УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 1- ПРЕДАВАЊА

Академска 2017/2018

ТЕМА 2: ЕЛЕМЕНТИ ЛИНЕАРНЕ АЛГЕБРЕ

1. **Матрице**
2. **Детерминанате**
3. **Инверзна матрица**
4. **Системи линеарних једначина**

ЛИТЕРАТУРА: **Милан Јањић, Математика I, ПМФ, Бања Лука, 2001**

Зоран Митровић, Математика I, Бања Лука, 2016 [1]

Наставник: Биљана Војводић

[1] У припреми предавања коришћена је и **Линеарна алгебра, Момир В. Ћелић, Биљана Сукара-Ћелић**, Глас Српски Графика (Бања Лука 2010)

ТЕМА 2: ЕЛЕМЕНТИ ЛИНЕАРНЕ АЛГЕБРЕ

2.1. МАТРИЦЕ

2.1.1. Дефиниција матрице

Дефиниција 2.1. Матрица типа (реда) $\boldsymbol{m \times n}$ је правоугаона шема бројева која се записује у облику

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

- ✓ Бројеви $a_{ij}, i = 1,2, \dots m, j = 1,2, \dots, n$ се називају **елементи матрице $\boldsymbol{A}$.**
- ✓ Хоризонтални редови матрице се називају **врсте**, а вертикални **колоне.** Матрица (2.1) има m врста и n колона.
- ✓ За елемент матрице $a_{ij}, i = 1,2, \dots m, j = 1,2, \dots, n$ први индекс означава редни број врсте, а други индекс редни број колоне у којој се тај елемент налази. Елемент матрице a_{ij} се налази на позицији (i, j), $i = 1,2, \dots m, j = 1,2, \dots, n$.

- За матрицу (2.1) користи се и ознака $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Такође, поред (2.1) користе се и ознаке

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Примјер 2.1. Матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$ има три врсте и двије колоне и она је је типа 3×2. □

- Матрица A је **квадратна матрица** ако има исти број врста и колона, тј. ако је $m = n$. У том случају кажемо да је A **квадратна матрица реда n.**

- **За елементе** $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратне матрице A реда n кажемо да чине **главну дијагоналу** матрице A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- Квадратна матрица код које се испод главне дијагонале налазе само нуле, тј. код које је $a_{ij} = 0, i > j,\ \ i,j = 1,2,\dots,n$ назива се **горња троугаона матрица:**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- Квадратна матрица код које су сви елементи ван главне дијагонале једнаки нули, тј. код које је $a_{ij} = 0, i \neq j,\ \ i,j = 1,2,\dots,n$ назива се **дијагонална матрица**:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- Дијагонална матрица код које су су сви елементи на главој дијагонали једнаки, тј. код које је $a_{ij} = \alpha, i,j = 1,2,\dots,n$ се зове **скаларна матрица:**

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{bmatrix}.$$

Специјално за $\alpha = 1$ добијамо **јединичну матрицу реда $\boldsymbol{n}$** коју означавамо са E_n или I_n:

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

- ✓ **Нула матрица** је матрица чији су сви елементи једнаки нули и означавамо је са O.

Дефиниција 2.2. Двије матрице A и B су **једнаке** ако су истог типа и ако су елементи једне матрице једнаки одговрајућим елементима друге матрице.

Примјер 2.2. Испитати да ли постоје реални бојеви x, y, z за које су матрице A и B једнаке:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 19 & -3 \\ 15 & 10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x - y & 0 \\ 2y + z & -x + z \\ x + y & 10 \end{bmatrix}$$

Рјешење: Из система $x - y = 1,\ 2y + z = 19,\ x + y = 15,\ -x + z = -3$ добијамо $x = 8, y = 7,\ z = 5.$ □

2.1.2. Сабирање матрица и множење матрица скаларом

У скупу матрица дефинишемо операције сабирања матрица, множења матрица скаларам и множења матрица.

Дефиниција 2.3. Нека су A и B матрице истог типа. **Збир матрице** A и B је матрица $A+B$ која је истог типа као и матрице A и B и чији су елементи једнаки збиру одговарајућих елемената матрица A и B.

Дакле, ако је $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ и $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ тада је $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$.

Примјер 2.3. Одредити збир матрица A и B:

а) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\\ 5 & 10\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & 4\\ -1 & 7\end{bmatrix}$, б) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 4\\ 0 & 4 & 2\\ -1 & 7 & -3\end{bmatrix}$.

Рјешење: а) $A+B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -2 & 7\\ 4 & 17\end{bmatrix}$, б) Матрице A и B се не могу сабирати јер нису истог типа. □

- ✓ Лако се провјерава да је сабирање матрица комутативно и асоцијативно, тј. да за матрице A, B, C истог типа вриједи:
  - $A + B = B + A$
  - $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Дефиниција 2.4. Матрица A **се множи бројем** α тако да се сваки елемент матрице помножи са α.

Дакле, ако је $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ тада је $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}$.

- ✓ Лако се покаже да за матрице A, B истог типа и произвољне скаларе α, β вриједи:
  - $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$,
  - $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
  - $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Примјер 2.4. За матрице A и B из примјера 2.3. а) наћи матрицу $C = 2A - B$.

Рјешење: а) $C = 2A - B = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 6 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 2 \\ 11 & 13 \end{bmatrix}$. □

2.1.3. Множење матрица

- ✓ Производ матрица $A \cdot B$ је дефинисан само у случају када матрица B има онолико врста колико матрица A има колона.

Дефиниција 2.5. Нека је $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ и $B = [b_{ij}]_{n\times p}$. **Производ матрица** A и B је матрица $C = A \cdot B$, при чему је $C = [c_{ij}]_{m\times p}$ и $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$, $i = 1,2, \dots m, j = 1,2, \dots, p$.

Примјер 2.5. Одредити производ матрица A и B ако је:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$, б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & -3 \end{bmatrix}$.

Рјешење: а) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 22 \\ -2 & 52 \end{bmatrix}$.

Дефинисан је и производ $B \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -8 & 12 & 24 \\ -15 & 21 & 39 \end{bmatrix}$.

б) Производ $A \cdot B$ није дефинисан јер је матрица A типа 3×2 а матрица B типа 3×3.

Међутим, дефинисан је производ $B \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 23 \\ -6 & 22 \\ -18 & 6 \end{bmatrix}$. □

Очигледно је да множење матрица **није комутативно**.

Међутим, множење матрица је **асоцијативно.**

Теорема 2.1. Нека су A, B и C матрице за које су дефинисани производи $A \cdot B$ и $B \cdot C$ Тада вриједи

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C). \square$$

- ✓ Поред тога што множење матрица није комутативно, постоји још једна битна разлика у односу на множење бројева. Док за бројеве α и β из услова $\alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0$, у скупу матрица то није случај. Може се десити да је $A \cdot B = O$ али да ниједна од матрица A и B није нула матрица. Нпр.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Множење матрица има сљедеће особине.

Теорема 2.2. За множење матрица вриједи:

1. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (дистрибутивност слијева)
2. $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ (дистрибутивност здесна)
3. $\alpha(A \cdot B) = A \cdot (\alpha B)$

гдје су A, B и C произвољне матрице за које су дефинисане наведене операције и α произвољан скалар. □

3.1.4. Транспонована матрица

Дефиниција 2.6. Нека је A матрица типа $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Тада се матрица $A^\top$ типа $n \times m$ дефинисана са

$$A^\top = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

назива **транспонована матрица** матрице A.

- ✓ Транспоновањем матрице A њене врсте постају колоне матрице $A^\top$, а колоне постају врсте матрице $A^\top$.

Примјер 2.6. Одредити транспоноване матрице матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 9 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Рјешење: $A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad B^\top = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \; C^\top = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 9 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}. \square$

Теорема 2.3. Операција транспоновања матрица има сљедеће особине:

$$(A^\top)^\top = A, \; (A+B)^\top = A^\top + B^\top, \; (\alpha A)^\top = \alpha A^\top, \; (A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top \; \square$$

Дефиниција 2.7. Квадратна матрица која је једнака својој транспонованој матрици назива се **симетрична матрица.**

Код симетричне матрице вриједи $a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1,2, \dots, n$.

Матрица C из примјера 2.6 је симетрична матрица јер је $C^\top = C$.

2.2. ДЕТЕРМИНАНТЕ

2.2.1. Детерминанте другог реда

Нека је дат систем линеарних једначина са двије непознате

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1 \tag{2.3}$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2 \tag{2.4}$$

гдје су $a_{ij}, i, j = 1,2,\ b_i, i = 1,2$ реални бројеви, а x и y непознате величине. Множећи једначину (2.3) са a_{22} и једначину (2.4) са $(-a_{12})$ добијамо

$$a_{22}a_{11}x + a_{22}a_{12}y = a_{22}b_1 \tag{2.5}$$

$$-a_{12}a_{21}x - a_{12}a_{22}y = -a_{12}b_2 \tag{2.6}$$

Сабирајући једначине (2.5) и (2.6) добијамо

$$(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \tag{2.7}$$

На исти начин, множећи једначину (2.3) са $-a_{21}$ и једначину (2.4) са a_{11} добијамо

$$-a_{21}a_{11}x - a_{21}a_{12}y = -a_{21}b_1 \tag{2.8}$$

$$a_{11}a_{21}x + a_{11}a_{22}y = a_{11}b_2 \tag{2.9}$$

Сабирајући једначине (2.8) и (2.9) добијамо

$$(a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21})y = a_{11}b_2-a_{21}b_1 \tag{2.10}$$

Из (2.7) и (2.10), под условом $a_{21}a_{12}-a_{12}a_{22} \neq 0,$ добијамо

$$x = \frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}}, \qquad y = \frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}} \tag{2.11}$$

У (2.11) имамо исте имениоце које записујемо у облику

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{2.12}$$

Дефиниција 2.8. Детерминанта другог реда је број

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}. \tag{2.13}$$

- ✓ Детерминанта другог реда (2.13) је број који је придружен квадратној матрици A другог реда $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Користимо ознаку $|A|$ или $\det A$, тј.

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

- ✓ Означимо детерминанту (2.13) са D и уведимо детерминанте другог реда

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Тада се рјешење система (2.3)-(2.4), уз услов $D \neq 0$, може записати у облику

$$x = \frac{D_1}{D}, \qquad y = \frac{D_2}{D}. \tag{2.14}$$

Формуле (2.14) зову се **Крамерове формуле.**[2]

[2] Gabriel Cramer (1704-1752), швајцарски математичар

Примјер 2.7. Ријешити систем једначина

$$2x - 3y = -2$$

$$11x - 8y = 6.$$

Рјешење: Израчунајмо детерминанте D, D_1 и D_2. Имамо

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & -8 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-8) - 11 \cdot (-3) = 17,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-8) - 6 \cdot (-3) = 34,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 11 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 11 \cdot (-2) = 34$$

Према томе,

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{34}{17} = 2, \qquad y = \frac{D_2}{D} = \frac{34}{17} = 2. \square$$

2.2.2. Детерминанта трећег реда

Дефиниција 2.9. Детерминанта трећег реда је број

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{2.15}$$

✓ Детерминанта (2.15) је број придружен квадратној матрици реда 3, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$,

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Примјер 2.8. Израчунати детерминанту $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

Рјешење:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -18 - 12 - 15 = -45. \square$$

2.2.3. Минори и кофактори

- **Минор или субдетерминанта** за елемент $a_{ij}, i, j = 1,2,3$ се добије тако да се из детерминанте (2.15) изостави $i -$ та врста и $j -$ та колона. Нпр.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

- **Кофактор или алгебарски комплемент** за елемент a_{ij} је број

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{2.16}$$

- Користећи алгебарске кофакторе, детереминату трећег реда из (2.15) можемо записати у облику

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \tag{2.17}$$

✓ Лако се показује да се детерминанта (2.17) може рачунати развојем по произвољној врсти (колони). Вриједи сљедеће **Лапласово правило:** [3]

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, i = 1,2,3, \tag{2.18}$$

и

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}, j = 1,2,3. \tag{2.19}$$

Примјер 2.9. Израчунати детерминанту $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

Рјешење: Развојем по другој колони добија се

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 9. \ \square$$

[3] [3] Pierre-Simon Laplace (1749 –1827) француски математичар, физичар и астроном

2.2.4. Детерминанта n −тог реда

Дефиниција 2.10. Детерминантна n −тог реда (реда n) дефинише се са

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \tag{2.20}$$

при чему су кофактори A_{ij} дефинисани са (2.16) за $i, j = 1,2, \ldots n$.

- ✓ За детерминате реда n вриједе формуле аналогне формулама (2.18) и (2.19) за детереминанте трећег реда.

Теорема 2.4. **(Лапласова теорема)** За детерминанту D из (2.20) вриједи

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, i = 1,2, \ldots, n, \tag{2.21}$$

и

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, j = 1,2, \ldots, n. \square \tag{2.22}$$

Примјер 2.10. Израчунати детерминату:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Рјешење: $D = -6.$ □

Примјер 2.11. Користећи теорему 2.4, развојем детерминанте по првој колони, лако се види да је детерминанта горње трогаоне матрице A једнака производу елемената на главној дијагонали:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot \ a_{nn}.$$

За јединичну матрицу је $\det E_n = 1.$ □

2.2.5. Особине детерминанти

1. Ако двије врсте (колоне) замијене мјеста, детерминаната мијења знак.

2. Детерминанта се множи неким бројем тако што се елементи једне врсте (колоне) помноже тим бројем.

3. Вриједност детерминанте је једнака нули ако су било које двије врсте (колоне) једнаке.

4. Вриједност детерминанте је једнака нули ако су елементи једне врсте (колоне) пропорционални одговарајућим елементима друге врсте (колоне).

5. Ако за елементе $k-$те врсте детерминенте D вриједи $a_{kj} = b_{kj} + c_{kj}, j = 1,2, \dots, n$ тада је детерминанта D једнака збиру детерминанти D_1 и D_2, при чему су све врсте детерминанти D_1 и D_2, осим $k-$те, једнаке, и $k-$ту врсту детерминанте D_1 чине елементи $b_{kj}, j = 1,2, \dots n$, а детерминанте D_2 елементи $c_{kj}, j = 1,2, \dots, n$. Аналагно правило важи и за колоне.

6. Вриједност детерминанте се не мијења ако се елементима једне врсте (колоне) додају одговарајући елементи друге врсте (колоне) помножени неким бројем.

Примјер 2.12. Израчунати детерминате:

а) $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$, б) $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 4 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

в) Сабрати детерминанте

$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ и $D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -6 \\ 11 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

Рјешење: а) $D = 0$, б) $D = 46$, в) $D_1 + D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -6 \\ 12 & 2 & 4 \end{vmatrix}$. □

Примјер 2.13. Израчунати Вандермондову детерминанту

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 \end{vmatrix}.$$

Рјешење: Користимо особину 6. детерминанти, и другој, односно трећој колони додајемо прву колону помножену са (-1) и добијамо

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 - {x_1}^2 & {x_3}^2 - {x_1}^2 \end{vmatrix}.$$

Користећи особину 2. детерминанти можемо из друге колоне извући испред детерминанте фактор $x_2 - x_1$. Аналогно из треће колоне можемо извући фактор $x_3 - x_1$. Добијамо

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 1 \\ {x_1}^2 & x_2 + x_1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} =$$

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 + x_1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_2 - x_3). \square$$

Примјер 2.14. Израчунати детерминату:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -n+1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Рјешење:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -n+1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 2n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = n! \;\square$$

Без доказа наводимо теореме које се односе на детерминанте производа матрица и детерминанту транспоноване матрице.

Теорема 2.5. Ако су A и B квадратне матрице истог реда тада је

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B. \square$$

Теорема 2.6. За квадратну матрицу A вриједи

$$\det A^{\top} = \det A. \square$$

2.3. ИНВЕРЗНА МАТРИЦА

Дефиниција 2.11. Нека су A_{ij} алгебарски комплементи квадратне матрице A дефинисани са (2.16). Тада се матрица A^* дефинисана са

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^{\top}$$

назива **адјунгована матрица** матрице A. За адјунгovану матрицу се користи и ознака $\boldsymbol{adjA}$.

С обзиром на релације (2.21) и (2.22) лако се доказује сљедећа теорема.

Теорема 2.7. Матрица A реда n и њена адјунгована матрица A^* су повезане сљедећом релацијом:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = \det A \cdot E_n. \square \tag{2.23}$$

Дефиниција 2.12. За квадратну матрицу A реда n кажемо да је **инвертибилна (регуларна)** ако постоји матрица B таква да је

$$A \cdot B = B \cdot A = E_n.$$

Матрицу B, која је јединствена уколико постоји, називамо **инверзном матрицом** матрице A и означавамо са A^{-1}. Уколико матрица није регуларна, кажемо да је **сингуларна.**

Теорема 2.8. Матрица A је регуларна ако и само ако је $\det A \neq 0$.

Доказ: Ако је матрица A регуларна, тада постоји матрица A^{-1} за коју је

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n.$$

Одавде, користећи Теорему 2.5, добијамо

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det A^{-1} \cdot \det A = \det E_n = 1.$$

Дакле, $\det A \neq 0$.

Обрнуто, ако је $\det A \neq 0$, из (2.23) добијамо

$$A \cdot \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{\det A} A^* \cdot A = E_n \tag{2.24}$$

па матрица A има инверзну матрицу. □

Из релације (2.24) добија се инверзна матрица матрице A.

Теорема 2.9. Инверзна матрица A^{-1} матрице A је дата са

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*. \square \tag{2.25}$$

Примјер 2.15. Одредити инверзне матрице матрица а) $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}$, б) $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

Рјешење: а) Очигледно је $\det A=1$. Алгебарски комплементи су

$$A_{11}=5, A_{12}=-3, A_{21}=-3, A_{22}=2$$

па је

$$A^{-1}=A^{*}=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}^{\top}=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}.$$

б) Одузимањем друге колоне од прве колоне добијамо $\det B=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=2.$

Даље имамо $\quad B_{11}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2,\ B_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2,\ B_{13}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0,$

$$B_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1,\ B_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1,\ B_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1,$$

$$B_{31}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1,\ B_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1,\ B_{33}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1.$$

Добијамо

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{*}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\top}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}. \square$$

На крају, лако се доказују тврдње које се односе на инверзну матрицу инверзне матрице, као и на инверзну матрицу производа. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 2.10. а) Ако је A инвертибилна матрица, тада је и A^{-1} инвертибилна матрица и вриједи

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

б) Ако су A, B инвертибилне матрице, тада је и $A \cdot B$ инвертибилна матрица и вриједи

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}. \square$$

2.4. СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

Дефиниција 2.13. Систем од $\boldsymbol{m}$ линеарних једначина са $\boldsymbol{n}$ непознатих $\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_n}$ је систем

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + \cdots & +a_{2n}x_n = & b_2 \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & a_{m3}x_3 + \cdots & +a_{mn}x_n = & b_m. \end{array} \tag{2.26}$$

Бројеви $a_{ij}, i = 1,2, \dots, m, j = 1,2, \dots, n$ називају се **коефицијенти система**, док се бројеви $b_i, i = 1,2, \dots m$ називају **слободним члановима**.

- ✓ Ако је $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ кажемо да је систем (2.26) **хомоген**, у супротном систем је **нехомоген.**

- ✓ Реални бројеви $x_1, x_2, \dots, x_n$ су **рјешење система** (2.26) ако задовољавају све једначине система (2.26).

Дефиниција 2.14. За систем (2.26) кажемо да је **сагласан (могућ, рјешив**) ако има бар једно рјешење. Ако је рјешење јединствено, кажемо да је систем **одређен.** Систем је **несагласан (немогућ, нерјешив)** ако је његов скуп рјешења празан.

Примјер 2.16. Систем

$$2x_1 - x_2 = 5$$

$$3x_1 + 2x_2 = 11$$

има рјешење $x = 3, y = 1$. Он је дакле сагласан, а пошто је рјешење јединствено он је и одређен.

Систем

$$2x_1 - x_2 = 5$$

$$4x_1 - 2x_2 = 10$$

је сагласан, али није одређен јер има бесконачно рјешења. Његова рјешења су

$$x_1 = t, x_2 = 2t - 5, t \in \mathbb{R}.$$

Систем

$$2x_1 - x_2 = 5$$

$$4x_1 - 2x_2 = 1$$

је несагласан. Његов скуп рјешења је празан скуп. □

Дефиниција 2.15. Два система линеарних једначина су **еквивалентна** ако имају исте скупове рјешења.

Примјер 2.17. Системи

$$2x_1 - x_2 = 5$$

$$3x_1 + 2x_2 = 11$$

и

$$-x_1 + 10x_2 = 7$$

$$11x_1 - 8x_2 = 25$$

су еквивалентни јер имају исто рјешење $x_1 = 3, x_2 = 1$.

Системи

$$2x_1 - x_2 = 5$$

$$4x_1 - 2x_2 = 1$$

и

$$x_1 - x_2 = -2$$

$$-x_1 + x_2 = 0$$

су еквиваленти јер оба имају празан скуп рјешења. □

- ✓ Свака два немогућа система су еквивалентна.

2.4.1. Гаусов метод елиминације

Нека је дат систем

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \quad a_{12}x_2 + \quad a_{13}x_3 + \cdots \quad + a_{1n}x_n &= \quad b_1 \\ a_{21}x_1 + \quad a_{22}x_2 + \quad a_{23}x_3 + \cdots \quad + a_{2n}x_n &= \quad b_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \quad a_{m2}x_2 + \quad a_{m3}x_3 + \cdots \quad + a_{mn}x_n &= \quad b_m. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Претпоставимо да је бар један од коефицијената a_{ij}, $j = 1,2,\dots,n$ различит од нуле за свако $i = 1,2,\dots,m.$[4] Претпоставимо да је $a_{11} \neq 0$, што увијек можемо постићи међусобном замјеном једначина или непознатих система. Множећи прву једначину система (2.27) са $\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right)$ и додајући i −тој једначини, $i = 2,\dots,m$ добијамо систем

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \quad a_{12}x_2 + \quad a_{13}x_3 + \cdots \quad + a_{1n}x_n &= \quad b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \quad a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots \quad + a_{2n}^{(1)}x_n &= \quad b_2^{(1)} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \quad a_{m3}^{(1)}x_3 + \cdots \quad + a_{mn}^{(1)}x_n &= \quad b_m^{(1)} \end{aligned} \tag{2.28}$$

[4] Овом претпоставком не губимо на општости, јер ако је $a_{ij} = 0$, $j = 1,2,\dots,n$, за свако $i = 1,2,\dots,m$, онда за $b_i = 0$ i −ту једначину можемо изоставити, а за $b_i \neq 0$ систем је немогућ.

Сада настављамо исти поступак али без прве једначине. Претпостављајући да је $a_{22}^{(1)} \neq 0$, множимо другу једначину са $\left(-\frac{a_{2i}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right)$ и додајемо i −тој једначини система (2.28) за $i = 3, \dots, m$, добијамо

$$
\begin{array}{cccccc}
a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\
 & a_{22}^{(1)}x_2 + & a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots & +a_{2n}^{(1)}x_n = & b_2^{(1)} \\
 & & a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots & +a_{3n}^{(2)}x_n = & b_3^{(2)} \\
 & & \vdots & & \\
 & & \vdots & & \\
 & & a_{m3}^{(2)}x_3 + \cdots & +a_{mn}^{(2)}x_n = & b_m^{(2)}
\end{array}
\tag{2.29}
$$

Поступак настављамо даље али без прве двије једначине. На крају долазимо до система

$$
\begin{array}{cccccc}
a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\
 & a_{22}^{(1)}x_2 + & a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots & +a_{2n}^{(1)}x_n = & b_2^{(1)} \\
 & & a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots & +a_{3n}^{(2)}x_n = & b_3^{(2)} \\
 & & \vdots & & \\
 & & \vdots & & \\
 & & a_{kk}^{(k-1)}x_k + \cdots & +a_{kn}^{(k-1)}x_n = & b_k^{(k-1)}
\end{array}
\tag{2.30}
$$

Разликујемо два случаја:

1. Ако је $k = n$, посљедња једначина система (2.30) је

$$a_{nn}^{(n-1)} x_n = b_n^{(n-1)}$$

одакле одређујемо непознату x_n. Уврштавајући x_n у претпосљедњу једначину система (2.30) одређујемо x_{n-1}, затим увршавањем у претходну једначину система одређујемо x_{n-2} и тако све до прве једначине система, из које одређујемо x_1.

2. Ако је $k < n$ тада је последња једначина система облика

$$a_{kk}^{(k-1)} x_k \dots + a_{kn}^{(k-1)} x_n = b_k^{(k-1)}.$$

У овој једначини имамо $n - k + 1$ непознатих, $x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$. Узимајући да је $n - k$ непознатих произвољно, изражавамо $(n - k + 1) -$ у непознату преко преосталих непознатих. Ако нпр. узмемо да су нам $x_{k+1}, \dots, x_n$ произвољне, тада из последње једначине система одређујемо x_k преко $x_{k+1}, \dots, x_n$, затим из претпоследње изражавамо x_{k-1} преко $x_{k+1}, \dots, x_n$ и тако све до прве једначине из које изражавамо x_1 преко $x_{k+1}, \dots, x_n$. У овом случају систем није одређен и има бесконачно рјешења. Рјешење система зависи од $n - k$ произвољних вриједности $x_{k+1}, \dots, x_n$.

Примјер 2.18. Ријешити систем једначина

$$\begin{array}{rrrrr} x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 = & 5 \\ 2x_1 + & x_2 - & x_3 + & 3x_4 = & 14 \\ -x_1 + & 2x_2 + & 3x_3 - & 5x_4 = & -15 \\ 3x_1 - & x_2 - & x_3 + & x_4 = & 5 \end{array}$$

Рјешење: Прву једначину множимо са (-2) и додајемо другој, затим прву додајемо трећој и на крају прву множимо са (-3) и додајемо четвртој једначини система. Добијамо:

$$\begin{array}{rrrrr} x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 = & 5 \\ & -x_2 - & 3x_3 + & x_4 = & 4 \\ & 3x_2 + & 4x_3 - & 4x_4 = & -10 \\ & -4x_2 - & 4x_3 - & 2x_4 = & -10 \end{array}$$

Множимо другу једначину са 3 и додајемо другој, затим са (-4) и додајемо трећој. Добијамо:

$$\begin{array}{rrrrr} x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 = & 5 \\ & -x_2 - & 3x_3 + & x_4 = & 4 \\ & & -5x_3 - & x_4 = & 2 \\ & & 8x_3 - & 6x_4 = & -26 \end{array}$$

Множећи трећу једначину са $\frac{8}{5}$ и додајући четвртој једначини добијамо систем:

$$\begin{array}{rrrrr} x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 = & 5 \\ & -x_2 - & 3x_3 + & x_4 = & 4 \\ & & -5x_3 - & x_4 = & 2 \\ & & & -\dfrac{38}{5}x_4 = & -\dfrac{114}{5} \end{array}$$

Сада из четврте једначине добијамо $x_4 = 3$, затим из треће $x_3 = -1$, из друге $x_2 = 2$ и на крају из прве $x_1 = 1$. □

Примјер 2.19. Ријешити систем једначина

$$\begin{array}{rrrrr} x_1 + & 2x_2 - & x_3 + & x_4 = & 1 \\ 2x_1 + & 5x_2 + & 2x_3 - & x_4 = & 2 \\ x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 = & 3. \end{array}$$

Рјешење: Прву једначину множимо са (-2) и додајемо другој, затим прву помножимо са (-1) и додајемо трећој. Добијамо:

$$\begin{array}{rrrrr} x_1 + & 2x_2 - & x_3 + & x_4 = & 1 \\ & x_2 + & 4x_3 - & 3x_4 = & 0 \\ & -x_2 + & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

Додавањем друге једначине трећој добијамо

$$\begin{aligned} x_1 + \quad 2x_2 - \quad x_3 + \quad x_4 &= 1 \\ x_2 + \quad 4x_3 - \quad 3x_4 &= 0 \\ 6x_3 \quad -3x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Систем има бесконачно рјешења и узмимо нпр. x_3 произвољно. Тада је

$$x_4 = 2x_3 - \frac{2}{3}.$$

Из друге једначине добијамо

$$x_2 = -4x_3 + 3x_4 = -4x_3 + 6x_3 - 2 = 2x_3 - 2,$$

и из прве једначине

$$x_1 = -2x_2 + x_3 - x_4 + 1 = -5x_3 + \frac{17}{3}.$$

Дакле, рјешење система је $\left(-5t + \frac{17}{3}, 2t - 2, t, 2t - \frac{2}{3}\right), t \in \mathbb{R}.$ □

2.4.2. Матрични метод и Крамерове формуле

Нека је дат квадратни систем

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + \cdots & +a_{2n}x_n = & b_2 \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & a_{n3}x_3 + \cdots & +a_{nn}x_n = & b_n. \end{array} \tag{2.31}$$

Овај систем можемо записати у матричном облику

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{2.32}$$

гдје је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Уколико је матрица A инвертибилна, тада множећи у (2.32) са A^{-1} слијева, добијамо

$$A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{b} \Rightarrow (A^{-1}A)\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \Rightarrow E_n\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

па систем (2.32) има јединствено рјешење дато са

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{2.33}$$

Примјер 2.20. Користећи матрични метод, ријешити систем једначина

$$\begin{aligned} 2x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 &= \quad 2 \\ 6x_1 + \quad 2x_2 + \quad x_3 &= \quad 5 \\ -2x_1 + \quad 2x_2 + \quad x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Рјешење: Овом систему одговара матрични запис $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, гдје је

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ако из прве колоне матрице A извучемо испред детерминанте фактор 2, и ако другој колони матрице A додамо трећу колону помножену са (-2), добијамо

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

Дакле, матрица A је инвертибилна и

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Пошто је

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/8 & -1/8 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & -3/4 & -1/4 \end{bmatrix},$$

добијамо

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1/8 & -1/8 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & -3/4 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \square$$

Матрични метод се ријетко користи за рјешавање система јер је одређивање инверзне матрице рачунски доста захтјевно.

Сада ћемо из (2.33) извести Крамерове формуле [5] за рјешавање система (2.31). Означимо детерминанту матрице A са D. Из (2.33) добијамо

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{D}A^*\boldsymbol{b} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{2.34}$$

Одавде имамо

$$x_i = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n}{D}, i = 1,2,\ldots,n. \tag{2.35}$$

Бројилац разломка у (2.35), $A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n$, представља заправо детерминанту која се добије из детерминанте D замјеном њене i −те колоне колоном слободних чланова. Означимо ову детерминанту са $D_i, i = 1,2,\ldots n$. Тако смо доказали теорему која је позната као Крамерово правило.

Теорема 2.11. (Крамерово правило) Ако је детерминанта D система (2.31) различита од нуле, тада тај систем има јединствено рјешење које је облика

$$x_i = \frac{D_i}{D}, i = 1,2,\ldots,n \tag{2.36}$$

при чему се детерминанта $D_i, i = 1,2,\ldots,n$ добија из детерминанте D замјеном њене i −те колоне колоном слободних чланова. □

[5] Видјети Поглавље 2.2.1. стр. 15.

Примјер 2.21. Користећи Крамерове формуле, ријешити систем једначина

$$\begin{array}{rrrr} x_1 + & 2x_2 + & x_3 = & -1 \\ 2x_1 + & 2x_2 - & x_3 = & -4. \\ 4x_1 + & 4x_2 + & x_3 = & -2 \end{array}$$

Рјешење: $D=-6, D_1=-6, D_2=12, D_3=-12$. Према томе рјешење система је

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1, x_2=\frac{D_2}{D}=-2, x_3=\frac{D_3}{D}=2. \ \square$$

✓ Крамерове формуле се користе у случају када је детерминанта D система различита од нуле. Уколико је $D=0$, тада систем није одређен и могу наступити сљедећи случајеви:[6]

1. Уколико је бар једна од детерминанти $D_i \neq 0$, систем је несагласан.

2. Уколико је $D_i=0, i=1,2,\dots,n$ онда се може десити да је систем несагласан или да има бесконачно рјешења.

[6] Видјети Поглавље 2.4.5, Кронекер-Капелијеву теорему, стр. 54

Примјер 2.22. У зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$ ријешити систем једначина

$$\begin{array}{rrrl} ax_1 + & x_2 + & x_3 = & 1 \\ x_1 + & ax_2 + & x_3 = & a \\ x_1 + & x_2 + & ax_3 = & a^2 \end{array}.$$

Рјешење: $D = (a+2)(1-a)^2,\ D_1 = -(1-a)^2(a+1), D_2 = (1-a)^2, D_3 = (1-a)^2(a+1)^2.$

Уколико је $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2,1\}$ систем је одређен и његово рјешење је

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{a+1}{a+2}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{a+2}, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

Ако је $a = -2$ тада је $D_1 = 9 \neq 0$ па систем није сагласан.

Ако је $a = 1$ тада је $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ па систем рјешавамо Гаусовим поступком. Добијамо

$$\begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{array}$$

па закључујемо да систем има бесконачно рјешења облика

$$x_1 = 1 - x_2 - x_3, \qquad x_2, x_3 \in \mathbb{R}. \ \square$$

Одређивање рјешења система помоћу Крамерових формула је рачунски веома захтјевно, јер је потребно израчунати $n+1$ детерминанту n −тог реда. [7] Због тога се Крамерове формуле не препоручују за системе реда већег од 3.

[7] Укупан број рачинских операција за рачунање ових детерминанти је реда $(n+1)!$

2.4.3. Гаус-Жорданов метод

Гаус-Жорданов [8] **метод** је варијанта Гаусовог метода елиминације, у којем се користе елементарне трансформације врста матрице.

Елементране трансформације врста матрице су:

- замјена мјеста двјема врстама
- множење једне врсте бројем различитим од нула
- додавање једне врсте помножене неким бројем другој врсти.

✓ Матрице добијене елементарним трансформацијама врста матрице A могу се добити множењем матрице A слијева одговарајућим матрицама, тзв. матрицама елементарних трансформација.

Дефиниција 2.16. Матрице елементарних трансформација или **елементарне матрице** су:

- матрице E_{ij} које се добијају замјеном мјеста $i-$ тој и j −тој врсти матрице E_n,
- матрице $E_i(\alpha)$ које се добијају множењем $i-$ те врсте са α матрице E_n и
- матрице $E_{ij}(\alpha)$ која се добијају додавањем $i-$тој врсти $j-$те врсте помножене са α матрице E_n.

[8] Marie Ennemond Camille Jordan (1838 –1922), француски математичар

Лако се провјерава да вриједи сљедећа теорема.

Теорема 2.12. Множењем матрице A слијева са неком од матрица елементарних трансформација, добијамо матрицу једнаку матрици која се добија коришћењем одговарајуће елементарне трансформације на матрици A.

✓ Елементарне матрице су регуларне и вриједи:

1. ${E_{ij}}^{-1} = E_{ij}$,
2. ${E_i}^{-1}(\alpha) = E_i(\alpha^{-1})$ и
3. ${E_{ij}}^{-1}(\alpha) = E_{ij}(-\alpha)$.

Дефиниција 2.17. Кажемо да су двије матрице **еквивалентне** ако се једна из друге може добити помоћу елементарних трансформација.

Дефиниција 2.18. Нека је дат систем $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Матрица која се добија додавањем колоне слободних чланова матрици система A, назива се **проширена матрица** и означава са $[A|b]$.

✓ Гаус-Жордановим методом се систем $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ своди на систем $E_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, одакле се добија рјешење система $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, тј. $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$.

✓ Дакле, поступак рјешавања система Гаус-Жордановим методом можемо представити са

$$[A|b] \rightarrow [E_n|\boldsymbol{x}].$$

Примјер 2.23. Ријешити систем

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 8 \\ 4x_1 + \qquad\quad 5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Рјешење: Проширена матрица система је

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right].$$

Вршимо елементарне трансформације док од матрице A не добијемо јединичну матрицу.

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[V_3 - 4V_1]{V_2 - 2V_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & -18 \end{array}\right] \xrightarrow{V_3 + 4V_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & -26 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{13}V_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{V_2 - 3V_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{V_1 - V_2 - V_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Рјешење система је $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = -2$.

Примјер 2.24. Ријешити систем

$$\begin{aligned} x_1 + \quad 2x_2 - \quad 3x_3 &= \quad 2 \\ 6x_1 + \quad 3x_2 - \quad 9x_3 &= \quad 6 \\ 7x_1 + \quad 14x_2 - \quad 21x_3 &= \quad 13 \end{aligned}$$

Проширена матрица система је

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 6 & 3 & -9 & 6 \\ 7 & 14 & -21 & 13 \end{array}\right].$$

Елементарним трансформацијама добијамо

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 6 & 3 & -9 & -6 \\ 7 & 14 & -21 & 13 \end{array}\right] \xrightarrow[V_3 - 7V_1]{V_2 - 6V_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -9 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Одавде добијамо да је систем немогућ, тј. да има празан скуп рјешења.

2.4.4. Ранг матрице

Дефиниција 2.19. **Подматрица** матрице A је матрица која се добија избацивањем одређених врста и колона из матрице A.

Дефиниција 2.20. **Ранг матрице** A је максималан ред њене регуларне квадратне подматрице. Означавамо га са $rangA$ или $rankA$.

Примјер 2.25. Ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

је једнак два, јер су све њене квадратне подматрице реда 3 сингуларне, али постоји подматрица реда 2 која је регуларна, нпр.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

✓ Елементарне трансформације врста матрице [9] не мијењају њен ранг, па се за одређивање ранга матрице може користити Гаусов метод елиминације.

[9] Ранг матрице се мијења ни коришћењем елементарних трансформација колона (дефинишемо их на исти начин као и елементарне трансформације врста).

Примјер 2.26. Одредити ранг матрице $A=\begin{bmatrix}2&1&3&-1&4\\4&2&0&2&1\\2&1&3&1&0\\4&2&12&-2&7\end{bmatrix}$.

Рјешење:

$$A=\begin{bmatrix}2&1&3&-1&4\\4&2&0&2&1\\2&1&3&1&0\\4&2&12&-2&7\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{V_2-2V_1\\V_3-V_1\\V_4-2V_1}}\begin{bmatrix}2&1&3&-1&4\\0&0&-6&4&-7\\0&0&0&2&-4\\0&0&6&0&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{V_4+V_2}\begin{bmatrix}2&1&3&-1&0\\0&0&-6&4&-7\\0&0&0&2&-4\\0&0&0&4&-8\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{V_4-2V_3}\begin{bmatrix}\mathbf{2}&1&3&-1&0\\0&0&\mathbf{-6}&4&-7\\0&0&0&\mathbf{2}&-4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Ранг добијене матрице је једнак 3 (јер је подматрица $\begin{bmatrix}\mathbf{2}&3&-1\\0&\mathbf{-6}&4\\0&0&\mathbf{2}\end{bmatrix}$ регуларна), па је

$rangA=3$.

2.4.5. Кронекер-Капелијева теорема

Без доказа наводимо теорему која одговара на питање о сагласности произвољног система линеарних једначина.

Теорема 2.13. (Кронекер-Капелијева теорема [10]) Систем

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + \cdots & +a_{2n}x_n = & b_2 \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & a_{m3}x_3 + \cdots & +a_{mn}x_n = & b_m \end{array}$$

односно систем

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

је сагласан ако и само ако је

$$rangA = rang[A|b],$$

гдје је A матрица система и $[A|b]$ проширена матрица система. □

[10] Leopold Kronecker (1823-1891), њемачки математичар
Alfredo Capelli (1855 –1910), италијански математичар

Примјер 2.27. Испитати за које вриједности параметра a је систем

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 - \quad x_3 + \quad x_4 &= 2 \\ -x_1 + \quad 2x_2 + \quad x_3 - \quad x_4 &= 1 \\ x_1 - \quad 3x_2 - \quad x_3 + \quad x_4 &= a \end{aligned}$$

сагласан.

Рјешење:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 & a \end{array}\right] \xrightarrow[V_3 - V_1]{V_2 + V_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & a-2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}V_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & a-2 \end{array}\right] \xrightarrow{V_3 + 4V_2} \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{a+2} \end{array}\right]$$

Очигледно је да је $rangA = 2$. Уколико је $a + 2 = 0$, тј. $a = -2$, тада је и $rang[A|b] = 2$ па је систем сагласан. Ако је $a \neq -2$ тада је $rang[A|b] = 3$ јер нпр. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a+2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Дакле за $a = -2$ систем је сагласан, док је за $a \neq -2$ несагласан. □

- ✓ У Поглављу 2.4.2. које се односи на рјешавање система линеарних једначина Крамеровим формулама, наведено је да уколико је $D = 0$ и бар једна од детерминанти $D_i \neq 0$, да је тада систем несагласан. [11] Покажимо да у том случају матрице A и $[A|b]$ немају исти ранг.

  Из услова $D_i \neq 0$ закључујемо да је D_i детерминаната регуларне квадратне подматрице реда n матрице $[A|b]$, па је $rang[A|b] = n$.

  С друге стране, ако би вриједило $rangA = n$, то би значило да је A регуларна матрица тј. $D \neq 0$, што је супротно претпоставци да је $D = 0$. Према томе $rangA \neq rang[A|b]$ и на основу Кронекер-Капелијеве теореме закључујемо да је систем $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ несагласан.

[11] Стр.44