УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 1- ПРЕДАВАЊА

Академска 2017/2018

ЛИТЕРАТУРА: **Милан Јањић, Математика I, ПМФ, Бања Лука, 2001**

Зоран Митровић, Математика I, Бања Лука, 2016

Наставник: Биљана Војводић

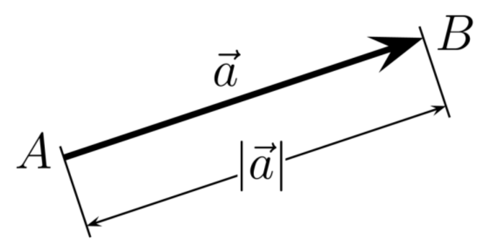
ТЕМА 3: ВЕКТОРСКА АЛГЕБРА

3.1. ОПЕРАЦИЈЕ СА ВЕКТОРИМА

Векторима називамо усмјерене дужи. Користимо ознаку $\overrightarrow{AB}$, гдје је A **почетна** а B **крајња** тачка. Користи се и ознака $\vec{a}$ ако је јасно која је тачка почетна а која крајња.

Вектор је одређен са:

- **интензитетом вектора** који представља дужину усмјерене дужи и означавамо га са $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ или $|\vec{a}|$,



Слика 3.1

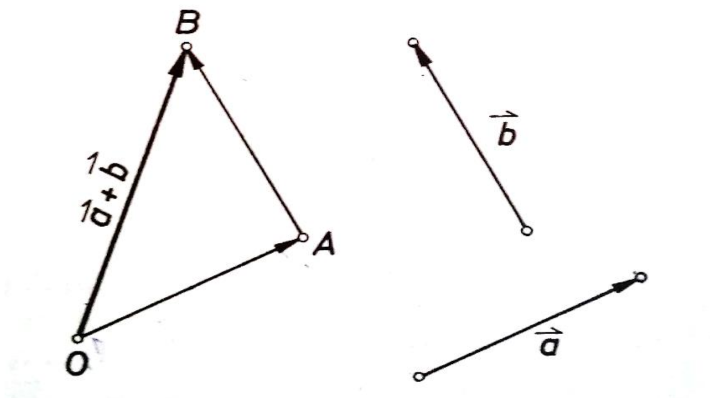
- **правцем вектора** који представља праву на којој вектор лежи и

- **смјером вектора** који је одређен од почетне према крајњој тачки вектора (Слика 3.1).

Дефиниција 3.1. Кажемо да су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **једнаки** ако имају исте интензитете, исте или параделне правце и исте смјерове.

Према томе, ако је B произвољна тачка у простору и $\vec{a}$ дати вектор, тада постоји јединствена тачка A таква да је $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. То значи да се вектори могу паралелно помјерати у простору тако да се сваки вектор може довести у положај да му се почетна или крајња тачка поклапа са унапријед заданом тачком у простору.

У скупу вектора дефинишемо **операције сабирања и множења вектора скаларом**.



Слика 3.2

За дате векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$, збир вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ дефинишемо на сљедећи начин:

Изаберимо произвољну тачку O и одредимо тачке A и B такве да је

$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ (Слика 3.2).

Збир вектора $\vec{a} + \vec{b}$ је вектор $\overrightarrow{OB}$, тј.

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB}.$$

Дакле, из дефиниције сабирања вектора добијамо да „из O можемо стићи у B преко A“, тј. **фундаменталну формулу**

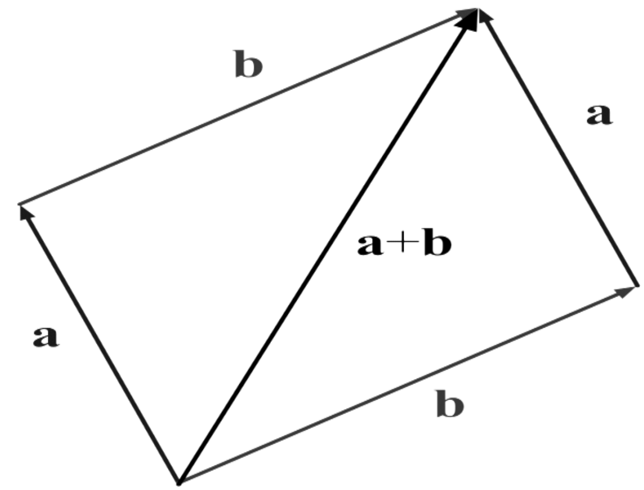
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}\,.$$

Из дефиниције сабирања вектора такође можемо да добијемо и познату неједнакост троугла. Тачке O, A и B на Слици 3.2 представљају врхове троугла чије странице имају дужине $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ и $|\vec{a}+\vec{b}|$, па на основу познатих неједнакости за дужине страница троугла добијамо **неједнакост троугла**

$$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Ако над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$ доведеним у положај у којем имају исту почетну тачку конструишемо паралелограм, онда **вектор дијагонале** чија се почетна тачка поклапа са почетном тачком вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, представља збир вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (Слика 3.3).

Ово је познато **правило паралелограма** за сабирање сила у механици.



Слика 3.3.

Збир сила је резултанта, па се и за збир вектора користи термин **резултанта.**

Као и за сабирање бројева, за сабирање вектора вриједе особине комутативности и асоцијативности, те постојања неутралног и супротног елемента. Улогу нуле у скупу вектора има нула вектор.

Нула вектор је вектор код којег се поклапају почетна и крајња тачка. Означавамо га $\vec{0}$. Дакле, $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$ за сваку тачку A. Интензитет нула вектор је 0, колинеаран је са сваким вектором и нема смисла говорити о његовом смјеру.

Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 3.1. Ако су $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ произвољни вектори, тада вриједи:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (комутативност сабирања)

2. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ (неутрални елемент за сабирање)

3. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (асоцијативност сабирања)

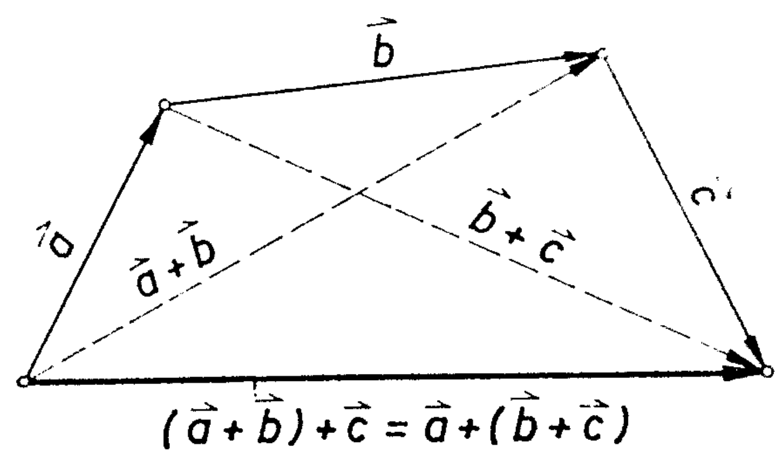
4. За сваки вектор $\vec{a}$ постоји вектор $\overrightarrow{a'}$ такав да је

   $\vec{a}+\overrightarrow{a'}=\overrightarrow{a'}+\vec{a}=\vec{0}$ (постојање супротног вектора)

Доказ: Особине 1. и 2. се лако провјеравају, док особина 3. вриједи на основу Слике 3.4.

Вектор $\overrightarrow{a'}$ из 4. је вектор истог правца и интензитета као и вектор $\vec{a}$, али супротног смјера.

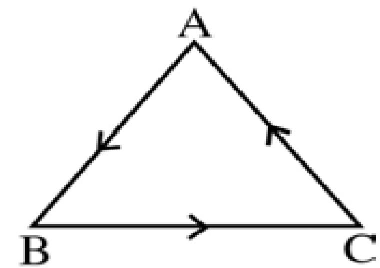
Означавамо га и са $(-\vec{a})$, $\overrightarrow{a'}=-\vec{a}$. □



Слика 3.4.

Примјер 3.1. Ако су A, B, C тјемена троугла, Слика 3.5, тада је

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}\,.$$



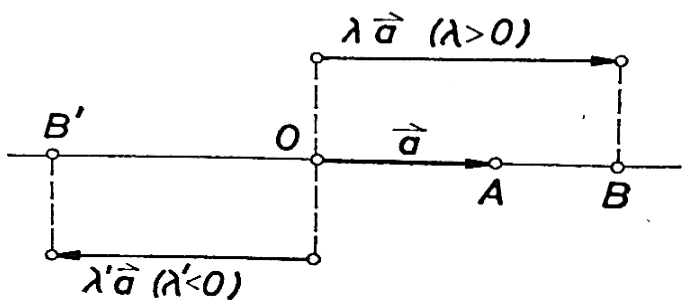
Слика 3.5.

Сада дефинишемо операцију множење вектора скаларом.

Дефиниција 3.2. Производ вектора $\vec{a}$ скаларом λ је вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ који дефинишемо са:

1. ако је $\vec{a} = \vec{0}$ или $\lambda = 0$ онда је $\vec{b} = \vec{0}$,

2. ако је $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\lambda \neq 0$, онда вектор $\vec{b}$ има исти правац као и вектор $\vec{a}$, интензитет једнак $|\lambda||\vec{a}|$ и смјер као и вектор $\vec{a}$ за $\lambda > 0$, односно супротан вектору $\vec{a}$ за $\lambda < 0$ (Слика 3.6).



Слика 3.6

Лако се провјерава да операција множења вектора скаларом има сљедеће особине:

Теорема 3.2. За векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и скаларе α и β вриједи:

1. $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a}) = \beta(\alpha\vec{a})$,
2. $(\alpha + \beta)\,\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$,
3. $\alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$. □

Уколико вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ подијелимо његовим интензитетом, добијамо вектор $\vec{a}_0$ чији је интензитет једнак јединици

$$\vec{a}_0 = \pm\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Вектор $\vec{a}_0$ називамо **јединичним вектором**. Сваки ненулти вектор има два јединична вектора супротних смјерова.

Сада дефинишемо колинеарне векторе и дајемо њихову карактеризацију помоћу множења вектора скаларом.

Дефиниција 3.3. Кажемо да су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **колинеарни** ако имају исте правце и пишемо $\vec{a} \parallel \vec{b}$. У супротном кажемо да су вектори **неколинеарни**.

Теорема 3.3. Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су колинеарни ако и само ако за $\vec{a} \neq \vec{0}$ постоји скалар α такав да је $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.

Доказ: Ако је $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ из Дефиниције 3.2 слиједи да $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имају исте правце, односно да су колинеарни. Обрнуто, претпоставимо да су ненулти вектори колинеарни, тј. да имају исте правце. Нека је $\alpha = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имају исте смјерове, односно $\alpha = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имају супротне смјерове. Тада је $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ и теорема је доказана. □

3.2. ЛИНЕАРНА НЕЗАВИСНОСТ ВЕКТОРА

Нека је дат скуп вектора $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ и скуп скалара $\{\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Дефиниција 3.4. Вектор

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n \tag{3.1}$$

се назива **линеарна комбинација** вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Скалари $\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ се називају **коефицијенти линеарне комбинације**.

Ако су у линеарној комбинацији (3.1) сви коефицијенти једнаки нули, кажемо да је (3.1) **тривијална** линеарна комбинација вектора $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$. У противном, кажемо да је линеарна комбинација **нетривијална.**

Дефиниција 3.5. За скуп вектора $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ кажемо да је **линеарно зависан** ако постоје скалари $\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ који нису сви једнаки нули такви да је

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}. \tag{3.2}$$

Ако скуп није линеарно зависан, кажемо да је **линеарно независан.**

Према томе, скуп вектора $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ је **линеарно зависан ако постоји нетривијална линеарна комбинација $\boldsymbol{\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{a}_n}$ која даје нула вектор**.

Такође, скуп вектора $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ је **линеарно независан ако вриједи**

$$\boldsymbol{\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0}. \tag{3.3}$$

Из дефиниције линеарне зависности, јасно је да је сваки **скуп вектора који садржи нула вектор линеарно зависан**, као и да је сваки **надскуп линеарно зависног скупа такође линеарно зависан скуп.**

У наставку разматрамо линеарну (не)зависност вектора и **тражимо максималан број линеарно независних вектора** у скупу слободних вектора.

На почетку посматрамо два вектора и дајемо карактеризацију њиховог односа у смислу линеарне (не)зависности.

Теорема 3.4. Два ненулта вектора су линеарно зависна ако и само ако су колинеарни.

Доказ: Претпоставимо да су два ненулта вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарна. Тада из Теореме 3.2 добијамо да постоји скалар α такав да је $\vec{b} = \alpha\vec{a}$. Пошто је $\vec{b}$ ненулти вектор мора бити $\alpha \neq 0$. Дакле, имамо нетривијалну линеарну комбинацију $\alpha\vec{a} + (-1)\vec{b}$ такву да је $\alpha\vec{a} + (-1)\vec{b} = \vec{0}$, па су вектори линеарно зависни.

Обрнуто, ако су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линеарно зависни ненулти вектори, тада постоји нетривијална линеарна комбинација $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ таква да је $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$. Бар један од скалара је различит од нула и претпоставимо да је нпр. $\alpha \neq 0$. Тада добијамо $\vec{b} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{a}$, односно вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су колинеарни. □

Из Теореме 3.4. закључујемо да у скупу слободних вектора **постоји скуп од два линеарно независна вектора** (јер постоје два неколинеарна вектора).

Сада испитујемо линеарну независност скупа од три вектора.

На почетку дефинишемо компланарност вектора.

Дефиниција 3.6. За векторе доведене у заједнички почетак који се налазе у једној равни, кажемо да су **компланарни.** У противном, кажемо да су вектори **некомпланарни.**

Сљедећа теорема даје карактеризацију линеарне зависности три вектора.

Теорема 3.5. Три вектора су линеарно зависна ако и само ако су компланарни.

Доказ: Претпоставимо да је скуп $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ линеарно зависан. Тада постоје скалари α, β и γ од којих је бар један различит од нуле такви да је

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}.$$

Ако је нпр. $\gamma \neq 0$ имамо

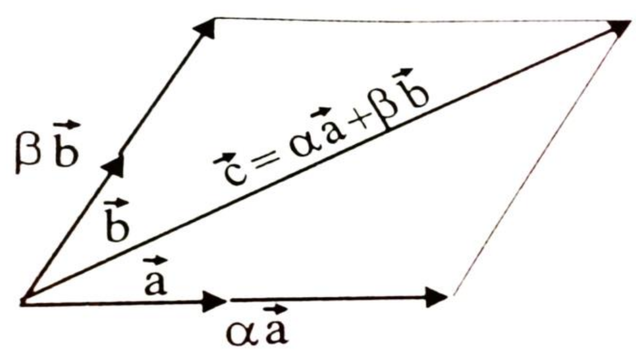
$$\vec{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\vec{a} - \frac{\beta}{\gamma}\vec{b}.$$

Ако је скуп $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ линеарно зависан, тада су на основу Теореме 3.4 вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни. Тада је вектор $\vec{c}$ линеарна комбинација колинеарних вектора, тј. вектори $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ колинеарни па леже у истој равни.

Ако је скуп $\{\vec{a},\vec{b}\}$ линеарно независан, тј. вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколинеарни, тада је вектор $\vec{c}$ линеарна комбинација вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пошто се свака линеарна комбинација вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ налази у равни одређеној овим векторима, и вектор $\vec{c}$ налази у равни одређеној векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Према томе, вектори $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ су компланарни.

Обрнуто, нека су вектори $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ компланарни. Ако постоје два вектора у скупу $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ која су колинеарна, тада су они на основу Теореме 3.4 и линеарно зависни. То би значило да је и скуп $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ линеарно зависан и теорема је у том случају доказана.

Претпоставимо сада да су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколинеарни.



Слика 3.7.

Повуцимо кроз крајњу тачку вектора $\vec{c}$ праве паралелне векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Добијамо паралелограм чија је дијагонала вектор $\vec{c}$ (Слика 3.7).

Тада је вектор $\vec{c}$ једнак збиру вектора $\alpha\vec{a}$ и $\beta\vec{b}$, тј. $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. Дакле, $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+(-1)\vec{c}=\vec{0}$ па су вектори $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ линеарно зависни. □

Пошто постоји скуп од три некомпланарна вектора, из Теореме 3.5 закључујемо да **постоји и скуп од три линеарно независна вектора.**

Сада испитујемо линеарну (не)зависност четири вектора и показујемо да у простору слободних вектора **не постоји скуп од четири линеарно независна вектора.** Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 3.6.

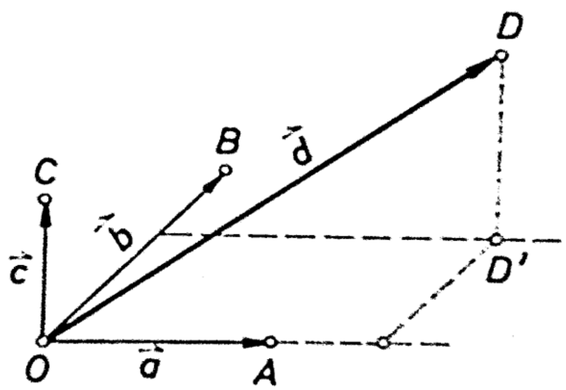
1. Сваки скуп од 4 вектора у простору је линеарно зависан.

2. Ако су $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ три некомпланарна вектора и $\vec{d}$ било који вектор у простору, тада постоје јединствени скалари α, β и γ такви да је

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}. \tag{3.4}$$

Доказ:

1. Нека је дат скуп од четири вектора $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$. Ако би вектори $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ били линеарно зависни тада би и скуп $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ био линеарно зависан, па ћемо претпоставити да је скуп $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ линеарно независан. Тада су вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ на основу Теореме 3.5 некомпланарни. Доведимо сада сва четири вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ у заједнички почетак, тачку O, Слика 3.8.



Слика 3.8.

Повуцимо кроз крајњу тачку вектора $\vec{d}$ праву паралелну вектору $\vec{c}$, која сијече раван одређену векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$ у тачки D'. Јасно је да је $\overrightarrow{D'D} = \gamma\vec{c}$, као и да је $\overrightarrow{OD'} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Према томе, добијамо

$$\vec{d} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{D'D} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

тј. вектори $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\,\}$ су линеарно зависни.

2. Из доказа у 1. добијамо да уколико су $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарни вектори и $\vec{d}$ произвољан вектор, тада постоје скалари α, β и γ такви да вриједи (3.4). Докажимо да су ти скалари јединствени. Претпоставимо супротно, да постоје и скалари $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ такви да је

$$\vec{d} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}. \tag{3.5}$$

Из (3.4) и (3.5) одузимањем добијамо

$$(\alpha - \alpha_1)\vec{a} + (\beta - \beta_1) + \vec{b}(\gamma - \gamma_1)\vec{c} = \vec{0}. \tag{3.6}$$

Пошто су вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарни они су линеарно независни, па из (3.3) и (3.6) добијамо $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1$, односно да је разлагање вектора $\vec{d}$ у правцу вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ јединствено.□

Из теорема 3.6. и 3.5 добијамо да је **максималан број линеарно независних вектора у скупу слободних вектора једнак 3, и да се сваки вектор из простора вектора може на јединствен начин представити као линеарна комбинација било која три некомпланарна вектора.**

Дакле, било која три некомпланарна вектора су линерано независна и генеришу простор вектора, па кажемо да чине **базу** простора вектора.

Ако је $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ база простора вектора и

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

тада се скалари α, β и γ називају **компонентама или координатама** вектора $\vec{d}$ у односу на базу $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

Примјер 3.2. Нека вектори $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ чине базу простора вектора и нека су дати вектори:

$\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$ и $\vec{q} = 6\vec{a} + 9\vec{b} + 14\vec{c}$.

а) Показати да вектори $\{\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}\}$ такође чине базу простора вектора.

б) Одредити координате вектора $\vec{q}$ у односу на базу $\{\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}\}$.

Рјешење: а) Покажимо да су вектори $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ линеарно независни. Из

$$\alpha\vec{m} + \beta\vec{n} + \gamma\vec{p} = \vec{0}$$

добијамо

$$(\alpha + \beta + \gamma)\vec{a} + (\alpha + \beta + 2\gamma)\vec{b} + (\alpha + 2\beta + 3\gamma)\vec{c} = \vec{0}.$$

Пошто су вектори $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ вектори базе, они су некомпланарни, односно линеарно независни, па добијамо систем

$$\begin{gathered}\alpha + \beta + \gamma = 0\\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0\\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0.\end{gathered}$$

Лако се види да овај систем има само тривијално рјешење, тј. $\alpha = \beta = \gamma = 0$ па су вектори $\{\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}\}$ линеарно независни, односно некомпланарни па чине базу простора вектора.

б) Разложимо вектор $\vec{q}$ у бази $\{\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}\}$. Тада је $\vec{q} = \alpha\vec{m} + \beta\vec{n} + \gamma\vec{p}$ па добијамо систем

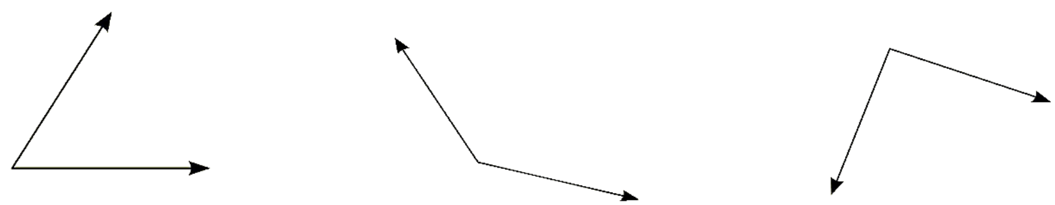
$$\begin{gathered}\alpha + \beta + \gamma = 6\\ \alpha + \beta + 2\gamma = 9\\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 14.\end{gathered}$$

Рјешење овог система је $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$. Дакле

$$\vec{q} = \vec{m} + 2\vec{n} + 3\vec{p}.$$

3.3. ДЕКАРТОВ КООРДИНАТНИ СИСТЕМ

Дефиниција 3.7. Угао између два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ који су доведени у заједнички почетак је мањи од два угла који захватају ти вектори. Означавамо га са $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$.



Дакле, $0 \leq \measuredangle(\vec{a},\vec{b}) \leq \pi$. Ако су вектори истог правца и смјера онда је тај угао 0, а ако су истог правца а супротног смјера онда је тај угао π.

Ако је

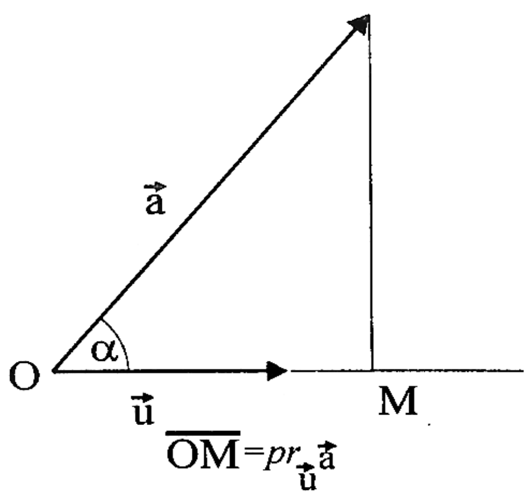
$$\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$$

кажемо да су вектори међусобно **ортогонални или нормални и пишемо** $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Осом називамо оријентисану праву. Смјер осе бирамо избором једног од два могућа јединична вектора који су паралелни тој правој.

Дефиниција 3.8. Нека је дат вектор $\vec{a}$ и оса p одређена јединичним вектором $\vec{u}$, и нека је $\measuredangle(\vec{a},\vec{u}) = \alpha$. **Пројекција вектора** $\vec{a}$ на осу p је вектор одређен ортогоналним пројекцијама крајњих тачака вектора на осу p, при чему је смјер вектора пројекције исти као и смјер вектора $\vec{u}$ ако је угао α оштар, односно супротан смјеру вектора $\vec{u}$ ако је угао α туп.

Алгебарска пројекција вектора $\vec{a}$ на осу p је **интензитет вектора пројекције** на осу p, узет са предзнаком $+$ ако је угао α оштар, односно са предзнаком $-$ ако је угао α туп. Алгебарску пројекцију вектора $\vec{a}$ на осу p значавамо са $\boldsymbol{pr_{\vec{u}}\vec{a}}$.



Слика 3.9.

Са слике 3.9 видимо да је

$$pr_{\vec{u}}\vec{a} = |\vec{a}|cos\measuredangle(\vec{a},\vec{u}). \tag{3.7}$$

Из дефиниције алгебарске пројекције добијамо да, ако је $pr_{\vec{u}}\vec{a} = 0$, тада су вектори $\vec{a}$ и $\vec{u}$ узајамно ортогонални.

Сада ћемо показати да је алгебарска пројекција збира једнаку збиру пројекција, и алгебарска пројекција производа вектора скаларом производу скалара и алгебарске пројекције.

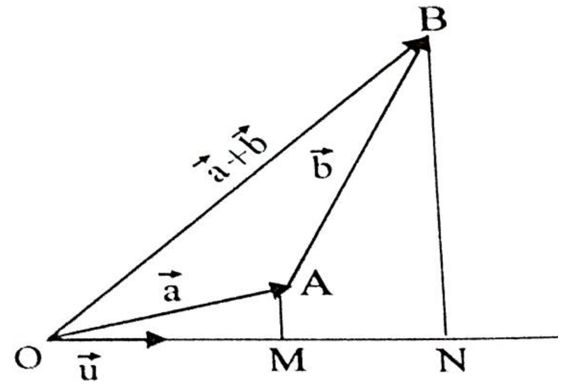
Теорема 3.7. Нека је дат вектор $\vec{a}$ и оса p одређена јединичним вектором $\vec{u}$. Тада је:

1. $pr_{\vec{u}}(\vec{a}+\vec{b}) = pr_{\vec{u}}\vec{a} + pr_{\vec{u}}\vec{b}$
2. $pr_{\vec{u}}(\alpha\vec{a}) = \alpha pr_{\vec{u}}\vec{a}$.

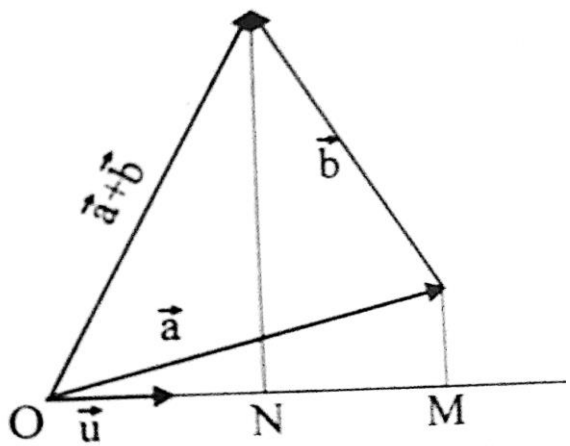
Доказ:

1. Претпоставимо да вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ граде оштре углове са вектором $\vec{u}$ и да је $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ (Слика 3.10) Тада је

$$pr_{\vec{u}}(\vec{a}+\vec{b}) = |\overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{OM}| + |\overrightarrow{MN}| = pr_{\vec{u}}\vec{a} + pr_{\vec{u}}\vec{b}.$$



Слика 3.10.



Слика 3.11.

Уколико вектор $\vec{a}$ гради оштар и $\vec{b}$ тупи угао са вектором $\vec{u}$ (Слика 3.11) тада имамо

$$pr_{\vec{u}}(\vec{a}+\vec{b}) = |\overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{OM}| - |\overrightarrow{ON}| =$$

$$pr_{\vec{u}}\vec{a} + pr_{\vec{u}}\vec{b}.$$

Аналогно доказујемо једнакост за случај да вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ граде тупе углове са вектором $\vec{u}$.

2. Нека је $\alpha > 0$. Тада је $pr_{\vec{u}}(\alpha\vec{a}) = |\alpha\vec{a}|cos\measuredangle(\alpha\vec{a},\vec{u}) = \alpha|\vec{a}|cos\measuredangle(\vec{a},\vec{u}) = \alpha pr_{\vec{u}}\vec{a}$.

   Ако је $\alpha < 0$ тада је $pr_{\vec{u}}(\alpha\vec{a}) = |\alpha\vec{a}|cos\measuredangle(\alpha\vec{a},\vec{u}) = -\alpha|\vec{a}|\cos(\pi - \measuredangle(\vec{a},\vec{u})) = \alpha pr_{\vec{u}}\vec{a}$. □

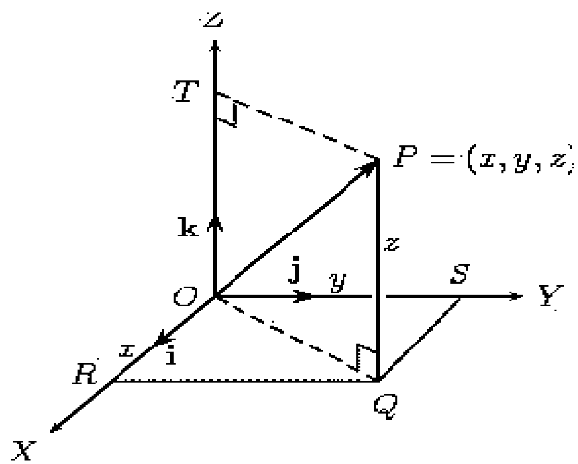
Дефиниција 3.9. Три некомпланарна вектора $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ који су доведени у заједнички положај чине **триједар**. За триједар кажемо да је **десни (триједар десне оријентације)** ако вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ имају смјерове као прсти на десној руци ($\vec{a}$ палац, $\vec{b}$ кажипрст и $\vec{c}$ средњи прст). Аналогно дефинишемо **лијеви триједар (триједар лијеве оријентације).**

Цикличком замјеном мјеста векторима триједра не мијења се његова оријентација. Зато триједри $\{\vec{b},\vec{c},\vec{a}\}$ и $\{\vec{c},\vec{a},\vec{b}\}$ имају исту оријентацију као и триједар $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$. Ако два вектора у триједру мијењају редослијед, онда триједар мијења оријентацију. Зато триједри $\{\overrightarrow{a},\vec{c},\vec{b}\}$, $\{\vec{c},\overrightarrow{b},\vec{a}\}$ и $\{\overrightarrow{b},\vec{a},\vec{c}\}$ имају супротну оријентацију у односу на триједар $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$.

Уведимо у простор десни триједар који чине три међусобно ортогонална јединична вектора $\vec{\imath},\vec{\jmath}$ и $\vec{k}$ са заједничким почетком у тачки О. Осу вектора $\vec{\imath}$ називамо x $-$осом или апсцисом, осу вектора $\vec{\jmath}$ y $-$осом или ординатом и осу вектора $\vec{k}$ z $-$осом или апликатом. Тако је у простор уведен **Декартов правоугли координатни систем**.

Координатни систем омогућава да се положај сваке тачке у простору одреди помоћу три координате.

Ако је P тачка у простор а $\overrightarrow{OP}$ вектор положаја те тачке (Слика 3.12), тада су компоненете тог вектора у односу на векторе $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ и $\vec{k}$ једнаке пројекцијама вектора на координатне осе, а те су пројекције управо x, y и z.



Слика 3.12.

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \tag{3.8}$$

или

$$\overrightarrow{OP} = (x, y, z) \tag{3.9}$$

Кажемо да тројка (x, y, z) представља **координате тачке** P и означавамо са $P(x, y, z)$.

Дакле, ознака (x, y, z) се користи двојако, за означавање координате тачке у простору, или за означавање вектор положаја те тачке. Из контекста је јасно у ком смислу се користи ова ознака.

У односу на базу $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ вектор $\vec{a}$ је облика

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x, a_y, a_z) \tag{3.10}$$

при чему су a_x, a_y, a_z пројекције вектора $\vec{a}$ на x, y и z осу, респективно.

Одавде добијамо да је **интензитет вектора** $\vec{a}$ једнак

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}. \tag{3.11}$$

Алгебарске операције са векторима у облику (3.10) обављају се помоћу његових компоненти. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 3.8. За векторе $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ и скалар α вриједи:

1. $\alpha\vec{a} = \alpha a_x\vec{i} + \alpha a_y\vec{j} + \alpha a_z\vec{k} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z)$,

2. $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$,

3. вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су колинеарни ако и само ако су им компоненете пропорционалне, тј.

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z},$$

4.ако су $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ двије тачке у простору тада је

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \ \square \tag{3.12}$$

Из (3.11) и (3.12) добијамо формулу за растојање d између тачака $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$d = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{3.13}$$

3.4. СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД ВЕКТОРА

Дефиниција 3.10. Скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ означавамо са $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и дефинишемо са

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \, cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}). \tag{3.14}$$

Нека је $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$. Тада је $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ако и само ако је $cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$.

Дакле, **скаларни производ два ненулта вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је једнак нули ако и само ти вектори ортогонални,** тј. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Из (3.7) и дефиниције скаларног производа добијамо

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| pr_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| pr_{\vec{b}} \vec{a}. \tag{3.15}$$

Особине скаларног производа даје сљедећа теорема.

Теорема 3.9. 1. $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$, при чему за колинеарне векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вриједи знак једнакости,

2. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$,

3. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$,

4. $\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})$ и

5. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$.

Доказ: 1. Јасно је да вриједи

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})| \le |\vec{a}||\vec{b}|.$$

Знак једнакости вриједи ако је

$$|cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})| = 1,$$

односно ако је $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = 0 \vee \measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi,$ тј. ако су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни.

Особине 2. и 3. слиједе из дефиниције скаларног производа.

4. Из (3.15) и особина пројекције, имамо

$$(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = |\vec{b}|pr_{\vec{b}}(\alpha\vec{a}) = \alpha|\vec{b}|pr_{\vec{b}}\vec{a} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}),$$
$$\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b}) = |\vec{a}|pr_{\vec{a}}(\alpha\vec{b}) = \alpha|\vec{a}|pr_{\vec{a}}\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

5. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|pr_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|pr_{\vec{a}}\vec{b} + |\vec{a}|pr_{\vec{a}}\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$. □

Примјер 3.3. Ако је $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$, израчунати скаларни производ

$$(3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b}).$$

Рјешење: Користећи особине скаларног производа из Теореме 3.9 добијамо

$$(3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b}) = 6\,\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{b} \cdot \vec{a} - 9\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$6|\vec{a}|^2 - 7\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\left|\vec{b}\right|^2 = 24 - 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \; cos\frac{\pi}{3} - 27 = -24. \square$$

Користећи особине скаларног производа из Теореме 3.9, сада ћемо показати како се рачуна скаларни производ ако су вектори дати својим координатама у Декартовом правоуглом координатном систему.

Скаларни производи јединичних вектора $\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ су дати у сљедећој таблици:

$\cdot$	$\vec{\boldsymbol{\imath}}$	$\vec{\boldsymbol{\jmath}}$	$\vec{\boldsymbol{k}}$
$\vec{\boldsymbol{\imath}}$	1	0	0
$\vec{\boldsymbol{\jmath}}$	0	1	0
$\vec{\boldsymbol{k}}$	0	0	1

Сада се лако доказује сљедећа теорема.

Теорема 3.10. Нека су дати вектори $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}$. Тада је

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \tag{3.16}$$

$$cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}\sqrt{{b_x}^2 + {b_y}^2 + {b_z}^2}}, \tag{3.17}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Доказ: Примијењујући скаларне производе вектора $\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ и особине скаларног производа добијамо

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_x\vec{\imath}+a_y\vec{\jmath}+a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{\imath}+b_y\vec{\jmath}+b_z\vec{k}\right)=$$

$$a_xb_x\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}+a_yb_y\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}+a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Особина (3.17) се добија из дефиниције скаларног производа и (3.16), док трећа особина слиједи из (3.16) и чињенице да су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогонални ако и само ако је $\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$ □

Примјер 3.4. Одредити угао између вектора

$$\vec{a}=2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+\vec{k},\ \ \vec{b}=-\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+3\vec{k}.$$

Рјешење:

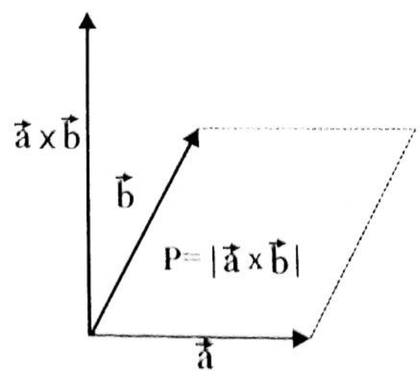
$$cos\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{-2+6+3}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+4+9}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

4.2. ВЕКТОРСКИ ПРОИЗВОД ВЕКТОРА

Дефиниција 3.11. Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ називамо **векторским производом** ненултих вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ако је он одређен на сљедећи начин:

1. Интензитет $|\vec{a} \times \vec{b}|$ је једнак површини паралелограма конструисаног над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
2. Правац вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ је нормалан на раван вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
3. Смјер вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ је такав да је триједар $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ десне оријентације.

Ако је $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, дефинишемо $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.



Слика 3.13.

Површина паралелограма конструисаног над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је једнака $|\vec{a}|h$, гдје је h висина паралелограма. Ако је $\theta = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$, тада је $h = |\vec{b}|sin\theta$, па добијамо

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|sin\theta. \tag{3.18}$$

Одавде добијамо релацију

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 sin^2\theta = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 cos^2\theta = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - \left(|\vec{a}||\vec{b}|cos\theta\right)^2$$

тј. реалацију

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2.$$

Горња релација даје **везу између скаларног производа и интензитета векторског производа**.

Видјели смо да је скаларни производ два ненулта вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је једнак нули ако и само су ти вектори ортогонални.

Ако је векторски производ два ненулта вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ једнак нули, тада је $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$ па је $sin\theta = 0$, тј. вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су колинеарни. Обрнуто, уколико су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни, јасно је да је тада $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Дакле, **векторски производ два ненулта вектора је једнак нули ако и само су ти вектори колинеарни**.

Лако се може показати да **векторски поизвод има сљедеће особине**:

Теорема 3.11. Нека су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ дати вектори и α скалар. Тада вриједи:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$,
2. $\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b})$,
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Примјер 3.5. Нека су α, β и γ углови у тјеменима троугла A, B и C, респективно. Ако је $|\overrightarrow{BC}| = a, |\overrightarrow{AC}| = b$ и $|\overrightarrow{AB}| = c$, доказати синусну теорему

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}.$$

Рјешење: У троуглу са тјеменима A, B, C вриједи

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}. \tag{3.19}$$

Множећи у (3.19) векторски слијева вектором $\overrightarrow{AB}$ добијамо

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}.$$

Множећи у (3.19) векторски здесна вектором $\overrightarrow{AC}$ добијамо

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -\left(\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA}\right)$$

Према томе

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA}\right|.$$

Сада из (3.18) добијамо

$$bcsin\alpha = acsin\beta = absin\gamma$$

односно синусну теорему.□

Сада ћемо показати како се векторски производ рачуна уколико су вектори задани својим координатама у Декартовом правоуглом координатном систему.

Векторски производи вектора $\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ дати у сљедећој таблици:

$\times$	$\vec{\boldsymbol{\imath}}$	$\vec{\boldsymbol{\jmath}}$	$\vec{\boldsymbol{k}}$
$\vec{\boldsymbol{\imath}}$	0	$\vec{\boldsymbol{k}}$	$-\vec{\boldsymbol{\jmath}}$
$\vec{\boldsymbol{\jmath}}$	$-\vec{\boldsymbol{k}}$	0	$\vec{\boldsymbol{\imath}}$
$\vec{\boldsymbol{k}}$	$\vec{\boldsymbol{\jmath}}$	$-\vec{\boldsymbol{\imath}}$	0

Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 3.12. Нека су дати вектори $\vec{a}=a_x\vec{\imath}+a_y\vec{\jmath}+a_z\vec{k},\ \vec{b}=b_x\vec{\imath}+b_y\vec{\jmath}+b_z\vec{k}.$ Тада је

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{\imath}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{\jmath}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k} \tag{3.20}$$

односно

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{\boldsymbol{\imath}} & \vec{\boldsymbol{\jmath}} & \vec{\boldsymbol{k}}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \tag{3.21}$$

Доказ: (3.20) слиједи из Теореме 3.11 и векторских производа вектора $\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$. Детерминанта из (3.21) је други начин записивања формуле (3.20). □

Примјер 3.6. Од јединичних вектора нормалних на векторима $\vec{a}=-2\vec{\imath}-6\vec{\jmath}-\vec{k},\ \ \vec{b}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$ одредити јединични вектор $\vec{c}$ који са вектором $\vec{d}=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ заклапа оштар угао.

Рјешење:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}}\\ -2 & -6 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k},\ \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{9}=3$$

па је

$$\vec{c}=\pm\frac{1}{3}\left(2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}\right).$$

Изаберимо онај јединични вектор $\vec{c}$ који заклапа оштар угао са вектором $\vec{d}$. Имамо

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=\pm\frac{1}{3}(4+1)=\pm\frac{5}{3}$$

и с друге стране

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=\sqrt{5}cos\measuredangle\left(\vec{c},\vec{d}\right).$$

Дакле,

$$cos\measuredangle\left(\vec{c},\vec{d}\right)=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Пошто се тражи вектор $\vec{c}$ који заклапа оштар угао са вектором $\vec{d}$, то значи да је $cos\measuredangle\left(\vec{c},\vec{d}\right)>0$ па бирамо јединични вектор са знаком +. Дакле, тражени јединични вектор је вектор

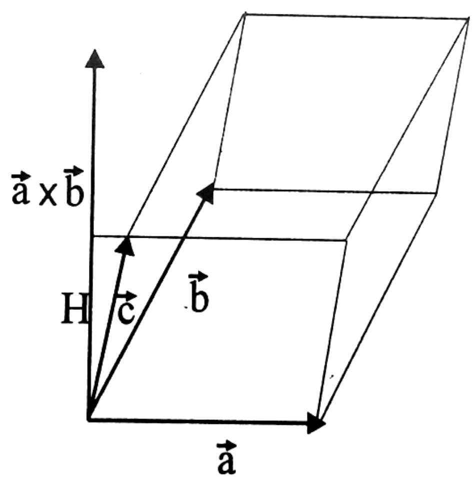
$$\vec{c}=\frac{2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}}{3}.\square$$

Сада доказујемо формулу за рачунање запремине паралелепипеда конструисаног над векторима $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ помоћу скалрног и векторског производа.

Теорема 3.13. Ако су $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ три некомпланарна вектора, тада је запремина V паралелепипеда конструисаног над векторима $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ једнака

$$V = \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\right|. \tag{3.22}$$

Доказ: Запремина паралелепипеда је $V = BH$, гдје је B површина базе и H висина паралелепипеда. Ако за базу узмемо паралелограм одређен векторима $\vec{a}, \vec{b}$ тада је $B = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$.



Вектор висине има правац вектора $\vec{a} \times \vec{b}$, па је H једнако пројекцији вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{a} \times \vec{b}$.

Та пројекција је позитивна, ако вектори $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$ граде оштар угао (у случају када је триједар $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ десне оријентације), а негативна ако вектори $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$ граде тупи угао (у случају када је триједар $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ лијеве оријентације).

Дакле, ако је триједар $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ десне оријентације користећи (3.15) добијамо

$$V = \left|(\vec{a} \times \vec{b})\right| \cdot pr_{(\vec{a}\times\vec{b})}\vec{c} = \left|(\vec{a} \times \vec{b})\right| \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}{\left|(\vec{a} \times \vec{b})\right|} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}.$$

Ако је $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ лијеве оријентације добијамо $V = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$. Узимајући апсолутну вриједност производа $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ добијамо (3.22) и теорема је доказана. □

3.6. МЈЕШОВИТИ ПРОИЗВОД ВЕКТОРА

Дефиниција 3.12. Мјешовити производ вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ је скалар

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}. \tag{3.23}$$

Означавамо га са $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

Особине мјешовитог производа вектора даје сљедећа теорема.

Теорема 3.14. За векторе $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ вриједи:

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$,

2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$,

3. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$,

4. вектори $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ су компланарни ако и само ако је $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$,

5. ако је $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ и $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$, тада је

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{3.24}$$

Доказ: У Теореми 3.13 смо показали да је запремина паралелепипеда конструисаног над некомпланарним векторима $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ једнака $\left|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\right|$, при чему је $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ позитивно ако је триједар $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ десне оријентације, односно негативно ако је триједар лијеве оријентације. Триједри $\{\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\}$ и $\{\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\}$ имају исту оријентацију као триједар $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ па добијамо једнакости 1. док триједри $\{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\}$ и $\{\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\}$ имају супротну оријентацију па добијамо једнакости 2. (Видјети стр. 23).

Особина 3. слиједи из комутативности скаларног производа вектора, док собина 4. слиједи из дефиниције векторског и скаларног производа. Једнакост (3.24) се добија рачунањем мјешовитог производа преко векторског и скаларног производа. □

На основу релације (3.22) из Теореме 3.13 и формуле за рачунање мјешовитог производа (3.24), добијамо **формулу за рачунање запремине $\boldsymbol{V}$ паралелепипеда конструисаног над векторима $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}$ и $\vec{\boldsymbol{c}}$**

$$V = \left|\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}\right|. \tag{3.25}$$

Примјер 3.7. Нека је $\vec{a} = p\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}, \vec{c} = 3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 4p\vec{k}, p \in \mathbb{R}$. Израчунати запремину паралелепипеда конструисаног над векторима $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$. Одредити вриједност параметра p за коју су дати вектори компланарни и за добијено p разложити вектор $\vec{c}$ по правцима вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Рјешење: Користећи формулу (3.25) добијамо

$$V = \left\| \begin{matrix} p & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4p \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} p & 1+2p & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4p \end{matrix} \right\| = |-(4p(1+2p) - 12)| =$$

$$|8p^2 + 4p - 12| = 4|2p^2 + p - 3|.$$

Вектори су компланарни ако и само ако је $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = 0$, тј. ако и само ако је

$$2p^2 + p - 3 = 0.$$

Добијамо $p_1 = 1, p_2 = -\frac{3}{2}$. За $p = 1$ добијамо $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$, а за $p = -\frac{3}{2}$ је $\vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$.

Примјер 3.8. Израчунати запремину тетраедра чији су врхови $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3), D(x_4,y_4,z_4)$.

Рјешење: Запремина тетраедра конструисаног над векторима $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ једнака је шестини запремине паралелепипеда конструисаног над векторима $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$. Према томе

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{matrix}\right\|. \tag{3.26}$$

Примјер 3.9. Тачке $A(2,00), B(0,3,0), C(0,0,6)$ и $D(2,3,8)$ су тјемена тетраедра. Одредити висину повучену из врха D и запремину тетраедра**.**

Рјешење: Примјењујући формулу (3.26) добијамо

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} -2 & 3 & 0\\ -2 & 0 & 6\\ 0 & 3 & 8\end{matrix}\right\|=14$$

Пошто је $V=\frac{1}{6}BH,$ гдје је B површина базе и H висина паралелепипеда повучене из врха D, одредимо површину паралелограма над векторима $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=-2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}=-2\vec{\imath}+6\vec{k}$. Имамо

$$\vec{a}\times\vec{b}=18\vec{\imath}+12\vec{\jmath}+6\vec{k}$$

па је $B=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=6\sqrt{14}$. Према томе, $H=\frac{6V}{B}=\sqrt{14}$.

3.7. ПОЈАМ ЕУКЛИДОВОГ ПРОСТОРА

Видјели смо да се вектори могу изражавати преко уређених тројки и да се основне рачунске операције са векторима изводе преко компоненти вектора. Показали смо такође да је максималан број линеарно независних вектора у скупу вектора један три и зато кажемо да је простор слободних вектора димензије три. Ово нам даје основу за уопштавање на простор чија димензија може да буде било који природан број n.

Посматрајмо скуп

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1,2, \dots, n\} \tag{3.27}$$

уређених n −торки из скупа $\mathbb{R}$.

Дефинишимо сабирање елемената из $\mathbb{R}^n$ и множење елемената из $\mathbb{R}^n$ скаларом.

Нека су $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ из $\mathbb{R}^n$ и α произвољан скалар. Збир елемената x и y дефинишемо са

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \tag{3.28}$$

а производ αx са

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n). \tag{3.29}$$

Нека су x, y и z из $\mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и нека је $\mathbf{0} = (0,0, \dots ,0)$. Тада вриједи:

1. $x, y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^n$,

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$,

3. $x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x$,

4. $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(\exists x' \in \mathbb{R}^n)\ x + x' = x' + x = \mathbf{0}$,

5. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

6. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,

8. $1 \cdot x = x$.

У Теореми 3.10 смо показали да се скаларни производ изражава преко компоненти вектора. То нам омогућава да уведемо појам скаларног производа и у $\mathbb{R}^n$.

Дефиниција 3.13. Нека су $x = (x_1, x_2, \dots , x_n), y = (y_1, y_2, \dots , y_n)$ из $\mathbb{R}^n$. **Скаларни производ** елемената x и y означавамо са $\langle x, y\rangle$ и дефинишемо са

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_ky_k. \tag{3.30}$$

Лако се провјерава да **скаларни производ има сљедеће особине**.

Теорема 3.15. Нека су x, y и z из $\mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада вриједи:

1. $\langle x, x\rangle \geq 0, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$,
2. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,
3. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,
4. $\alpha\langle x, y\rangle = \langle \alpha x, y\rangle = \langle x, \alpha y\rangle$.

Дефиниција 3.14. Скуп $\mathbb{R}^n$ са дефинисаним операцијама сабирања (3.28), множења скаларом (3.29) и скаларним производом (3.30) назива се **Еуклидов [1] простор.**

[1] Еуклид из Александрије (323. п.н.е.?- 270. п.н.е.?) антички математичар

Одредићемо сада **базу и димензију простора** $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$**.** Посматрамо скуп вектори $\{e_1, e_1, \dots, e_n\}$,

$$e_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots, 0), i = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема 3.16. Вектори $\{e_1, e_1, \dots, e_n\}$ чине базу простора $\mathbb{R}^n$.

Доказ: **Треба показати да су вектори** $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ **линеарно независни и да се сваки вектор из** $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ **може представити као линеарна комбинација ових вектора.** Покажимо прво да су вектори линеарно независни. Нека је

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \mathbf{0}.$$

Користећи правила за сабирање и множење скаларом, добијамо

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

па су вектори $\{e_1, e_1, \dots, e_n\}$ линеарно независни.

Покажимо сада да се сваки вектор из $\mathbb{R}^n$ може представити као линеарна комбинација ових вектора. Ако је $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ из $\mathbb{R}^n$, тада можемо писати

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

па је вектор x линеарна комбинација вектора $\{e_1, e_1, \dots, e_n\}$. Дакле, вектори $\{e_1, e_1, \dots, e_n\}$ чине базу простора $\mathbb{R}^n$. □

Вектори $\{e_1, e_1, \dots, e_n\}$ имају још једну важну особину. Наиме, лако се види из (3.30) да је

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0, i \neq j$$

тј. да су **вектори $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ међусобно нормални**.

Доказаћемо на крају једну важну неједнакост, познату као неједнакост Коши-Буњаковског.

Теорема 3.17. (Неједнакост Коши-Буњаковског) За реалне бројеве $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ вриједи

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 \sum_{k=1}^{n} {y_k}^2. \tag{3.31}$$

Доказ: Из Теореме 3.15 за свако $\alpha \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle + \alpha \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle,$$

тј.

$$\alpha^2 \langle y, y \rangle + 2\alpha \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle \geq 0.$$

Пошто је горњи квадратни трином ненегативан за свако $\alpha \in \mathbb{R}$, његова дискриминанта је непозитивна, тј.

$$4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Увршатавајући у последњу неједнакост у скаларни производ из (3.30) добијамо (3.31) и теорема је доказана. □

ТЕМА 4: АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

Скуп тачака у геометрији се обично назива **геометријско мјесто тачака**.

Једначина геометријског мјеста тачака је једначина (или систем једначина) са непознатим x, y, z коју (који) задовољавају координате само оних тачака $M(x, y, z)$ које припадају том геометријском мјесту тачака.

Основни геометријски објекти су **тачка, права и раван**.

Претпостављаћемо да нам је задан Декартов правоугли координатни систем и да се све координате односе на тај систем. За фигуре у равни подразумијеваћемо да се налазе у xy −равни.

На почетку се подсјећамо на формулу за растојање између тачака. [2]

Растојање d између тачака $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ је

$$d = \left|\overrightarrow{M_1 M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \tag{4.1}$$

а уколико се тачке $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ налази у равни, тада је

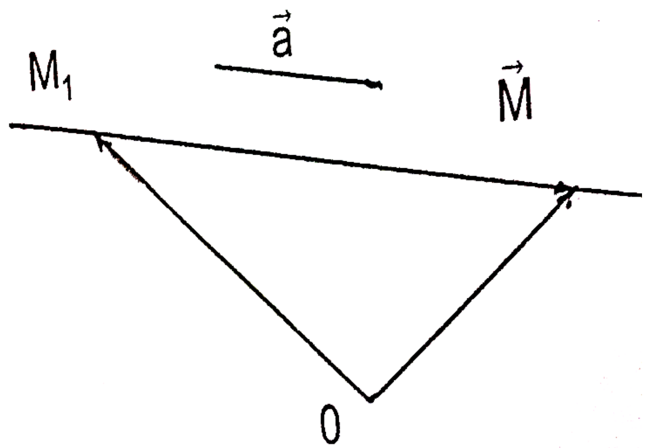
$$d = \left|\overrightarrow{M_1 M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

[2] Видјети формулу (3.13)

4.1. ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ

4.1.1. Једначина праве кроз тачку у правцу вектора праве

Права је одређена тачком и вектором правца праве, тј. вектором који је колинеаран са правом. Одредимо једначину праве p која пролази кроз тачку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ у правцу вектора праве $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.



Слика 4.1

Ако је $M(x, y, z)$ произвољна тачка на правој p, тада је вектор $\overrightarrow{M_1M}$ колинеаран са вектором $\vec{a}$ (Слика 4.1). Према томе, постоји $t \in \mathbb{R}$ тако да је

$$\overrightarrow{M_1M} = t\vec{a}.$$

Ако ставимо $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\quad \vec{r_1} = \overrightarrow{OM_1}$ добијамо

$$\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r_1},$$

односно једначину праве p у облику

$$\vec{r} = \vec{r_1} + t\vec{a}, \qquad -\infty < t < \infty. \tag{4.2}$$

Једначина (4.2) представља **једначину праве p у векторском облику.**

Прелазећи на координате тачке M_1 и вектора $\vec{a}$, из (4.2) добијамо једначину праве p у облику

$$x = x_1 + ta_x$$
$$y = y_1 + ta_y \tag{4.3}$$
$$z = z_1 + ta_z, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Једначина (4.3) представља једначину праве p **у параметарском облику.**

Елиминицијом параметра t из (4.3) добијамо **канонске или главне једначине** праве p

$$\frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y} = \frac{z - z_1}{a_z}. \tag{4.4}$$

Уочимо да се у једначини праве (4.4) у имениоцима могу појављивати нуле. То значи да је одговарајућа компонента вектора правца једнака нули, тј. да је вектор правца, односно права, нормална на одговарајућу осу.

Примјер 4.1. Написати једначину праве p која пролази кроз тачку $M(-1,2,1)$ и паралелна је правој q: $x = 2 - 3t,\ y = -1 + t,\ z = 3 + 2t\ (-\infty < t < \infty)$.

Рјешење: Пошто је вектор $\vec{a} = (-3,1,2)$ вектор праве q и пошто је $p \parallel q$, вектор $\vec{a}$ је вектор праве p. Из (4.3) и (4.4) добијамо

$$x = -1 - 3t,$$

$$y = 2 + t,$$

$$z = 1 + 2t, \qquad -\infty < t < \infty$$

односно

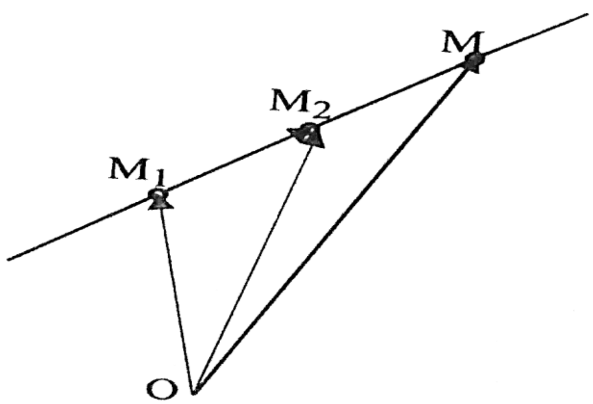
$$p\colon \frac{x+1}{-3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

4.1.2. Једначина праве кроз двије тачке

Одредимо једначину праве p која пролази кроз тачке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, Слика 4.2. С обзиром да је вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ заправо вектор правца $\vec{a}$ из (4.2), из (4.3) добијамо једначину праве **у параметарском облику**

$$
\begin{aligned}
x &= x_1 + t(x_2 - x_1),\\
y &= y_1 + t(y_2 - y_1)\\
z &= z_1 + t(z_2 - z_1), \qquad -\infty < t < \infty,
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

док из (4.4) добијамо **канонске или главне једначине** праве p кроз двије тачке:



Слика 4.2

$$
\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{4.6}
$$

Примјер 4.2. Наћи растојење између паралелних правих

$$p: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2} \text{ и } q: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

Рјешење: Узмимо произвољну тачку на правој p, нпр. тачку $A(1,0,0)$. Ако је B произвољна тачка на правој q, тада је $B(-1+2t,\ 1+t,\ 2+2t)$ за неко $t \in \mathbb{R}$. Пошто растојање између правих p и q представља растојање између тачке A и њене ортогоналне пројекције на праву q, одредићемо тачку B која је ортогонална пројекција тачке A на праву q.

То значи да је вектор $\overrightarrow{AB} = (-2+2t, 1+t, 2+2t)$ нормалан на вектор праве q, тј. на вектор $\vec{a} = (2,1,2)$. Према томе,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow 2(-2+2t) + 1 + t + 2(2+2t) = 0 \Rightarrow t = -\tfrac{1}{9} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(-\tfrac{20}{9}, \tfrac{8}{9}, \tfrac{16}{9}\right).$$

Дакле,

$$d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\frac{400}{81} + \frac{64}{81} + \frac{256}{81}} = \sqrt{\frac{720}{81}} = \frac{4\sqrt{5}}{3}.$$

4.1.3. Услов пресјека двију правих

Одредићемо услов под којим се сијеку праве p и q

$$p: \frac{x-x_1}{a_x} = \frac{y-y_1}{a_y} = \frac{z-z_1}{a_z}, \quad q: \frac{x-x_2}{b_x} = \frac{y-y_2}{b_y} = \frac{z-z_2}{b_z}.$$

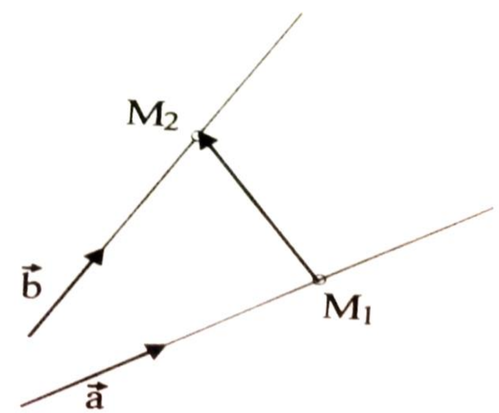
Ако се праве p и q сијеку оне леже у једној равни. То значи да су вектори

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ и } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

компланарни, Слика 4.3. Показали смо да је за компланарност вектора потребан и довољан услов да је њихов мјешовити производ једнак нули (видјети Теорему 3.14). Према томе

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{b} = 0, \text{ тј.}$$



Слика 4.3.

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0. \tag{4.7}$$

Услов (4.7) је **услов пресјека правих $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$**.

Примјер 4.3. Одредити пресјечну тачку правих p и q:

$$p: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{-2}, \qquad q: \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{7}.$$

Рјешење: Уочимо да је за праве p и q испуњен услов пресјека двије праве (4.7) јер је

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Нека је A пресјечна тачка правих p и q. Тада је $A(2t, 1-t, -1-2t)$ за неко $t \in \mathbb{R}$ и $A(1-3u, u, 2+7u)$ за неко $u \in \mathbb{R}$. Дакле, добијамо систем:

$$2t = 1-3u, 1-t = u, -1-2t = 2+7u.$$

Рјешење система је $t = 2, u = -1$ и пресјечна тачка је $A(4, -1, -5)$.

4.1.4. Мимоилазне праве

Двије праве које не леже у једној равни називају се **мимоилазне праве.**

Примјер 4.4. Наћи растојење између правих

$$p: \frac{x}{1} = \frac{y+5}{6} = \frac{z}{1} \text{ и } q: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+5}{-2}.$$

Рјешење: Очигледно је да праве p и q нису паралелне. Такође, $\overrightarrow{M_1M_2}=(-2,-5,0)$, $\vec{a} = (1,6,1)$ и $\vec{b} = (3,-2,-2)$ и

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -45 \neq 0$$

па се праве p и q не сијеку. Праве p и q су мимоилазне и њихово растојање је растојање између пресјечних тачака са њиховом заједничком нормалом. Одредимо заједничку нормалу правих p и q.

Претпоставимо да заједничка нормала n правих p и q сијече праве p и q у тачкама A и B респективно. Тада постоје t и u такви да је $A(t,-5+6t,t)$ и $B(2+3u,-2u,-5-2u)$. Вектор $\overrightarrow{AB} = (2+3u-t,-2u+5-6t,-5-2u-t)$ је нормалан на векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ па је

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{a} = 0 \text{ и } \overrightarrow{AB} \cdot \vec{b} = 0.$$

Добијамо систем

$$2+3u-t+6(-2u+5-6t)-5-2u-t=0,$$

$$3(2+3u-t)-2(-2u+5-6t)-2(-5-2u-t)=0$$

тј.

$$-38t-11u=-27,$$

$$11t+17u=-6.$$

Рјешење система је $t=1, u=-1.$ Дакле, $A(1,1,1)$ и $B(-1,2,-3)$, $\overrightarrow{AB}=(-2,1,-4)$ па је заједничка нормала n правих p и q

$$n\colon\ \frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-4}.$$

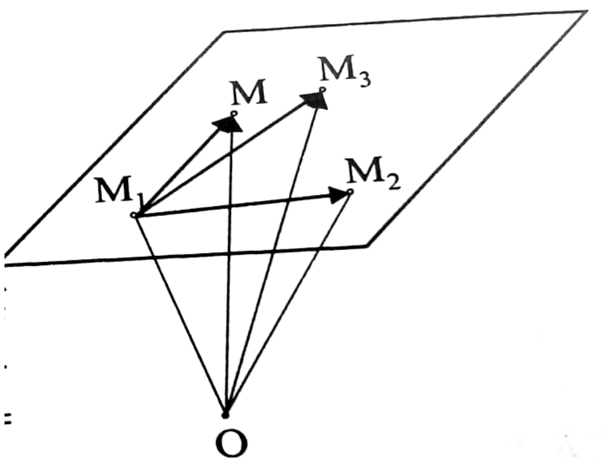
Растојање између правих p и q је

$$d=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{21}.$$

4.2. ЈЕДНАЧИНА РАВНИ

4.2.1. Једначина равни кроз три тачке

Раван је одређена са три неколинеарне тачке. Одредимо једначину равни која пролази кроз неколинеарне тачке $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Нека је $M(x, y, z)$ било која тачка која припада равни. Тада су вектори $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ компланарни (Слика 4.4), па је на основу Теорема 3.14 њихов мјешовити производ једнак нули, $\left(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}\right) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$.



Слика 4.4.

Одавде добијамо **једначину равни кроз три тачке**

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.8}$$

4.2.2. Векторска једначина равни. Параметарске једначине равни

Пошто су вектори $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ компланарни (Слика 4.4) они су линеарно зависни, па постоје скалари u и v такви да је

$$\overrightarrow{M_1M} = u\overrightarrow{M_1M_2} + v\overrightarrow{M_1M_3}. \tag{4.9}$$

Нека је $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\overrightarrow{M_1M_3} = \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тада је $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = \vec{r} - \vec{r_1}$ па из (4.9) добијамо

$$\vec{r} = \vec{r_1} + u\vec{a} + v\vec{b}, \qquad u, v \in \mathbb{R}. \tag{4.10}$$

Једначина равни (4.10) представља **векторску једначину равни**.

Прелазећи на координате тачке M_1 и вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из (4.10) добијамо

$$\begin{aligned} x &= x_1 + ua_x + vb_x, \\ y &= y_1 + ua_y + vb_y, \\ z &= z_1 + ua_z + vb_z, \qquad u, v \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Једначине (4.11) представљају **параметарске једначине равни**.

4.2.3. Општи облик једначине равни

Вектор $\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b}$ је нормалан на раван коју одређују вектори $\vec{a}$ и $\vec{b},$ па је нормалан и на вектор $\overrightarrow{M_1 M} = \vec{r} - \vec{r_1}$, тј.

$$(\vec{r} - \vec{r_1}) \cdot \vec{N} = 0. \tag{4.12}$$

Нека је

$$\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}.$$

Уочимо да је бар један од коефицијената A, B, C различит од нуле. Тада из (4.12) добијамо

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \tag{4.13}$$

Једначина (4.13) представља **једначину равни са датим вектором нормале кроз дату тачку**.

Из (4.13) добијамо

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{4.14}$$

гдје је бар један од коефицијената A, B, C различит од нуле и $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$.

Облик једначине равни (4.14) се назива **општи облик једначине равни**.

Испитајмо сада положаје равни у простору у зависности од коефицијената $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ из (4.14).

Ако су два коефицијента у (4.14) једнака нули, тада имамо једначине равни које су паралелене некој од координатних равни.

Нпр. ако је $A = B = 0$ тада је вектор нормале колинеаран са вектором $\vec{k}$ и добијамо једначину равни која је паралелна са xy −равни, $Cz + D = 0$, односно $z = c$ гдје је $c = -\frac{D}{C}$.

Ако је $A = C = 0$ тада је вектор нормале колинеаран са вектором $\vec{j}$ и добијамо једначину равни која је паралелна са xz −равни, односно $y = b$.

Ако је $B = C = 0$ тада је вектор нормале колинеаран са вектором $\vec{i}$ и добијамо једначину равни која је паралелна са yz −равни, односно $x = a$.

Ако је у (4.14) само један од коефицијената једнак нули, тада добијамо равни које су паралелене некој од координатних оса.

Нпр. ако је $A = 0$, тада је вектор нормале окомит на вектор $\vec{i}$ па је раван паралелна са x −осом.

Дакле $By + Cz + D = 0$ је једначина равни која је паралелна са x −осом, док су $Ax + Cz + D = 0$, односно $Ax + By + D = 0$, једначине равни које су паралелне са y −осом, односно z −осом, респективно.

Примјер 4.5. Написати једначину равни која садржи тачке $A(1,-1,2)$ и $B(0,2,3)$ и паралелна је z −оси.

Рјешење: Пошто је раван паралелна z −оси њена једначина је облика

$$Ax + By + D = 0.$$

Уврштавајући тачке A и B у горњу једначину, добијамо

$$A - B + D = 0, \qquad 2B + D = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2}Dx - \frac{1}{2}Dy + D = 0$$

па је једначина равни $3x + y - 2 = 0$.

4.2.4. Сегментни облик једначине равни

Уколико су сви коефицијенти A, B, C у (4.14) различити од нуле, тада раван није паралелна ниједној од координатних оса па сијече сваку од њих.

Пресјечне тачке са координатним осама x, y и z су $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$ и $c = -\frac{D}{C}$ респективно. Ако је $D \neq 0$, дијељењем са D у (4.14) добијамо

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{4.15}$$

Облик једначине равни (4.15) називамо **сегментним обликом** једначине равни.

4.2.5. Нормални облик једначине равни

Уведимо функцију $sgnx$ [3] са

$$sgnx = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}.$$

Из (4.12) добијамо

$$\vec{r} \cdot \vec{N} + D = 0 \tag{4.16}$$

гдје је $D = -\vec{r_1} \cdot \vec{N}$. Дијелећи у (4.16) са $(-sgnD)\left|\vec{N}\right|$ добијамо

$$\frac{\vec{r} \cdot \vec{N}}{(-sgnD)\left|\vec{N}\right|} + \frac{D}{(-sgnD)\left|\vec{N}\right|} = 0 \Rightarrow \frac{\vec{r} \cdot \vec{N}}{(-sgnD)\left|\vec{N}\right|} - \frac{|D|}{\left|\vec{N}\right|} = 0 \tag{4.17}$$

Ако ставимо

$$\frac{\vec{N}}{(-sgnD)\left|\vec{N}\right|} = \vec{n}, \qquad \frac{|D|}{\left|\vec{N}\right|} = p$$

из (4.14) добијамо

$$\vec{r} \cdot \vec{n} - p = 0. \tag{4.18}$$

[3] Чита се: сигнум или знак од x

Занима нас смјер јединичног вектора нормале $\vec{n}$ и геометријско значење броја p. Релацију (4.18) можемо записати у облику [4]

$$pr_{\vec{n}}\vec{r} = p. \tag{4.19}$$

Пошто је $p > 0$ добијамо да је и пројекција $pr_{\vec{n}}\vec{r}$ позитивна, па вектор $\vec{n}$ гради оштар угао са вектором положаја било које тачке равни $\vec{r}$. Дакле, вектор $\vec{n}$ је усмјерен од координатног почетка према равни $\boldsymbol{p} = pr_{\vec{n}}\vec{r}$ **представља удаљеност равни од координатног почетка**.

Једначину равни (4.19) називамо **нормалним обликом једначине равни.**

Једначина (4.18) у скаларном облику је

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

при чему се знак бира тако да члан $\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ буде негативан.

Како је $\vec{n} \cdot \vec{\imath} = cos\alpha,\ \vec{n} \cdot \vec{\jmath} = cos\beta,\ \vec{n} \cdot \vec{k} = cos\gamma$, гдје су α, β и γ углови које јединични вектор нормале равни гради са координатним осама x, y и z респективно, једначину (4.18) можемо записати у облику

$$xcos\alpha + ycos\beta + zcos\gamma - p = 0.$$

[4] Видјети (3.15)

4.2.6. Углови између: двије праве, двије равни, праве и равни

- ✓ **Угао између двије праве** је угао који одређују њихови вектори праваца.
- ✓ **Угао између двије равни** је оштар угао између нормала тих равни.
- ✓ **Угао између праве и равни** је комплемент оштрог угла између вектора правца праве и вектора нормале равни.

Примјер 4.6. Одредити угао између правих

$$p: \begin{matrix} 3x - 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{matrix} \quad \text{и} \quad q: \begin{matrix} 4x + y - 6z - 2 = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{matrix}$$

Рјешење: Уочимо да је вектор правца праве нормалан на векторе нормала равни које одређују ту праву, па је према томе једнак векторском производу вектора нормала равни. Нека је $\vec{a}$ вектор правца праве p и $\vec{b}$ вектор правца праве q. Тада је

$$\vec{a} = (3,-4,-2) \times (2,1,-2) = (10,2,11) \text{ и } \vec{b} = (4,1,-6) \times (0,1,-3) = (3,-12,4).$$

Према томе,

$$cos\sphericalangle(p,q) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{98}{195}.$$

Примјер 4.7. Одредити угао између праве

$$p\colon \frac{x}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

и равни

$$\alpha\colon x + z = 1.$$

Рјешење: Вектор правца праве p је вектор $\vec{a} = (3,2,-1)$, док је вектор нормале равни α вектор $\vec{n} = (1,0,1)$. Ако је φ угао између праве p и равни α, тада је угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{n}$ једнак $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Дакле,

$$sin\,\varphi = cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}||\vec{n}|} = \frac{2}{2\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

4.3. КРИВЕ ДРУГОГ РЕДА

Једначина

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{4.20}$$

представља **општи облик једначине кривих другог реда**.

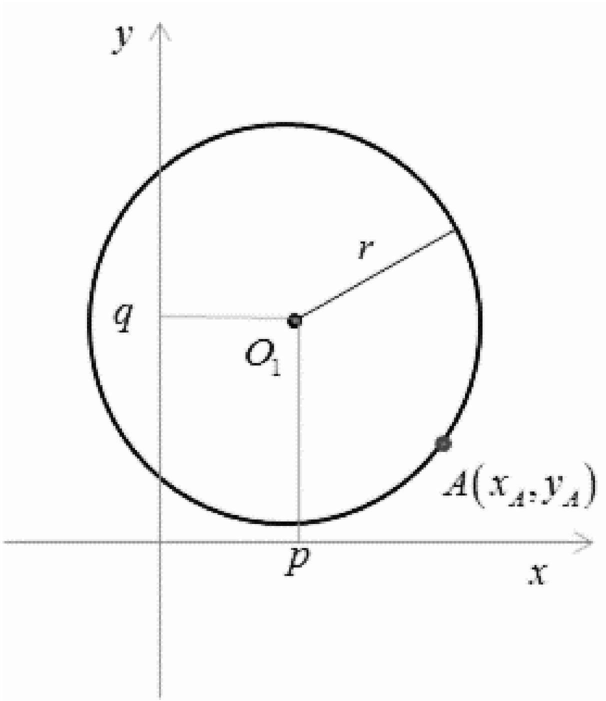
Размотрићемо неке специјалне случајеве кривих другог реда.

1. *Кружница*

Нека је $B = 0$ и $A = C$. Тада из (4.20) добијамо

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + A\left(y + \frac{E}{A}\right)^2 = -F + \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{A} \Rightarrow$$

$$\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - FA}{A^2}. \tag{4.21}$$



Слика 4.5.

Уколико је $\frac{D^2+E^2-FA}{A^2} > 0$, тада из (4.21) добијамо **једначину кружнице**

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \tag{4.22}$$

гдје је $p = -\frac{D}{A}, q = -\frac{E}{A}, r = \sqrt{\frac{D^2+E^2-FA}{A^2}}$.

Кружница (4.22) је кружница са центром у тачки (p, q) и полупречника r (Слика 4.5).

Из (4.22) добијамо **параметарске једначине кружнице:**

$$x = p + rcost, y = q + rsint, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

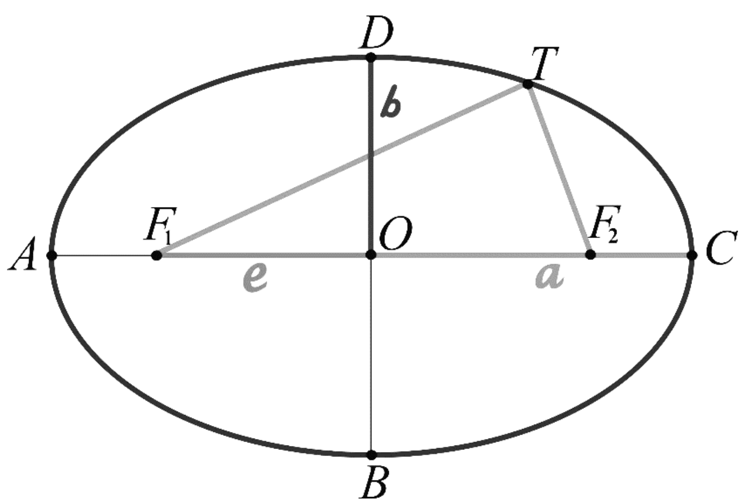
2. *Елипса*

Нека је у (4.20) $B = 0$ и $AC > 0$. Ако је $\frac{CD^2+AE^2-ACF}{A^2C} > 0$ тада добијамо једначину

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \tag{4.23}$$

гдје је

$$a^2 = \frac{CD^2 + AE^2 - ACF}{A^2C}, \qquad b^2 = \frac{CD^2 + AE^2 - ACF}{C^2A}.$$



Слика 4.6

Једначина (4.23) представља једначину **елипсе** са центром у тачки (p,q) и полуосама a и $b, a > b$.

Полуоса a је велика, а b мала полуоса.

Ако је $p = q = 0$ из (4.23) добијамо **канонску једначину елипсе**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Тачке $F_1(-e,0)$ и $F_2(e,0), e=\sqrt{a^2-b^2}$ називају се **фокусима** елипсе.

Број e је **ексцентрицитет** елипсе.

Елипсу дефинишемо као **геометријско мјесто тачака у равни чији је збир растојања од двије фиксиране тачке (фокуса елипсе), константан** и једнак великој оси a, Слика 4.6.

Из (4.23) добијамо **параметарске једначине елипсе**:

$$x=p+acost, y=q+bsint, \qquad 0\leq t\leq 2\pi.$$

3. Хипербола

Нека је у (4.20) $B = 0$ и $AC < 0$. Тада добијамо једначине

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \tag{4.24}$$

или

$$\frac{(y-q)^2}{b^2} - \frac{(x-p)^2}{a^2} = 1. \tag{4.25}$$

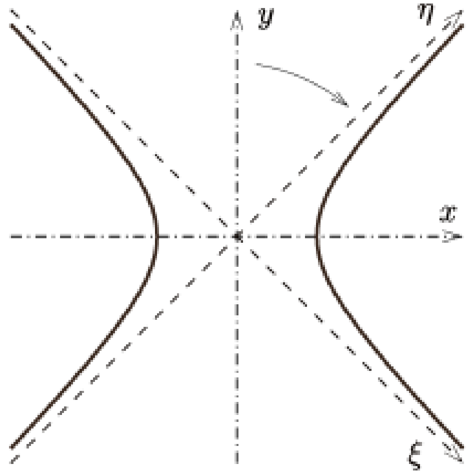
Једначине (4.23) и (4.24) представљају једначине **хиперболе**. Ако је $p = q = 0$ добијамо **канонску** једначину хиперболе (Слика 4.7)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ или } \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Тачке $F_1(-e, 0)$ и $F_2(e, 0)$ називају се **фокусима** хиперболе.

Број $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ је **ексцентрицитет** хиперболе.

Хиперболу дефинишемо као **геометријско мјесто тачака у равни чија је разлика растојања од двије фиксиране тачке (фокуса хиперболе) константна** и једнака великој оси a.



Слика 4.7

Праве $y = \pm\frac{b}{a}x$ су **асимптоте хиперболе**.

Параметарске једначине хиперболе добијамо помоћу хиперболичких функција. Из (4.24) добијамо **параметарске једначине хиперболе**:

$$x = p + a\cosh t, \qquad y = q + b\sinh t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

а из (4.25) **параметарске једначине**

$$x = p + a\sinh t, \qquad y = q + b\cosh t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

4. *Парабола*

Нека је у (4.20) $B = 0$ и $A = 0$ или $C = 0$. За $C = 0$ и $E \neq 0$ добијамо једначину

$$y = a(x - p)^2 + q \tag{4.26}$$

гдје је

$$a = -\frac{A}{2E}, p = -\frac{D}{A}, q = \frac{D^2 - AF}{2AE}.$$

Једначина (4.26) представља једначину **параболе.** Ако је $p = q = 0$ добијамо **канонску** једначину параболе

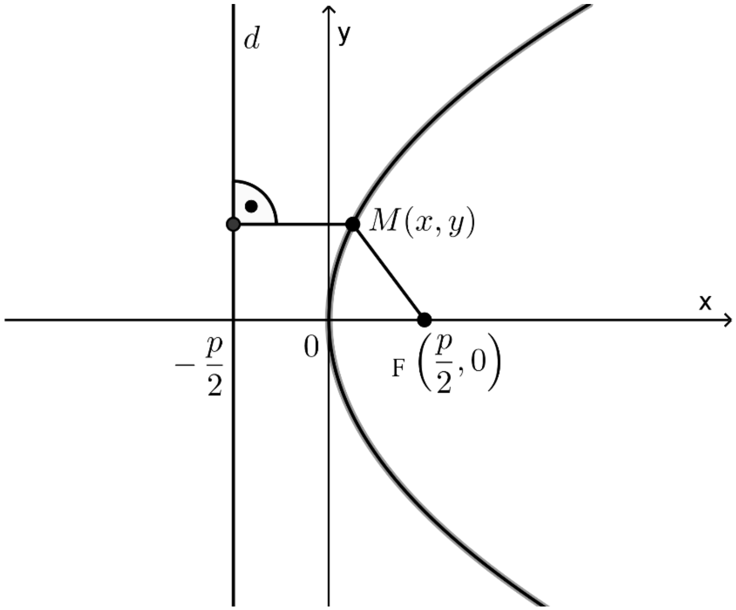
$$y = ax^2 \tag{4.27}$$

Слично, за $A = 0$ и $E \neq 0$ добијамо једначину

$$x = b(y - p_1)^2 + q_1 \tag{4.28}$$

односно **канонску** једначину параболе

$$x = by^2 \tag{4.29}$$



Слика 4.8

Једначину (4.29) пишемо у облику

$$y^2 = px \tag{4.30}$$

Права $x = -\frac{p}{2}$ је **директриса** параболе а тачка $F(\frac{p}{2}, 0)$ **фокус параболе**.

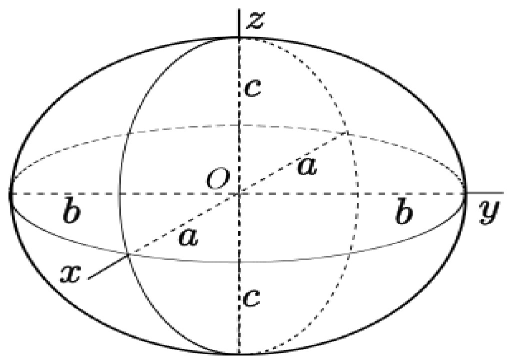
Параболу дефинишемо као **геометријско мјесто тачака у равни које су подједнако удаљене од фиксиране тачке (фокуса) и фиксиране праве (директрисе)** (Слика 4.8).

4.4. ПОВРШИ ДРУГОГ РЕДА

Једначина

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Mz + N = 0 \qquad (4.31)$$

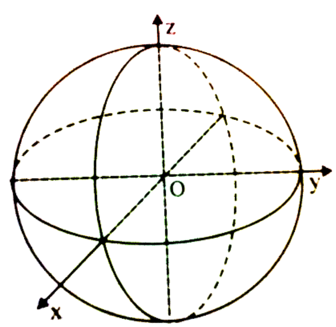
представља **општи облик једначине површи другог реда**.



1. Једначина

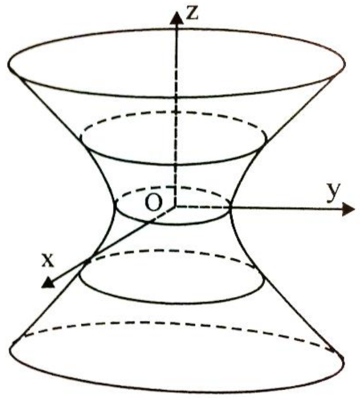
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (4.32)$$

је канонска једначина **елипсоида.**



Специјално ако је $a = b = c = r$ добијамо једначину **сфере**

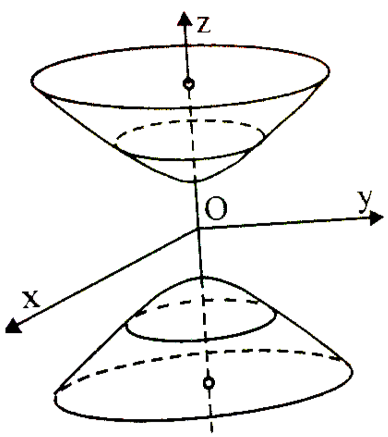
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \qquad (4.33)$$



2. Једначина

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{4.34}$$

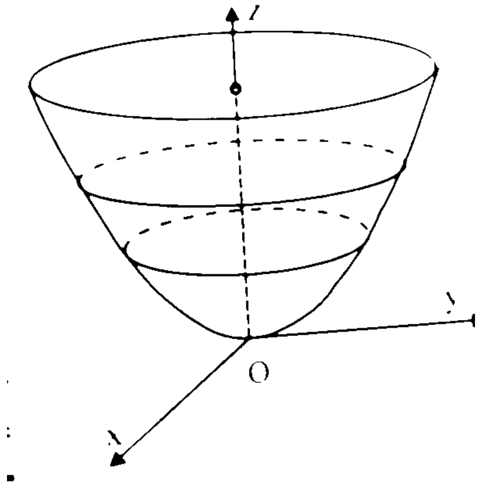
представља **једнограни хиперболоид**.



3. Једначина

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \tag{4.35}$$

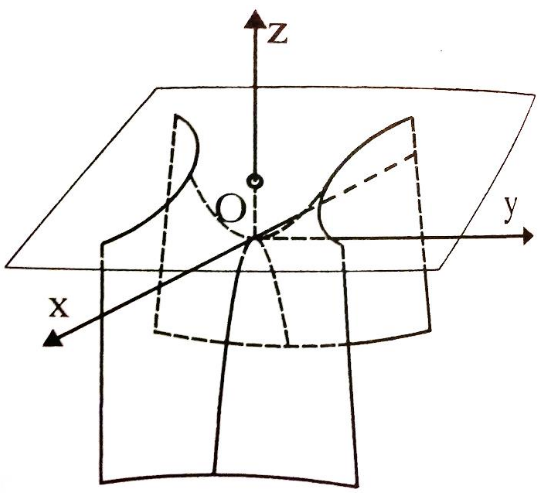
представља **двограни хиперболоид**.



4. Једначина

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \tag{4.36}$$

представља **елиптички параболоид**.



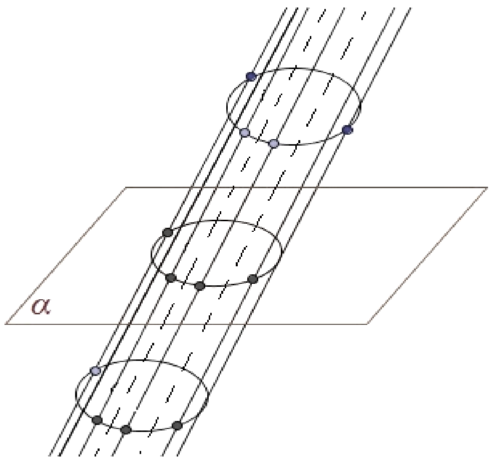
5. Једначина

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \tag{4.37}$$

представља **хиперболички параболоид**.

4.5. НЕКЕ ДРУГЕ ПОВРШИ

1. Цилиндричне површи



Површ коју описује права крећући се паралелно сама себи тако да увијек сијече дату криву назива се **цилиндрична површ**.

Права се зове **изводница** а крива коју сијече **директриса**.

Примјер 4.8. Одредити једначину цилиндра чија је директриса кружница

$$x^2 + y^2 = r^2$$

у $xy -$ равни а изводница паралелна $z -$ оси.

Рјешење: Нека је $M(x, y, z)$ тачка на цилиндру. Тада се тачка M налази на правој која је паралелна $z -$ оси и која пролази кроз неку тачку (x_0, y_0, z_0) на директриси има једначину

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{1}.$$

Пошто је (x_0, y_0, z_0) тачка на директриси вриједи

$${x_0}^2 + {y_0}^2 = r^2, z_0 = 0.$$

Дакле добили смо систем

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{1},\ {x_0}^2 + {y_0}^2 = r^2, z_0 = 0$$

из којег елиминишемо x_0, y_0, z_0. Добијамо $x = x_0, y = y_0$, па је једначина цилиндра

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Примјер 4.9. Одредити једначину цилиндра чија је директриса кружница

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$$

а изводница паралелна вектору $\vec{a} = (1,1,1)$.

Рјешење: Нека је $M(x, y, z)$ тачка на цилиндру. Тада постоји тачка (x_0, y_0, z_0) на директриси тако да тачка M лежи на правој која је паралелна вектору $\vec{a}$. Дакле, добијамо систем

$$x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2 = 1, x_0 + y_0 + z_0 = 0$$

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{1}.$$

Из друге једначине добијамо

$$x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 \Rightarrow z_0 = z - x + x_0, y_0 = y - x + x_0.$$

Даље из

$$x_0 + y_0 + z_0 = 0$$

добијамо

$$x_0 + y - x + x_0 + z - x + x_0 = 0 \Rightarrow$$

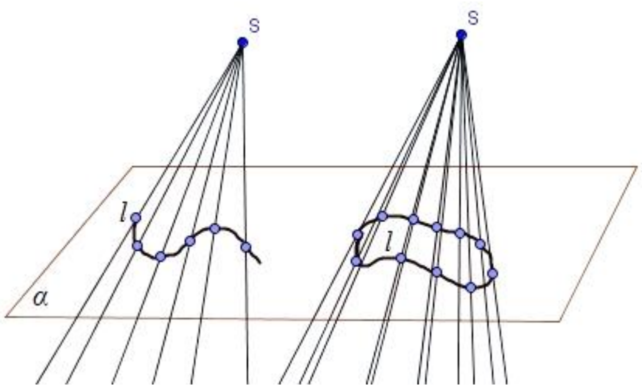
$$x_0 = \frac{1}{3}(2x - y - z), y_0 = \frac{1}{3}(2y - x - z), z_0 = \frac{1}{3}(2z - x - x).$$

Уврштавајући у прву једначину система добијамо

$$(2x - y - z)^2 + (2y - x - z)^2 + (2z - x - x)^2 = 9 \Rightarrow$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) - 3 = 0.$$

2. Конусне површи



Површ коју описује права крећући се тако да сијече задану криву и увијек пролази заданом тачком назива се **конусна површ**.

Права се зове **изводницом** а крива коју сијече **основом конуса**. Тачка кроз коју пролази изводница назива се **врх** конуса.

Примјер 4.10. Одредити једначину конуса чији је врх у координатном почетку а директриса кружница

$$x^2 + y^2 = r^2, z = r.$$

Рјешење: Нека је $M(x, y, z)$ тачка на цилиндру. Тада се тачка M налази на правој која пролази кроз координатни почетак и кроз неку тачку (x_0, y_0, z_0) на директриси. Једначина равни кроз координатни почетак и тачку (x_0, y_0, z_0) је

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}.$$

Добијамо систем

$$x_0{}^2 + y_0{}^2 = r^2, z_0 = r$$

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}.$$

Тада је

$$x = \frac{x_0}{z_0} z \Rightarrow x_0 = \frac{z_0 x}{z} = \frac{rx}{z}$$

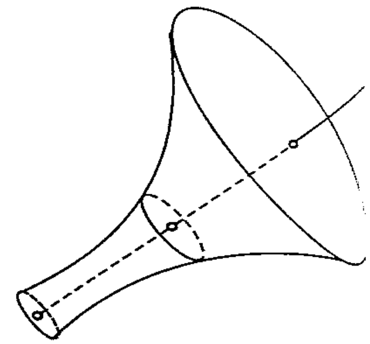
Аналогно је

$$y_0 = \frac{z_0 y}{z} = \frac{ry}{z}.$$

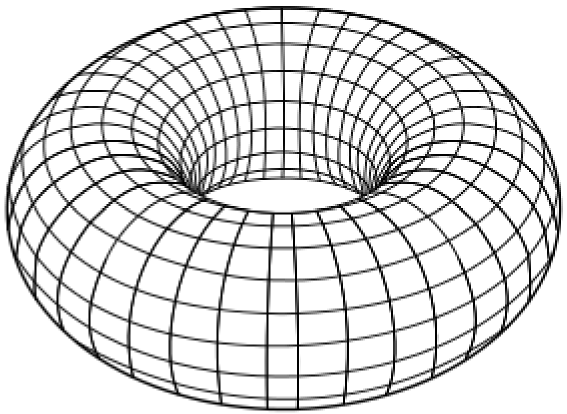
Према томе

$$\left(\frac{rx}{z}\right)^2 + \left(\frac{ry}{z}\right)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = z^2.$$

3. Ротационе површи



Површ која настаје ротацијом дате криве око дате праве назива се **ротациона површ**.



Торус је површ која настаје ротацијом кружнице полупречника b око праве у равни те кружнице која је удаљена од њеног центра за $a > b$.