не могу да се налазе оба поменута броја. □

- ✓ **Сваки реалан низ се може сврстати у једну од категорија**:
  - конвергентан низ, (нпр. низ $x_n = \frac{1}{n}$),
  - дивергентан низ - дивергира ка плус бесконачно (нпр. низ $x_n = 2^n$),
  - дивергентан низ - дивергира ка минус бесконачно (нпр. низ $x_n = -n$) и
  - дивергентан низ - нама ни коначну ни бесконачну граничну вриједност (нпр. низ $x_n = (-1)^n$).
- ✓ За низове који дивергирају ка $+\infty$ или $-\infty$ кажемо и да су **одређено дивергентни**.
- ✓ За низове који немају ни коначну ни бесконачну граничну вриједност кажемо и да су **неодређено дивергентни.**

Теорема 5.1. Конвергентан низ има јединствену граничну вриједност.

Доказ: Претпоставимо да постоје реални бројеви x и y тако да је

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ и } \lim_{n\to\infty} x_n = y.$$

Ако узмемо $\epsilon = \frac{|x-y|}{2}$, тада је јасно да се ϵ −околине тачака x и y не сијеку, па је немогуће да се и у једној и у другој ϵ −околини налазе скоро сви чланови низа $\{x_n\}$. Теорема је доказана.□

Дефиниција 5.4. За низ $\{x_n\}$ кажемо да је **ограничен** ако постоји реалан број M такав да је

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ |x_n| \leq M. \tag{5.4}$$

Услов (5.4) је еквивалентан са

$$(\exists M_1 \in \mathbb{R})(\exists M_2 \in \mathbb{R})\ \ M_1 \leq x_n \leq M_2.$$

Примјер 5.7. Низ $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ је ограничен.

Рјешење:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$1 + \frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{n-(n-1)}{(n-1)n} =$$

$$1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Пошто је очигледно $x_n > 0$ добијамо $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \in (0,2)$. □

Теорема 5.2. Сваки конвергентан низ је ограничен.

Доказ: Нека је $\{x_n\}$ конвергенатан низ и $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Тада из дефиниције граничне вриједности за $\epsilon = 1$ добијамо $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ \ |x_n - x| < 1,$ тј.

$$(\forall n \geq n_0)\ \ x - 1 < x_n < x + 1.$$

Тада је

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \ min\{x - 1, x_1, \dots, x_{n_0-1}\} < x_n < max\{x + 1, x_1, \dots, x_{n_0-1}\},$$

тј. низ $\{x_n\}$ је ограничен. □

- ✓ Обрат Теореме 5.2 не мора да вриједи јер ограничен низ не мора да буде конвергентан. Низ $x_n = (-1)^n$ је ограничен али није конвергентан (видјети Примјер 5.6).

Примјер 5.8. Низ

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

је дивергентан. Наиме, овај низ није ограничен јер је

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

На основу Теореме 5.2. закључујемо да је низ дивергентан. □

Теорема 5.3. Нека су $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ дати низови такви да је $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ гдје су $x, y \in \mathbb{R}$. Тада је:

1. $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$,
2. $\lim_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$,
3. $\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = xy$,
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}, y_n \neq 0, y \neq 0$,
5. $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}, y_n \neq 0, y \neq 0$.

Доказ: 1. Из дефиниције граничне вриједности добијамо да за $\epsilon > 0$ постоји n_0 такав да је

$$(\forall n \geq n_0)\ |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \text{ и } |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Тада је

$$(\forall n \geq n_0)|x_n + y_n - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

па вриједи особина 1.

2. Ако је $\alpha = 0$ тврдња је очигледна. Ако је $\alpha \neq 0$ тада за $\epsilon > 0$ постоји n_0 такав да је

$$(\forall n \geq n_0)\ |x_n - x| < \frac{\epsilon}{|\alpha|}.$$

Одавде добијамо

$$(\forall n \geq n_0)\ |\alpha x_n - \alpha x| = |\alpha||x_n - x| < |\alpha| \frac{\epsilon}{|\alpha|} = \epsilon.$$

3. Посматрајмо разлику

$$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x y_n + x y_n - xy| \leq\ |y_n|\, |x_n - x| + |x||y_n - y|.$$

Пошто је низ $\{y_n\}$ конвергентан он је и ограничен, тј. постоји реалан број M такав да је

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ |y_n| \leq M$$

па је

$$|x_n y_n - xy| \leq M\, |x_n - x| + |x||y_n - y|$$

Нека је $\epsilon > 0$. Тада постоји n_0 такав да је

$$(\forall n \geq n_0)\ |x_n - x| < \frac{\epsilon}{M + |x|} \text{ и } |y_n - y| < \frac{\epsilon}{M + |x|}.$$

Тада је

$$(\forall n \geq n_0)\ \ |x_n y_n - xy| \leq M\, |x_n - x| + |x||y_n - y| < M \frac{\epsilon}{M + |x|} + |x| \frac{\epsilon}{M + |x|} = \epsilon.$$

4. Посматрајмо разлику

$$\left|\frac{1}{y_n}-\frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y-y_n}{yy_n}\right| = \frac{|y-y_n|}{|y_n||y|}$$

Нека је n_0 такав да је

$$(\forall n \geq n_0)\ |y_n - y| < \frac{|y|}{2}.$$

Тада је

$$\frac{|y|}{2} > |y_n - y| \geq \big||y_n| - |y|\big| \Rightarrow -\frac{|y|}{2} \leq |y_n| - |y| < \frac{|y|}{2} \Rightarrow$$

$$(\forall n \geq n_0)\ \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|y|}.$$

Нека је $\epsilon > 0$ и $n_1 \geq n_0$ такав да је

$$(\forall n \geq n_1)\ |y_n - y| < \frac{|y|^2\epsilon}{2}.$$

Тада је

$$(\forall n \geq n_1)\ \left|\frac{1}{y_n}-\frac{1}{y}\right| = \frac{|y-y_n|}{|y_n||y|} < \frac{|y|^2\epsilon}{2|y|}\cdot\frac{2}{|y|} = \epsilon.$$

5. Слиједи из 3. и 4. □

На сличан начин доказујемо и сљедећу теорему.

Теорема 5.4. Нека су $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ низови такви да је $\lim_{n\to\infty} x_n = x, x \in \mathbb{R}$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Тада је:

1. $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = +\infty$,
2. $\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = sgnx \cdot \infty, x \neq 0$,
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0, y_n \neq 0, y \neq 0$,
4. $\lim_{n\to\infty} (x_n)^\alpha = x^\alpha, x > 0, \alpha \in \mathbb{R},\ x_n > 0$ за $n \in \mathbb{N}$. □

Примјер 5.9. Наћи граничну вриједност низова

а) $x_n = \dfrac{2n+1}{3-7n}$, б) $x_n = \dfrac{1-2n^2}{4n+3}$, в)$x_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$.

Рјешење:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{3-7n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-7} = -\dfrac{2}{7}$.

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-2n^2}{3-4n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}-2n}{\frac{3}{n}-4} = +\infty$.

в)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + 1} = \frac{1}{2}. \square$$

Теорема 5.5. (Теорема о два жандара) Нека су $\{x_n\}, \{y_n\}$ и $\{z_n\}$ дати низови такви да је $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = x$ и $x_n \leq y_n \leq z_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x. \square$$

Примјер 5.10. Показати да је

а) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,,$ б) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\,, a > 0.$

Доказ: а) Из биномне формуле за $n > 2$ имамо

$$(1+h)^n \geq \binom{n}{2} h^2.$$

Ако ставимо $h = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ добијамо

$$\left(1 + \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)\right)^n \geq \binom{n}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 \Rightarrow n \geq \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2$$

Дакле, вриједи

$$0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

па примјеном теореме о два жандара добијамо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

б) Нека је $a \geq 1$. Тада очигледно постоји n_0 такав да је

$$(\forall n \geq n_0)\ \ 1 \leq a \leq n.$$

Одавде добијамо

$$(\forall n \geq n_0)\ 1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Из последње неједнакости примјеном теореме о два жандара и резултата из а) добијамо $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Ако је $0 < a < 1$ тада је $b = \frac{1}{a} > 1$ па је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$. Према томе $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = 1$. □

Дефиниција 5.5. Низ $\{x_n\}$ је **монотоно растући (неопадајући, опадајући, нерастући**) ако за свако $n \in \mathbb{N}$ вриједи

$$x_{n+1} > x_n \qquad (x_{n+1} \geq x_n, \qquad x_{n+1} < x_n, \qquad x_{n+1} \leq x_n).$$

Кажемо да је низ **монотон** ако има једну од наведених особина.

- ✓ Монотони низови имају важне особине у погледу конвергенције. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 5.6. Монотон и ограничен низ је конвергентан. Ако је низ монотоно неопадајући и ограничен одозго тада је

$$\lim_{n\to\infty} x_n = sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ако је низ монотоно нерастући и ограничен одоздо тада је

$$\lim_{n\to\infty} x_n = inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}. \square$$

Примјер 5.11. Показати да је низ $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ конвергентан.

Доказ: Показаћемо да је низ монотоно неопадајући и ограничен одозго. Вриједи:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n$$

Из Бернулијеве неједнакости имамо

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1-\frac{n}{(n+1)^2}$$

па је

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2} \geq 1.$$

Дакле, низ $\{x_n\}$ је монотоно неопадајући. Покажимо да је низ ограничен одозго. Из биномне формуле имамо

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots.(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

Даље из неједнакости

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}, k = 2,3, \ldots$$

добијамо

$$x_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 2 + 1 = 3.$$

Дакле, низ је ограничен, па је на основу Теореме 5.6 и конвергентан. □

Дефиниција 5.6. Број e се дефинише као гранична вриједност

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Број e је ирационалан и трансцедентан (није коријен ниједног полинома са цијелим коефицијентима). Његова приближна вриједност је $e \approx 2.718281828459045 \ldots$.[5]

[5] За израчунавање броја e може се узети приближна формула $e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, али је потребно узети велике вриједности за n да би се добила добра тачност. Нпр. за $n = 1000$ добија се $e \approx 2.7169$, за $n = 10000$ добија се $e \approx 2.7181$ (при чему је веома захтјевно израчунати $\left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000}$). Зато се израчунавање броја e користе други низови који брже конвергирају ка e. Нпр. ако рачунамо $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, онда се за $n = 10$ добија $e \approx 2.71828$, што је већа тачност него за $n = 10000$ у случају низа $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Дефиниција 5.7. Нека је дат низ $\{x_n\}$ и низ $\{n_k\}$ монотоно растући низ природних бројева. Низ $\{x_{n_k}\}$ називамо **подниз** низа $\{x_n\}$.

Лако се доказује сљедећа теорема.

Теорема 5.7. Низ $\{x_n\}$ има граничну вриједност $x \in \mathbb{R}$ ако и само ако сваки његов подниз има граничну вриједност x.

Доказ: Нека је $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Тада

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)|x_n - x| < \epsilon$$

Нека је $\{x_{n_k}\}$ подниз низа $\{x_n\}$. Пошто је $\{n_k\}$ монотоно растући низ природних бројева постоји природан број $k_0 \in \mathbb{N}$ такав да је $n_k \geq n_0$ за $k \geq k_0$. Према томе

$$\left|x_{n_k} - x\right| < \epsilon \text{ за } k \geq k_0$$

па је $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Обрнуто, ако сваки подниз низа $\{x_n\}$ тежи ка x, онда је и $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, јер је низ $\{x_n\}$ сам свој подниз. □

Претходна теорема вриједи и у случају да је $x = \pm\infty$.

Примјер 5.12. Показати да је низ $x_n = sin\frac{n\pi}{2}$ дивергентан.

Рјешење: $x_{4n} = 0,\ x_{4n+1} = 1$ па је низ дивергентан. □

Дефиниција 5.8. Нека су дати реални низови $\{x_n\}$ и низ $\{y_n\}$ такви да је

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq y_3 \leq y_2 \leq y_1 \text{ и } \lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0,$$

тада се фамилија интервала $[x_n, y_n]$ назива **фамилија уметнутих интервала.**

Може се доказати да за фамилију уметнутих интервала вриједи сљедећа теорема.

Теорема 5.8. Свака фамилија уметнутих интервала има јединствену заједничку тачку. □

Теорема 5.9. (Болцано-Вајерштрас[6]) Сваки ограничен низ има конвергентан подниз.

Доказ: Нека је $\{x_n\}$ ограничен низ и $a, b \in \mathbb{R}$ такви да је $a \leq x_n \leq b$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Бар један од интервала $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ садржи бесконачно много чланова низа $\{x_n\}$. Означимо тај интервал са $[a_1, b_1]$. Вриједи:

- $[a_1, b_1] \subseteq [a, b]$,
- $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$,
- постоји n_1 такав да је $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$.

Поновимо овај поступак са интервалом $[a_1, b_1]$. Добијамо интервал $[a_2, b_2]$ за који вриједи:

- $[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$,
- $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$,
- постоји $n_2 > n_1$ такав да је $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$.

Настављајући овај поступак добијамо бесконачан низ интервала $[a_k, b_k]$ за које вриједи:

- $[a_k, b_k] \subseteq [a_{k-1}, b_{k-1}]$,
- $b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b-a}{2^k}$,
- постоји $n_k > n_{k-1} > \cdots > n_1$ такав да је $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$.

[6] Bernard Bolzano (1781 - 1848), чешки математичар италијанског поријекла
Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815 - 1897), њемачки математичар

На основу теореме о уметнутим интервалима закључујемо да постоји реалан број c такав да је

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = c$$

а затим на основу теореме о два жандара добијамо да је

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c. \ \square$$

Из теореме Болцано-Вајерштраса лако се добија и сљедећа теорема.

Теорема 5.10. Сваки низ има подниз који има коначну или бесконачну граничну вриједност.

5.2. ГРАНИЧНА ВРИЈЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ

Дефиниција 5.9. Кажемо да је тачка x_0 **тачка нагомилавања** скупа $X \subseteq \mathbb{R}$ ако вриједи

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists x \in X \setminus \{x_0\})\ x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon.$$

Ако x_0 није тачка нагомилавања скупа X, кажемо да је x_0 **изолована тачка** скупа X.

- ✓ Дакле, ако је x_0 тачка нагомилавања скупа X, онда свака ϵ −околина тачке x_0 садржи бар једну тачку из X која је различита од x_0.

Може се показати да је тачка x_0 тачка нагомилавања скупа $X \subseteq \mathbb{R}$ ако и само ако постоји низ $\{x_n\}$ такав

$$(\forall n \in \mathbb{N})x_n \in X \setminus \{x_0\} \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

- ✓ Коначан скуп нема тачака нагомилавања.

- ✓ Тачка нагомилавања не мора да припада скупу X.

Примјер 5.13. а) Скуп $\mathbb{N}$ нема тачака нагомилавања.

б)Тачке нагомилавања интервала $(0,1]$ су све тачке из интервала $[0,1]$.

в)Тачке нагомилавања скупа $\mathbb{Q}$ су сви реални бројеви. □

Дефиниција 5.10. Нека је x_0 тачка нагомилавања скупа X. Реалан број L је **гранична вриједност** функције $f: X \to \mathbb{R}$ у тачки x_0 ако вриједи

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \tag{5.5}$$

Пишемо:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ или } f(x) \to L \text{ када } x \to x_0.$$

Примјер 5.14. а) Показати да је $\lim_{x \to 1}(3x - 5) = -2$, б) $\lim_{x \to x_0} x^2 = {x_0}^2, x_0 \in \mathbb{R}$.

Рјешење: а) $|3x - 5 - (-2)| = 3|x - 1| < \epsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\epsilon}{3}$. Дакле, за $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ добијамо

$$(\forall \epsilon > 0)(\forall x \in \mathbb{R})\ 0 < |x - 1| < \frac{\epsilon}{3} \Rightarrow |f(x) - (-2)| < \epsilon$$

па је $\lim_{x \to 1}(3x - 5) = -2$.

б) Имамо

$$|x^2 - {x_0}^2| = |x - x_0||x - x_0 + 2x_0| \leq |x - x_0|(|x - x_0| + 2|x_0|).$$

Сада за $\epsilon > 0$ тражимо δ тако да је $|x^2 - {x_0}^2| \leq \delta(\delta + 2|x_0|) < \epsilon$.

Нека је $\delta = min\left\{1, \frac{\epsilon}{1 + 2|x_0|}\right\}$. Тада је за $0 < |x - x_0| < \delta$

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^2 - {x_0}^2| \leq \delta(\delta + 2|x_0|) < \epsilon$$

па је $\lim_{x \to x_0} x^2 = {x_0}^2$.□

Дефиниција 5.11. Нека је x_0 тачка нагомилавања скупа X. Реалан број L је **десна гранична вриједност** функције $f: X \to \mathbb{R}$ у тачки x_0 и пишемо $\lim_{x \to x_0+} f(x) = L$ ако вриједи

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)\ x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \tag{5.6}$$

Реалан број L је **лијева гранична вриједност** функције $f: X \to \mathbb{R}$ у тачки x_0 и пишемо $\lim_{x \to x_0-} f(x) = L$ ако вриједи

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)\ x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \tag{5.7}$$

Примјер 5.15. За функцију

$$f(x) = sgnx = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

је

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1 \text{ и } \lim_{x \to 0-} f(x) = -1. \square$$

Теорема 5.11. Нека постоји лијева и десна гранична вриједност функције f у тачки x_0. Потребан и довољан услов да функција f има граничну вриједност L у тачки x_0 је

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = L. \square$$

Дефиниција 5.12. Нека је x_0 тачка нагомилавања скупа X. Функција $f: X \to \mathbb{R}$ **тежи ка плус бесконачно** када $x \to x_0$ ако вриједи

$$(\forall K > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)\ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > K. \tag{5.8}$$

Пишемо: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ или $f(x) \to +\infty$ када $x \to x_0$.

Функција $f: X \to \mathbb{R}$ **тежи ка минус бесконачно** када $x \to x_0$ ако вриједи

$$(\forall K > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)\ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -K. \tag{5.9}$$

Пишемо: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ или $f(x) \to -\infty$ када $x \to x_0$.

Примјер 5.16. За функцију

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

је

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty \text{ и } \lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty. \square$$

Дефиниција 5.13. Нека је X скуп неограничен одозго. Реалан број L је **гранична вриједност** функције $f: X \to \mathbb{R}$ када $x \to +\infty$ ако вриједи

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists K > 0)(\forall x \in X)\ \ x > K \ \ \Rightarrow |f(x) - L| \ < \epsilon. \tag{5.10}$$

Пишемо: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ или $f(x) \to L$ када $x \to +\infty$.

Нека је X скуп неограничен одоздо. Реалан број L је **гранична вриједност** функције $f: X \to \mathbb{R}$ када $x \to -\infty$ ако вриједи

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists K > 0)(\forall x \in X)\ \ x < -K \ \ \Rightarrow |f(x) - L| \ < \epsilon. \tag{5.11}$$

Пишемо: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ или $f(x) \to L$ када $x \to -\infty$.

Везу између граничне вриједности низа и граничне вриједности функције даје **Хајнеова теорема**.[7]

[7] Eduard Heine (1821-1881), њемачки математичар

Теорема 5.12. (Хајне) Нека је $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања домена D функције f. Тада је

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \;\; (A \in \overline{\mathbb{R}}) \text{ ако и само ако је } \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = A$$

за сваки низ $\{x_n\}$ такав да је $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$ и $x_n \in D \setminus \{a\}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Доказ: Доказ изводимо за коначне a и A (у осталим случајевима доказ је аналоган).

Нека је $\lim_{x \to a} f(x) = A$. Тада за свако $\epsilon > 0$

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in X) \;\; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon.$$

Ако је низ $\{x_n\}$ такав да је $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$ и $x_n \in D \setminus \{a\}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, тада постоји n_0 такав да за свако $n \geq n_0$ вриједи $|x_n - a| < \delta$. Према томе, за свако $\epsilon > 0$ и $n \geq n_0$ је

$$|f(x_n) - A| < \epsilon$$

односно $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = A$.

Обрнуто, нека је $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = A$ за сваки низ $\{x_n\}$ такав да је $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$ и $x_n \in D \setminus \{a\}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Претпоставимо да $\lim_{x \to a} f(x) \neq A$. То значи да постоји $\epsilon > 0$ тако да за свако $\delta > 0$ за које је $0 < |x - a| < \delta$ постоји x_δ тако да је $|f(x_\delta) - A| \geq \epsilon$. За такво ϵ узмимо $\delta_n = \frac{1}{n}$ и нека је низ $x_n = x_{\delta_n}$. Тада низ $\{x_n\}$ конвергира ка a али низ $\{f(x_n)\}$ не конвергира ка A. □

Коришћењем Хајнеове теореме лако се доказују сљедеће особине граничних вриједности.

Теорема 5.13. Нека је x_0 тачка нагомилавања домена функција f и g. Ако је $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ и $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$ гдје је $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, тада је:

1. $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$,
2. $\lim_{x\to x_0} (\lambda f(x)) = \lambda L_1, \lambda \in \mathbb{R}$,
3. $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = L_1 L_2$
4. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, L_2 \neq 0, g(x) \neq 0.$ □

Примјер 5.17. Одредити граничне вриједности: а) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^3}{x^2+4x-5}$, б) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

Рјешење: а) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^3}{x^2+4x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}-x}{1+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}} = -\infty.$

б) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = \lim_{x\to 4} \frac{2x-8}{x-4} \cdot \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = 2\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{4}{3}.$□

Сљедећа теорема је позната као **теорема о смјени промјенљивих код граничних вриједности** а слиједи из Хајнеове теореме.

Теорема 5.14. Нека је $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ и $\lim_{x\to y_0} g(x) = L$. Ако је $f(x) \neq y_0$ у некој околини тачке x_0 за сваки $x \neq x_0$, тада је $\lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big) = L$. □ [8]

Из теореме о два жандара за низове и Хајнеове теореме добија се и **теорема о два жандара за функције.**

Теорема 5.15. Нека је x_0 тачка нагомилавања домена функција f, g и h. Ако је

$$(\forall x \in X \setminus \{x_0\}) f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ и } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L,$$

тада је $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$. □

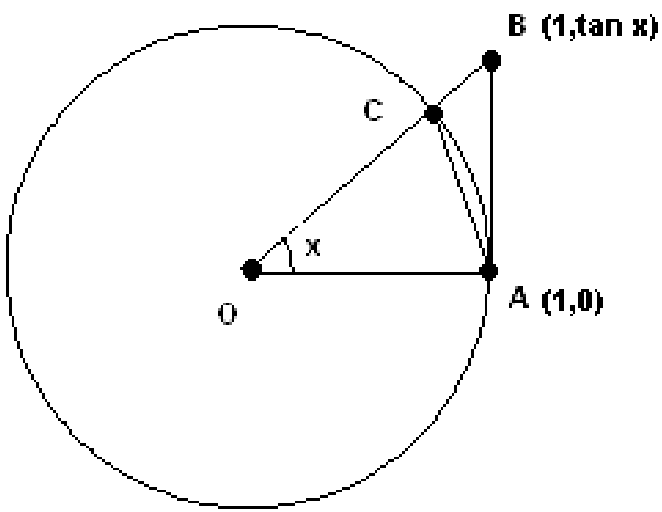
[8] Тврдња теореме вриједи и у случају бесконачних граничних вриједности.

Примјер 5.18. Показати да је

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1. \tag{5.12}$$

Доказ: Показаћемо да вриједи неједнакост

$$cosx < \frac{sinx}{x} < 1, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \tag{5.12$_1$}$$



Слика 5.1.

Посматрајмо кружницу са центром у координатном почетку O полупречника 1. Нека је $A(1,0)$ тачка на кружници и нека је C тачка на кружници којој одговара угао $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Означимо са B пресјечну тачку полуправе OC и тангенте на кружници у тачки A. Тачка B има координате $(1, tgx)$ (Слика 5.1).

Очигледно је површина троугла OAC мања од површине кружног исјечка OAC, која је мања од површине троугла OAB. Дакле,

$$\frac{sinx}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tgx}{2} \Rightarrow sinx < x < tgx, \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Одавде након дијељења са $sinx > 0$ добијамо

$$1 < \frac{x}{sinx} < \frac{1}{cosx} \Rightarrow cosx < \frac{sinx}{x} < 1.$$

Ако је $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ на исти начин добијамо

$$-sinx < -x < -tgx, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

односно неједнакост (5.12_1). Примјеном теореме о два жандара из (5.12_1) добијамо

$$\lim_{x\to 0} cosx \leq \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} \leq 1,$$

тј. добијамо (5.12). □

Примјер 5.19. Доказати да је

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{5.13}$$

Упутство: Користити граничну вриједност $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и теорему о два жандара.

Примјер 5.20. Одредити граничне вриједности:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin2x}{sin3x}$.

Рјешење: а) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left[(1-x)^{-\frac{1}{x}}\right]^{-2} = e^{-2}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin2x}{sin3x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{sin2x}{2x}\cdot 2}{\frac{sin2x}{3x}\cdot 3} = \frac{2}{3}$. □

5.3. НЕПРЕКИДНЕ ФУНКЦИЈЕ

Дефиниција 5.14. Нека је x_0 тачка нагомилавања скупа X. Функција $f: X \to \mathbb{R}$ је **непрекидна у тачки x_0** ако вриједи

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X) \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{5.14}$$

- ✓ Дакле, функција f је непрекидна у тачки x_0 ако је $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- ✓ Ако је функција f непрекидна у свакој тачки скупа $X \subseteq \mathbb{R}$, кажемо да је функција **непрекидна на скупу X**.

Примјер 5.21. За функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, x < 0 \\ x + 1, x \geq 0 \end{cases}$$

је

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1 \text{ и } \lim_{x \to 0-} f(x) = 0.$$

Према Теореми 5.11 функција f нема граничну вриједност у тачки $x = 0$ (јер су лијева и десна гранична вриједност функције различите) па f није непрекидна у тачки $x = 0$. Међутим, функција је у тачки $x = 0$ непрекидна здесна јер је $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1 = f(0)$.□

Особине непрекидних функција су аналогне особинама граничних вриједности функција.

Теорема 5.16. Ако су функције f и g непрекидне у тачки x_0, тада вриједи:

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=f(x_0)+g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}(\lambda f)(x)=\lambda f(x_0), \lambda\in\mathbb{R},$$

$$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=f(x_0)g(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}, g(x_0)\neq 0, g(x)\neq 0. \square$$

Из Теореме 5.16 добијамо да ако су функције f и g непрекидне у тачки x_0 онда су и функције $f+g$, λf, fg и $\frac{f}{g}$ такође непрекидне у тачки x_0.

Показаћемо сада да су основне елементарне функције и елементарне функције непрекидне на свом домену.

Теорема 5.17. Основне елементарне функције су непрекидне на свом домену.

Доказ:

- Непрекидност степене функције слиједи из непрекидности функције $f(x) = x$ и претходне теореме (непрекидност производа непрекидних функција).
- Нека је $x_0 \in \mathbb{R}$ и $\epsilon > 0$. Претпоставимо да је $0 < \epsilon < e^{x_0}$. За експоненцијалну функцију имамо
$$|e^x - e^{x_0}| < \epsilon \Leftrightarrow e^{x_0} - \epsilon < e^x < e^{x_0} + \epsilon \Leftrightarrow \ln(e^{x_0} - \epsilon) < x < \ln(e^{x_0} + \epsilon).$$
Ако узмемо $\delta > 0$ тако да је $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (\ln(e^{x_0} - \epsilon), \ln(e^{x_0} + \epsilon))$ вриједи
$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |e^x - e^{x_0}| < \epsilon$$
па је експоненцијална функција непрекидна.
- Нека је $x_0 \in \mathbb{R}$ и $\epsilon > 0$. За синусну функцију имамо
$$|sinx - sinx_0| = 2\left|sin\frac{x - x_0}{2}cos\frac{x + x_0}{2}\right| \leq 2\left|sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0|$$
јер вриједи неједнакост $|sinx| \leq |x|, x \in \mathbb{R}$. Према томе за дато $\epsilon > 0$ и $\delta = \epsilon$ добијамо
$$|x - x_0| < \epsilon \Rightarrow |sinx - sinx_0| < \epsilon$$
па је синусна функција непрекидна.
- На исти начин изводимо доказ за остале елементарне функције. □

Лако се показује да је и **композиција непрекидних функција такође непрекидна функција**.

Теорема 5.18. Нека је $f: X \to \mathbb{R}, g: Y \to \mathbb{R}, f(X) \subseteq Y$. Ако је функција f непрекидна у x_0 и функција g непрекидна у $y_0 = f(x_0)$, тада је функција $g \circ f: X \to \mathbb{R}$ непрекидна у x_0.

Из теорема 5.16, 5.17 и 5.18 добијамо су су све елементарне функције непрекидне.

Теорема 5.19. Елементарне функције су непрекидне на свом домену.

Ако функција није непрекидна у тачки, кажемо да она у тој тачки има **прекид.** Прекиди функције могу настати из више разлога.

Дефиниција 5.15. Нека је x_0 тачка нагомилавања скупа X. Функција $f: X \to \mathbb{R}$ у тачки x_0 има:

- **привидан или отклоњив прекид** ако постоји коначан $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ али је $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.
- **прекид прве врсте слијева (здесна)** ако постоји коначан $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x)$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)\right)$ али је $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) \neq f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) \neq f(x_0)\right)$.
- **прекид друге врсте слијева (здесна)** ако лијева (десна) гранична вриједност у тачки x_0 не постоји или је бесконачна.

Примјер 5.22. а) Функција

$$f(x) = \begin{cases} arctg\,\dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

у тачки $x = 0$ има прекид прве врсте јер је

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x \to 0+} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

б) Функција

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sinx}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

у тачки $x = 0$ има привидан прекид јер је $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0)$.

в) Функција

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

у тачки $x = 0$ има прекид друге врсте јер је

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty, \lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty. \square$$

За функцију која је непрекидна на сегменту постоје тачке из тог сегмента у којима функција узима највећу, односно најмању вриједност. Вриједи Вајерштрасова теорема.

Теорема 5.20. (Вајерштрас) Ако је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна, онда постоје x_0 и $y_0\in[a,b]$ такви да за све $x\in[a,b]$ вриједи

$$f(x_0)\le f(x)\le f(y_0).$$

Доказ: Докажимо на почетку да је функција f ограничена. Претпоставимо супротно. Тада за сваки $n\in\mathbb{N}$ постоји $x_n\in[a,b]$ тако да је $|f(x_n)|>n$. Пошто је низ $\{x_n\}$ ограничен, на основу Болцано-Вајерштрасове теореме он има конвергентан подниз $\{x_{n_k}\}$. Нека је $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0, x_0\in[a,b]$. Пошто је функција непрекидна, из Хајнеове теореме имамо

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0).$$

С друге стране, пошто је $|f(x_{n_k})|>n_k$ добијамо $\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=+\infty$. Дакле претпоставка да функција није ограничена је довела до контрадикције, па је f ограничена.

Нека је

$$S=sup\{f(x):x\in[a,b]\}.$$

Пошто је f ограничена, S је коначно па за сваки природан број n постоји $y_n\in[a,b]$ тако да је

$$S-\frac{1}{n}<f(y_n)\le S. \tag{5.15}$$

Низ $\{y_n\}$ ограничен, па има конвергентан подниз $\{y_{n_k}\}$. Нека је $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y_0, y_0 \in [a,b]$. Тада због непрекидности функције f имамо

$$\lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(y_0)$$

док из неједнакости (5.15) примјеном теореме о два жандара имамо

$$\lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = S.$$

Дакле, $S = f(y_0)$и функција достиже свој максимум у тачки y_0. Аналогним расуђивањем за функцију $(-f)$ добијамо да она достиже свој максимум у некој тачки $x_0 \in [a,b]$, односно функција f достиже свој минимум у тачки $x_0 \in [a,b]$. Теорема је доказана. □

- ✓ Из Теореме 5.20 добијамо да је непрекидна слика затвореног интервала опет затворен интервал.

- ✓ Функција која је непрекидна на сегменту $[a,b]$ и која на крајевима тог сегмента узима вриједности различитог знака, има нулу из (a,b). Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 5.21. Нека је функција f непрекидна на $[a,b]$ и нека је $f(a)f(b) < 0$. Тада постоји $c \in (a,b)$ тако да је $f(c) = 0$. □

Примјер 5.23. Показати да функција $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ има бар једну нулу на сегменту $[1,2]$.

Рјешење: Пошто је $f(1) = -1$ и $f(2) = 7$ из Теореме 5.21 добијамо да постоји $c \in (1,2)$ тако да је $f(c) = 0$. □

Примједба 6.1. Методом **половљења интервала** можемо прецизније одредити интервал у којем се налази нула функције. Имамо

$$f\left(\frac{3}{2}\right) > 0 \Rightarrow c \in \left(1, \frac{3}{2}\right),$$
$$f\left(\frac{5}{4}\right) < 0 \Rightarrow c \in \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right),$$
$$f\left(\frac{11}{8}\right) < 0 \Rightarrow c \in \left(\frac{11}{8}, \frac{3}{2}\right),$$
$$f\left(\frac{23}{16}\right) < 0 \Rightarrow c \in \left(\frac{23}{16}, \frac{3}{2}\right),$$
$$f\left(\frac{47}{32}\right) > 0 \Rightarrow c \in \left(\frac{23}{16}, \frac{47}{32}\right) = (1.4375, 1.46875), \ldots$$

Вриједност нуле је $c =$1.44762...

Дефиниција 5.16. За функцију $f: X \to \mathbb{R}$ кажемо да је **униформно (равномјерно) непрекидна на** X ако вриједи

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in X)\ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon. \tag{5.15}$$

Примјер 5.24. Показати да је функција $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ униформно непрекидна на $\mathbb{R}$.

Рјешење: Нека је $\epsilon > 0$ и $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$. Тада је

$$(\forall x_1, x_2 \in X)\ |x_1 - x_2| < \frac{\epsilon}{|a|} \Rightarrow |ax_1 + b - ax_2 - b| = |a||x_1 - x_2| < \epsilon$$

па је функција f униформно непрекидна. □

Ако у (5.15) узмемо $\delta_n = \frac{1}{n}$ добијамо потребан и довољан услов за униформну непрекидност функције. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 5.22. Функција $f: X \to \mathbb{R}$ је униформно непрекидна на X ако и само ако

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0$$

за свака два низа $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ из скупа X таква да је $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$. □

Примјер 5.25. Показати да је функција $f(x) = x^2$ није униформно непрекидна на $\mathbb{R}$.

Рјешење: Нека је $x_n = \sqrt{n}$ и $y_n = \sqrt{n+1}$. Тада је $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n - y_n| = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n) - f(y_n)| = 1$ па на основу теореме 5.22 функција није равномјерно непрекидна на $\mathbb{R}$. □

Непрекидност функције на сегменту повлачи и равномјерну непрекидност на том сегменту. Вриједи сљедећа **Канторова**[9] **теорема**.

Теорема 5.23. (Кантор) Ако је функција непрекидна на сегменту, онда је она на том сегменту и равномјерно непрекидна. □

Теорема 5.24. Ако је функција f непрекидна на $[a, +\infty)$ и ако постоји коначан $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ онда је функција f и равномјерно непрекидна на $[a, +\infty)$.

Примјер 5.26. а) Функција $f(x) = arctgx$ је равномјерно непрекидна на $[0, +\infty)$.

б) Функција $f(x) = \ln x$ је равномјерно непрекидна на сегменту $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$, али није равномјерно непрекидна на $(0, +\infty)$.□

[9] Georg Kantor (1845 - 1918), њемачки математичар

ТЕМА 6: ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАЧУН

6.1. ПРВИ ИЗВОД

Дефиниција 6.1. Нека је функција f дефинисана у некој околини тачке x_0. Ако постоји коначна гранична вриједност

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{6.1}$$

кажемо да је $f'(x_0)$ **први извод** или **извод** функције f у тачки x_0. За функцију која има извод у тачки x_0 кажемо да је **диференцијабилна** у тачки x_0.

Смјеном $x - x_0 = h$ једнакост (6.1) можемо писати у облику

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{6.2}$$

или за $h = \Delta x$ у облику

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{6.3}$$

Показати да је:

1. $(c)' = 0$, c константа,
2. $(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$,
3. $(sinx)' = cosx$,
4. $(cosx)' = -sinx$,
5. $(lnx)' = \frac{1}{x},\ x > 0,$ и
6. $(e^x)' = e^x$.

Доказ: 1.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = 0.$$

2. Примјеном биномне формуле добијамо

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}) = nx^{n-1}.$$

3. Користећи формуле за трансформацију разлике тригонометријских функција у производ добијамо

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{sin(x+h)-sinx}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2sin\frac{h}{2}cos\frac{h+2x}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}cos\frac{h+2x}{2}=cosx.$$

4. Као и у 3. добијамо

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{cos(x+h)-cosx}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2sin\frac{h}{2}sin\frac{h+2x}{2}}{h}=$$
$$-\lim_{h\to 0}\frac{sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}sin\frac{h+2x}{2}=-sinx.$$

5. Користећи граничну вриједност $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ и непрекидност логаритамске функције добијамо

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=\ln\lim_{h\to 0}\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}.$$

6.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^{x}}{h}=e^{x}\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}.$$

Уводећи смјену $e^h - 1 = t \Rightarrow h = \ln(t+1)$, добијамо

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(t+1)}{t}} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = 1,$$

па је

$$f'(x) = e^x. \square$$

Дефиниција 6.2. Нека је функција f дефинисана у некој околини тачке x_0. Гранична вриједност

$$f_-'(x_0) = \lim_{h\to 0-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

назива се **лијеви извод** функције f у тачки x_0. **Десни извод** у тачки x_0 је

$$f_+'(x_0) = \lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Функција има извод у тачки x_0 ако и само ако постоје коначни лијеви и десни изводи и једнаки су.

Примјер 6.1. Функција $f(x) = |x|$ нема извод у тачки $x = 0$ јер је

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1$$

и

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = 1. \square$$

Функција $f(x) = |x|$ из претходног примјера је **непрекидна у тачки $x = 0$ али у тој тачки није диференцијабилна**. Међутим, уколико је функција диференцијабилна у некој тачки, онда је она у тој тачки и непрекидна. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 6.1. Ако је функција f диференцијабилна у тачки x_0, онда је она у тој тачки и непрекидна.

Доказ: Ако је функција диференцијабилна у тачки x_0 онда постоји коначан извод

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Одавде добијамо

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \lim_{x\to x_0} (x - x_0) = 0$$

па је

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \square$$

Правила за одређивање извода даје сљедећа теорема.

Теорема 6.2. Ако су функције f и g диференцијабилне у тачки x, тада је

1. $(\alpha f+\beta g)'(x)=\alpha f'(x)+\beta g'(x), \alpha,\beta\in\mathbb{R}$,
2. $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ и
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}, g\neq 0$ у некој околини тачке x.

Доказ: 1. Из особина граничних за вриједности за $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ добијамо

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\alpha f+\beta g)(x+h)-(\alpha f+\beta g)(x)}{h}=$$

$$\alpha\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\beta\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\alpha f'(x)+\beta g'(x).$$

2. Имамо

$$\lim_{h\to 0}\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}g(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Пошто је функција g диференцијабина она је и непрекидна, па је $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$. Сада из последње једнакости добијамо

$$\lim_{h\to 0}\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

3. Слично као у 2, за $g \neq 0$ у некој околини тачке x имамо

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} =$$

$$\frac{1}{g(x)}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x+h)} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{hg(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{hg(x+h)} =$$

$$\frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \square$$

Примјер 6.2. Користећи правило о изводу количника из Теореме 6.2 добијамо

$$(tgx)' = \frac{(sinx)'cosx - (cosx)'sinx}{cos^2x} = \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

и

$$(ctgx)' = \frac{(cosx)'sinx - (sinx)'cosx}{sin^2x} = \frac{-sin^2x - cos^2x}{sin^2x} = -\frac{1}{sin^2x}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}. \square$$

Правило за извод сложене функције даје сљедећа теорема.

Теорема 6.3. Ако је функција f диференцијабилна у тачки x_0 и функција g диференцијабилна у тачки $f(x_0)$, тада је $g \circ f$ диференцијабилна у x_0 и вриједи

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0).$$

Доказ: Нека је $y_0 = f(x_0)$. Из дефиниције извода имамо

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)(f'(x_0) + u(x))$$

$$g(y) - g(y_0) = (y - y_0)(g'(y_0) + v(y))$$

гдје $u(x) \to 0$ кад $x \to x_0$ и $v(y) \to 0$ кад $y \to y_0$. Нека је $y = f(x)$. Користећи горње релације добијамо

$$g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big) = \big(f(x) - f(x_0)\big)\Big(g'\big(f(x_0)\big) + v(y)\Big) =$$
$$(x - x_0)\big(f'(x_0) + u(x)\big)\Big(g'\big(f(x_0)\big) + v(y)\Big).$$

Одавде, за $x \neq x_0$ добијамо

$$\frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{x - x_0} = \big(f'(x_0) + u(x)\big)\Big(g'\big(f(x_0)\big) + v(y)\Big).$$

Ако у горњој једнакости пустимо да $x \to x_0$ тада и $y \to y_0$ (јер $f(x) \to f(x_0)$ због непрекидности функције f). Добијамо $(g \circ f)'(x_0\ ) = g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)$. □

Примјер 6.3. Наћи изводе функција $a)f(x) = e^{x^3}$, б)$f(x) = \ln(sinx)$, в)$f(x) = sin^2x$.

Рјешење: а) $f'(x) = e^{x^3}(x^3)' = 3x^2e^{x^3}$,

б)$f'(x) = \dfrac{1}{sinx}(sinx)' = \dfrac{cosx}{sinx} = ctgx, sinx > 0$,

в) $f'(x) = 2sinx(sinx)' = 2sinxcosx = sin2x$. □

Ако је функција $y = y(x)$ задата **имплицитно** са $F(x, y) = 0$, тада се F диференцира по x и користи се чињеница да је y функција од x. Тако се добија једначина у којој се појављају x, y и y', и њеним рјешавањем по y' долазимо до извода у експлицитном облику.

Примјер 6.4. Наћи извод функције y дате имплицитно са

$$x^3 + y^3 = 3xy.$$

Рјешење: $3x^2 + 3y^2y' = 3y + 3xy' \Rightarrow y'(y^2 - x) = y - x^2$. □

Ако је функција $y = f(x)$ задата **параметраски** у облику $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ онда се извод функције одређује по формули

$$f_x'\big(x(t)\big) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Примјер 6.5. Наћи извод функције $y = y(x)$ дате параметарски са $x = cos^3t, y = sin^3t$.

Рјешење:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3sin^2tcost}{-3cos^2tsint} = -\frac{sint}{cost} = -tgt. \square$$

Однос између извода функције и њене инверзне функције даје сљедећа теорема.

Теорема 6.4. Нека је функција f диференцијабилна, строго монотона у некој околини тачке x_0 и $f(x_0) \neq 0$. Тада је инверзна функција f^{-1} диференцијабилна у тачки $y_0 = f(x_0)$ и вриједи

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказ: Функција f је диференцијабилна, па је и непрекидна. Пошто је функција f монотона, из $f(x) \to f(x_0)$ добијамо да $x \to x_0$. Према томе

$$\lim_{y \to y_0} \frac{(f^{-1})(y) - (f^{-1})(y_0)}{y - y_0} = \lim_{f(x) \to f(x_0)} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}. \square$$

Примјер 6.6. Наћи изводе инверзних тригонометријских функција.

Рјешење: Користећи Теорему 6.4 добијамо

$$(arcsiny)' = \frac{1}{(sinx)'} = \frac{1}{cosx} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

$$(arccosy)' = \frac{1}{(cosx)'} = \frac{1}{-sinx} = \frac{1}{-\sqrt{1 - cos^2x}} = \frac{1}{-\sqrt{1 - y^2}},$$

$$(arctgy)' = \frac{1}{(tgx)'} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2x}} = cos^2x = \frac{1}{1 + tg^2x} = \frac{1}{1 + y^2},$$

$$(arcctgy)' = \frac{1}{(ctgx)'} = \frac{1}{-\frac{1}{sin^2x}} = -sin^2x = -\frac{1}{1 + ctg^2x} = -\frac{1}{1 + y^2}. \square$$

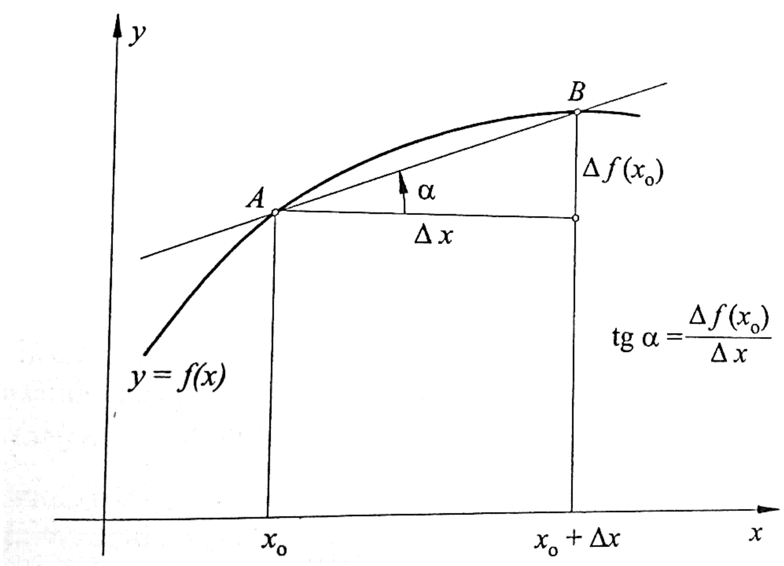
Таблица извода

Функција	Извод		Функција	Извод
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$		$\frac{1}{x^{\alpha}}$	$-\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$
$sinx$	$cosx$		$cosx$	$-sinx$
tgx	$\frac{1}{cos^2x}$		$ctgx$	$-\frac{1}{sin^2x}$
$arcsinx$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$arccosx$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$		$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$
a^x	$a^x lna$		e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{xlna}$		lnx	$\frac{1}{x}$
shx	chx		chx	shx

6.2. ГЕОМЕТРИЈСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА ИЗВОДА. ДИФЕРЕНЦИЈАЛ ФУНКЦИЈЕ

Нека је дата крива $y = f(x)$ и нека тачке $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ и $B(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ одређују сјечицу AB те криве (Слика 6.1). Коефицијент правца сјечице AB је дат са

$$tg\alpha = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$



Слика 6.1.

Ако пустимо да $\Delta x \to 0$, тада тачка $B \to A$, па добијамо тангенту у тачки A. Дакле, коефицијент правца тангенте криве $y = f(x)$ у тачки $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ је

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Одавде добијамо једначине тангенте и норамале у тачки $A\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Једначина тангенте криве је

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), y_0 = f(x_0), \tag{6.4}$$

а **једначина нормале**, уз услов $f'(x_0) \neq 0$,

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \;\; y_0 = f(x_0). \tag{6.5}$$

Примјер 6.7. Наћи једначину тангенте и нормале криве $y = cosx$ у тачки $A\left(\frac{\pi}{4}, y_0\right)$.

Рјешење:

$$y_0 = \; sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, y' = -sinx, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \square$$

Нека је $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ **прираштај функције** у тачки x_0. Из дефиниције извода функције f у тачки x_0, за мало Δx добијамо да је

$$\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Дакле, **прираштај функције апроксимирамо линеарном функцијом** што нам може олакшати испитивање функције и одређивање њених вриједности. Зато посебно изучавамо линеарну функцију $f'(x_0)\Delta x$.

Дефиниција 6.3. Нека је дата диференцијабилна функција f. За дати прираштај Δx дефинишемо **диференцијал функције**

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x. \tag{6.6}$$

Ако је $f(x) = x$ тада је $dx = \Delta x$ па из (6.6) добијамо

$$df(x_0) = f'(x_0)dx. \tag{6.7}$$

Дакле, за мало Δx је $\boldsymbol{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0)}$.

Из (6.7) добијамо **ознаку за извод**

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Примјер 6.8. Израчунати приближну вриједност $\sqrt{26}$.

Рјешење: Нека је $f(x) = \sqrt{x}$. Тада је $df(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$. За $x_0 = 25$ и $\Delta x = 26 - 25 = 1$ имамо

$$\sqrt{26} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}}(26-25) \Rightarrow \sqrt{26} \approx 5 + \frac{1}{10} = 5.10.$$ [10] □

[10] $\sqrt{26}$=5.0990...

Особине диференцијала слиједе из особина извода функције. Вриједи:

1. $d(f+g) = df + dg,$ (адитивност диференцијала)
2. $d(\alpha f) = \alpha df, \alpha \in \mathbb{R}$ (хомогеност диференцијала)
3. $d(fg) = fdg + fdg,$ (диференцијал производа)
4. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{fdg - gdf}{g^2}, g \neq 0$ (диференцијал количника)
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ (диференцијал инверзне функције) □

6.3. ТЕОРЕМЕ О СРЕДЊИМ ВРИЈЕДНОСТИМА

Дефиниција 6.4. Кажемо да функција $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ има **локални минимум (максимум)** у тачки $x_0 \in (a,b)$ ако постоји околина тачке x_0 таква да за свако x из те околине вриједи

$$f(x) \geq f(x_0) \ \big(f(x) \leq f(x_0)\big).$$

Локалне минимуме и локалне максимуме називамо **локалним екстремима.**

Потребан услов за постојање екстрема диференцијабилне функције даје **Фермаова** [11]**теорема.**

Теорема 6.5. (Фермаова теорема) Нека је функција f дефинисана на $[a,b]$, има локални екстрем у тачки $x_0 \in (a,b)$ и у x_0 има извод. Тада је $f'(x_0) = 0$.

Доказ: Претпоставимо да функција f у тачки $x_0 \in (a,b)$ има локални максимум. Тада за свако x у некој околини тачке x_0 важи $f(x) \leq f(x_0)$, па за $x < x_0$ вриједи $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. Одавде добијамо да је $f'_-(x_0) \geq 0$. Пошто претпостављамо да је функција диференцијабилна у x_0 то значи да је $f'(x_0) \geq 0$. Ако је пак $x > x_0$, онда на исти начин закључујемо да је $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$, тј. $f'_+(x_0) \leq 0$, одакле добијамо $f'(x_0) \leq 0$. Према томе, $f'(x_0) = 0$. □

[11] Pierre de Fermat (1601 – 1665), француски математичар

Услов да је први извод једнак нули је потребан али не и довољан да би нека тачка била тачка екстрема, што нам илуструје сљедећи примјер.

Примјер 6.9. За функцију $f(x) = x^3, x \in [-1,1]$ је $f'(0) = 0$ али тачка $x = 0$ није тачка локалног екстрема. Функција је монотоно растућа и достиже минимум у $x = -1$ и максимум у $x = 1$.

Дефиниција 6.5. Тачке у којима је први извод функције f једнак нули зову се **стационарне тачке** функције f.

Напомена 6.1. Из Фермаове теореме добијамо да се екстреми диференцијабилне функције дефинисане на $[a, b]$ достижу у стационарним тачкама. Међутим, тачке a и b могу бити екстреми а да нису стационарне тачке. У Примјеру 6.8 за функцију $f(x) = x^3, x \in [-1,1]$, имамо минимум у $x = -1$ и максимум у $x = 1$ иако ове тачке нису стационарне тачке.

Напомена 6.2. За функцију $f(x) = |x|$ показали смо да нема извод у тачки $x = 0$ (видјети Примјер 6.1). Међутим, функција у тачки $x = 0$ има минимум. Дакле, поред стационарних тачака, тачке могућег екстрема су и тачке у којима први извод не постоји.

Теорема 6.6. (Ролова теорема [12]) Нека за функцију f дефинисану на $[a,b]$ вриједи:

1. f је непрекидна на $[a,b]$,
2. f је диференцијабилна на (a,b),
3. $f(a)=f(b)$.

Тада постоји тачка $c\in(a,b)$ таква да је $f'(c)=0$.

Доказ: Пошто је f је непрекидна на $[a,b]$, на основу Вајерштрасове теореме она достиже свој минимум и максимум на $[a,b]$. Ако се минимум и максимум достижу у тачкама a и b, тада из услова $f(a)=f(b)$ добијамо да је функција једнака константи на $[a,b]$, па је тада $f'(x)=0$ за свако $x\in(a,b)$. У супротном, бар један екстрем је у некој тачки $c\in(a,b)$. На основу Фермаове теореме тада је $f'(c)=0$. Теорема је доказана. □

[12] Michel Rolle (1652 – 1719), француски математичар

Теорема 6.7. (Кошијева теорема [13]) Нека за функције f и g дефинисане на $[a, b]$ вриједи:

1. f и g су непрекидне на $[a, b]$,
2. f и g су диференцијабилне на (a, b),
3. $g'(x) \neq 0$ за свако $x \in (a, b)$.

Тада постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{6.8}$$

Доказ: Због услова $g'(x) \neq 0$ за свако $x \in (a, b)$, на основу Ролове теореме закључујемо да је

$$g(b) \neq g(a).$$

Дефинишимо функцију h:

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x).$$

Тада функција h испуњава услове Ролове теореме, па постоји $c \in (a, b)$ тако да је $h'(c) = 0$. Одавде добијамо (6.8). □

Примјер 6.10. Показати да функције $f(x) = x^2 - 2x + 3$ и $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x + 5$ испуњавају услове Кошијеве теореме на сегменту $[1,4]$ и наћи одговарајућу вриједност за c.

Рјешење: $c = 2$. □

[13] Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), француски математичар

Теорема 6.8. (Лагранжова [14]теорема) Нека за функцију f дефинисану на $[a, b]$ вриједи:

1. f је непрекидна на $[a, b]$,
2. f је диференцијабилна на (a, b).

Тада постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Доказ: Слиједи из Кошијеве теореме за $g(x) = x$. □

Користећи Лагранжову теорему дајемо **довољан услов за монотоност диференцијабилне функције.**

Теорема 6.9. Нека је функција f непрекидна на $[a, b]$ и диференцијабилна на (a, b). Ако је $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) за свако $x \in (a, b)$, тада је функција f монотоно растућа (опадајућа).

Доказ: Нека је $x_1 < x_2$. Тада на основу Лагранжове теореме постоји $c \in (x_1, x_2)$ такво да је

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Ако је $f'(c) > 0$ добијамо $f(x_2) > f(x_1)$ па је f монотоно растућа. Аналогно, ако је $f'(c) < 0$ тада је $f(x_2) < f(x_1)$ па је f монотоно опадајућа. □

[14] Žozef-Luj Lagranž (1736 -1813), италијанско-француски математичар и астроном

Видјели смо да стацинарна тачка не мора да буде тачка екстрема, тј. да услов да је први извод једнак нули није довољан да би нека тачка била тачка екстрема. Користећи Теорему 6.9 долазимо до **довољног услова да би стационарна тачка била тачка екстрема функције**.

Посљедица 6.1. Нека је функција f непрекидна на $[a,b]$ и диференцијабилна на (a,b) и $f'(c)=0$ за неко $c\in(a,b)$. Ако је $f'(x)>0$ за $x\in(a,c)$ и $f'(x)<0$ за $x\in(c,b)$ $(f'(x)<0$ за $x\in(a,c)$ и $f'(x)>0$ за $x\in(c,b))$ онда функција f у тачки c има локални максимум (минимум).

Примјер 6.11. Одредити интервале монотоности и екстреме функције $f(x)=x^3-3x+5$.

Рјешење: $f'(x)=3x^2-3, f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$. Знак првог извода можемо одредити помоћу сљедеће табеле:

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$3x^2-3$	$+$	-	$+$
$f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Дакле, функција је растућа на интервалима $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$ и опадајућа на интервалу $(-1,1)$. Из посљедице 6.1 закључујемо да у тачки $x=-1$ функција достиже максимум а у тачки $x=1$ минимум. Тачка максимума је $M(-1,7)$ а тачка минимума $N(1,3)$. □

Помоћу Кошијеве теореме доказујемо **Лопиталово правило** које се користи за одређивање граничних вриједности. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 6.10. Нека за функције f и g дефинисане и диференцијабилне у некој околини тачке a, осим евентуално у тачки a. Нека вриједи

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,
2. $g'(x) \neq 0$ у некој околини тачке a и
3. постоји $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тада постоји $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и вриједи

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \square \tag{6.9}$$

- ✓ Претходна теорема вриједи и у случају када је $a = \infty$, као и у случају када је $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

- ✓ Неодређени изрази облика $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ могу се свести на неодређене изразе облика $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, па се Лопиталово правило може примијенити и на ове неодређене изразе.

Примјер 6.12. Израчунати

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$, в) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

Рјешење: а) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} \overset{[\infty\cdot 0]}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) \overset{[\infty-\infty]}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+xe^x+e^x}=\frac{1}{2}.$

в) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \lim\limits_{x\to 0+} e^{\ln x^x} = \lim\limits_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}(-x)} = 1.$ □

6.4. ИЗВОДИ ВИШЕГ РЕДА

Изводи вишег реда дефинишу се индуктивно.

Дефиниција 6.6. Извод реда нула $f^{(0)}$ је по дефиницији једнак функцији f. Извод f' називамо **првим изводом** функције f. Ако је дефинисан извод реда $n-1$, тј. $f^{(n-1)}$, тада се **извод реда $\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$ −ти извод)** $f^{(n)}$ дефинише као први извод функције $f^{(n-1)}$. За функцију која у тачки има коначан извод реда n кажемо да је $\boldsymbol{n}$ **пута диференцијабилна**.

Примјер 6.13. Наћи изводе другог и трећег реда функције $f(x) = e^{sinx}$.

Дефиниција 6.7. Кажемо да је функција **конвексна** на (a, b) ако за свако $\lambda \in [0,1]$ и свако $x, y \in (a, b)$ вриједи

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \tag{6.10}$$

Ако за свако $\lambda \in [0,1]$ и свако $x, y \in (a, b)$ вриједи

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \tag{6.11}$$

кажемо да је функција **конкавна** на (a, b).

Ако у (6.10), односно (6.11), вриједи строга неједнакост, кажемо да је f **строго конвексна,** односно **строго конкавна**.

Математичком индукцијом показује се да за функцију која је конвексна на (a, b) вриједи **Јенсенова неједнакост:**

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \tag{6.12}$$

за све $x_k \in (a, b)$ и $\lambda_k \geq 0$ $(k = 1,2, \dots, n)$ за које је $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

Примјер 6.14. Функција $f(x) = x^2$ је конвексна на $\mathbb{R}$ јер је

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = (\lambda x + (1-\lambda)y)^2 = \lambda^2 x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy + (1-\lambda)^2 y^2 =$$

$$\lambda^2 x^2 + \lambda(1-\lambda)x^2 - \lambda(1-\lambda)x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy + \lambda(1-\lambda)y^2 - \lambda(1-\lambda)y^2 + (1-\lambda)^2 y^2 =$$

$$\lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - \lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \leq \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \square$$

Конвексност диференцијабилне функције можемо утврдити помоћу извода функције.

Теорема 6.11. Нека је f диференцијабилна на (a, b). Тада је f конвексна на (a, b) ако и само ако је f' неопадајућа функција.

Доказ: Нека је f конвексна на (a, b) и нека су x_1 и x_2 произвољне тачке из (a, b) такве да је $x_1 < x_2$. За тачку x из (x_1, x_2) постоји $\lambda \in (0,1)$ такво да је $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ па је $\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$. Пошто је f конвексна функција добијамо

$$f(x) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Ако $f(x)$ запишемо у облику

$$f(x) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x)$$

добијамо

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \Rightarrow$$

$$\lambda(f(x) - f(x_1)) \leq (1-\lambda)(f(x_2) - f(x)).$$

Уврштавајући $\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ у горњу неједнакост, добијамо

$$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\big(f(x) - f(x_1)\big) \leq \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\big(f(x_2) - f(x)\big) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Одавде, пуштајући да $x \to x_1$, а затим и $x \to x_2$ добијамо

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

и

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'(x_2),$$

односно $f'(x_1) \le f'(x_2)$ па је f' неопадајућа функција.

Обрнуто, нека је f' неопадајућа функција. Нека су дате тачке $x_1, x, x_2 \in (a, b)$ такве да је $x_1 < x < x_2$. На основу Лагранжове теореме имамо

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), c_1 \in (x_1, x) \text{ и } \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2), c_2 \in (x, x_2).$$

Пошто је f' неопадајућа функција добијамо $f'(c_1) \le f'(c_2)$, тј.

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \Rightarrow$$

$$f(x) \le \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2), \qquad \lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \in (0,1). \square$$

Пошто је на основу Теореме 6.9 функција f' монотоно неопадајућа (нерастућа) ако и само ако је $f'' \geq 0$ ($f'' \leq 0$), из Теореме 6.11 добијамо сљедећу **теорему за испитивање конвексности функције.**

Теорема 6.12. Нека је функција f два пута диференцијабилна на (a, b). Тада је f конвексна (конкавна) на (a, b) ако и само ако је $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) за све $x \in (a, b)$. □

Дефиниција 6.8. Нека је функција f дефинисана на интервалу $(x_0 - h, x_0 + h), h > 0$, при чему је на интервалу $(x_0 - h, x_0)$ конкавна, а на интервалу $(x_0, x_0 + h)$ конвексна или обрнуто. Тада се каже да је тачка $(x_0, f(x_0))$ **превојна тачка** функције f.

Примјер 6.15. Превојна тачка функције $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$ је тачка $(0,0)$ јер је $f''(x) = 6x$ и $f''(x) > 0$ за $x > 0$ и $f''(x) < 0$ за $x < 0$. □

Примјер 6.16. Услов $f''(x) = 0$ је потребан, али не и довољан да би тачка $(x_0, f(x_0))$ била превојна тачка. Нпр. за функцију $f(x) = x^4, x \in \mathbb{R}$ је $f''(0) = 0$ али тачка $(0,0)$ није превојна тачка функције. За ову функцију је $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$ па је функција увијек конвексна. Као и код екстрема функције, да би тачка два пута диференцијабилне функције била превојна тачка, довољан услов је да други извод функције мијења знак при „проласку“ кроз ту тачку. □

6.5. ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА

На почетку уводимо појам и ознаку за **бесконачно мале вишег реда**.

Дефиниција 6.9. Кажемо да је f **бесконачно мала вишег реда** у односу на g кад $x \to a$ ако је

$$f(x) = \omega(x)g(x) \ \ (x \neq a) \text{ и } \lim_{x \to a} \omega(x) = 0.$$

Пишемо:

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \ (x \to a).$$

Из дефиниције бесконачно мале вишег реда слиједи:

1. $C \cdot o(x^n) = o(x^n) \ \ (x \to a), C \in \mathbb{R}$,

2. $o(x^n) + o(x^m) = o\big(x^{min\{n,m\}}\big)$,

3. $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$.

Теорема 6.13. (Тејлорова формула) Нека функција f има коначне изводе до реда $n+1$ у некој околини тачке a. Тада у околини тачке a вриједи Тејлорова формула

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x) \tag{6.13}$$

при чему се $R_n(x)$ може представити у сљедећим облицима

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\big(a+\theta_1(x-a)\big)}{n!}(1-\theta_1)^n(x-a)^{n+1}, \theta_1\in(0,1) \tag{6.14}$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\big(a+\theta_2(x-a)\big)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \theta_2\in(0,1). \tag{6.15}$$

$$R_n(x)=o\big((x-a)^n\big)\ \ (x\to a). \tag{6.16}$$

Доказ: Нека је

$$R_n(x)=f(x)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)-\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2-\cdots-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{6.17}$$

За фиксирано x дефинишимо функцију $t\to g(t)$ са

$$g(t)=f(x)-f(t)-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-\cdots-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Тада је

$$g'(t) = -f'(t) + \left(f'(t) - \frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right) + \left(\frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2\right) + \cdots +$$

$$\left(\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \tag{6.18}$$

Из Лагранжове теореме имамо

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'\big(a+\theta_1(x-a)\big), \theta_1 \in (0,1),$$

па пошто је $g(x) = 0$ и из (6.17) $g(a) = R_n(x)$, добијамо

$$\frac{-R_n(x)}{x-a} = g'\big(a+\theta_1(x-a)\big).$$

Одавде је

$$R_n(x) = -(x-a)g'\big(a+\theta_1(x-a)\big), \theta_1 \in (0,1).$$

Користећи (6.18) сада добијамо

$$R_n(x) = -(x-a)g'\big(a+\theta_1(x-a)\big) =$$

$$(x-a)\frac{f^{(n+1)}\big(a+\theta_1(x-a)\big)}{n!}\big(x-a+\theta_1(x-a)\big)^n =$$

$$\frac{f^{(n+1)}\big(a+\theta_1(x-a)\big)}{n!}(1-\theta_1)^n(x-a)^{n+1}, \theta_1 \in (0,1),$$

па смо доказали (6.13) и (6.14).

Да бисмо доказали (6.15) уведимо функцију $h(t) = (x-t)^{n+1}$. Користећи Кошијеву теорему добијамо

$$\frac{g(x)-g(a)}{h(x)-h(a)} = \frac{g'\big(a+\theta_2(x-a)\big)}{h'\big(a+\theta_2(x-a)\big)}, \theta_2 \in (0,1).$$

Пошто је $h(x) = 0, h(a) = (x-a)^{n+1}$ и $h'(t) = -(n+1)(x-t)^n$ уврштавањем у (6.14) добијамо $R_n(x)$ у облику (6.15). Сада (6.16) слиједи из (6.14) и (6.15) и теорема је доказана. □

Дефиниција 6.10. Полином

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{6.19}$$

се назива **Тејлоров полином степена n** функције f у околини тачке a. Израз $R_n(x)$ се назива **остатак** у Тејлоровој формули (6.13), при чему је (6.14) **Лагранжов облик остатка**, (6.15) **Кошијев облик остатка** и (6.16) **Пеанов облик остатка.**

Ако је у Тејлоровој формули $a = 0$ кажемо да је (6.13) **Маклоренова формула**. Показује се да вриједе сљедеће Маклоренове формуле:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \ \ (x \to 0),$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \ \ (x \to 0),$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \ \ (x \to 0),$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \ \ (x \to 0),$$

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=1}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \ \ (x \to 0), \binom{\alpha}{0} = 1, \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - k + 1)}{k!}, \alpha \in \mathbb{R}. \square$$

Примјер 6.17. Израчунати

$$\lim_{x\to 0}\frac{cosx - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$$

Рјешење: Користећи Маклоренове формуле за функције $cosx$ и $e^{-\frac{x^2}{2}}$ добијамо

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^5)\right)}{x^4} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^5)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{12}+o(x)\right) = -\frac{1}{12}.\square$$

Непосредна посљедица Тејлорове формуле је и резултат који се односи на испитивање екстрема функције.

Теорема 6.14. Нека је a стационарна тачке n пута диференцијабилне функције f и нека је

$$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ и } f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Ако је n непаран број, тада функција f нема екстрем у тачки $x = a$. Ако је n паран број, тада функција f има екстрем у тачки a, и то локални максимум ако је $f^{(n)}(a) < 0$, односно локални минимум ако је $f^{(n)}(a) > 0$. $\square$

Примјер 6.18. Испитати да ли функција

$$f(x) = cos\,x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$

има екстрем у тачки $x = 0$.

Рјешење:

$$f'(x) = -sinx + x - \frac{x^2}{2}, f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = -\cos x + 1 - x, f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = sinx - 1, f'''(0) = -1 \neq 0.$$

Из теореме 6.14 закључујемо да функција нема екстрем у тачки $x = 0$. □

Дефиниција 6.11. Кажемо да је права $x = a$ **вертикална асимптота** функције $y = f(x)$ ако вриједи

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty \text{ и/или } \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty.$$

Права $y = b$ је **десна (лијева) хоризонтална асимптота** функције $y = f(x)$ ако вриједи

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \ \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = b\right).$$

Ако за неко $k \neq 0$ и $n \in \mathbb{R}$ вриједи

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx - n) = 0 \quad \left(\lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx - n) = 0\right)$$

кажемо да је права $y = kx + n$ **десна (лијева) коса асимптота** функције $y = f(x)$.

✓ Бројеве $k \neq 0$ и n у једначини десне косе асимптоте одређујемо из граничних вриједности

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx),$$

а за лијеву косу асимптоту из

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx).$$

6.6. ИСПИТИВАЊЕ ФУНКЦИЈА

Диференцијални рачун се користи за испитивање функција и цртање њихових графика.

Поступак за испитивање функција и цртање графика:

1. Одредити домен функције, парност и периодичност.
2. Одредити нуле и знак функције.
3. Испитати понашање функције на крајевима домена и одредити асимптоте.
4. Примјеном првог извода одредити интервале монотоности и локалне екстреме.
5. Примјеном другог извода одредити интервале конвексности и превојне тачке.
6. Нацртати график функције.

Примјер 6.19. Нацртати график функције

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{2-x}.$$

Рјешење: 1. Домен функције $D = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Функција није ни парна ни непарна, није периодична.

2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Функција има нулу у тачки $x = 1$.

Пресјек са y −осом је тачка $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Знак функције одређујемо помоћу табеле:

x	$(-\infty, 1)$	$(1,2)$	$(2, +\infty)$
$(x-1)^2$	+	+	+
$2-x$	+	+	-
$f(x)$	+	+	-

Дакле, функција је позитивна за $x \in (-\infty, 1) \cup (1,2)$ и негативна за $x \in (2, +\infty)$.

3. $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = -\infty$, па је права $x = 2$ вертикална асимптота.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, па функција нема хоризонталну асимптоту.

Испитујемо да ли функција има косу асимптоту. За k имамо

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - x^2} = -1,$$

док је

$$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-2x+1}{2-x} + x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+1+2x-x^2}{2-x} = 0.$$

Дакле, права $y = -x$ је коса асимптота функције.

4. $f'(x) = \frac{(2x-2)(2-x)+(x-1)^2}{(2-x)^2} = \frac{(x-1)(4+2x+x-1)}{(2-x)^2} = \frac{(x-1)(3-x)}{(2-x)^2}$.

Одређујемо стационарне тачке функције:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3.$$

Дакле, тачке могућих екстрема су стационарне тачке $x = 1$ и $x = 3$.

x	$(-\infty, 1)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(3, +\infty)$
$(x-1)(3-x)$	-	+	+	-
$(2-x)^2$	+	+	+	+
$f'(x)$	-	+	+	-
$f(x)$	↘	↗	↗	↘

Из горње табеле закључујемо да функција у тачки $x = 1$ има локални минимум $M(1,0)$, а у тачки $x = 3$ локални максимум $N(3, -4)$.

5. $f''(x) = \frac{2}{(2-x)^3}$.

Функција нема превојних тачака и знак другог извода зависи од знака полинома $(2-x)^3$. Дакле, за $x \in (-\infty, 2)$ функција је конкавна, а за $x \in (2, +\infty)$ конвексна.

6. График функције: