УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 1- ПРЕДАВАЊА

Академска 2017/2018

ТЕМА 1: ОСНОВЕ МАТЕМАТИКЕ

1. **Увод у математичку логику**
2. **Наивна теорија скупова**
3. **Скупови** $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
4. **Скуп** $\mathbb{C}$
5. **Релације и функције**

ЛИТЕРАТУРА: **Милан Јањић, Математика I, ПМФ, Бања Лука, 2001**

Зоран Митровић, Математика I, Бања Лука, 2016 [1]

Наставник: Биљана Војводић

[1] У припреми предавања коришћене су и **Математичка анализа, Милан Меркле**, Електротехнички факултет (Београд 1997) и **Линеарна алгебра, Момир В. Ћелић, Биљана Сукара-Ћелић**, Глас Српски Графика (Бања Лука 2010)

ТЕМА 1: ОСНОВЕ МАТЕМАТИКЕ

1.1. УВОД У МАТЕМАТИЧКУ ЛОГИКУ

- ✓ **Исказ или суд** је потврдна реченица која има смисла и која је тачна (истинита) или нетачна (лажна).

Примјер 1.1. Реченица „Ја сам завршио средњу школу одличним успјехом“ је исказ (њена тачност зависи од тога ко је изговора).

Реченица „Како се зовеш?“ није исказ јер није потврдна реченица.

„$3 > \pi$“ јесте исказ и то нетачан.

„$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots .(n-1)! \cdot n$“ јесте исказ и то тачан. □

Искази се обично означавају малим словима $p, q, r, \ldots$, који се називају **исказним словима**

Искази се повезују **логичким операцијама. То су: конјункција, дисјункција, импликација, еквиваленција и негација.**

- ✓ **Конјункција** два исказа p и q је исказ који је тачан ако и само ако су оба исказа p и q тачна. Означава се са $\boldsymbol{p \wedge q}$ и чита p и q.

- ✓ **Дисјункција** два исказа p и q је исказ који је тачан ако и само ако је бар један од исказа p и q тачан. Означава се са $\boldsymbol{p \vee q}$ и чита p или q.

- ✓ **Импликација** два исказа p и q је исказ који је нетачан ако и само ако је исказ p тачан а исказ q нетачан. Означава се са $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$ и чита: ако p онда q или p имплицира q.

  Ако је импликација $p \Rightarrow q$ тачна, онда се каже да је исказ p **довољан услов** за исказ q. Такође се каже и да је исказ q **потребан услов** за исказ p.

- ✓ **Еквиваленција** два исказа p и q је исказ који је тачан ако и само ако су оба исказа p и q тачна или оба исказа p и q нетачна. Означава се са $\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$ и чита p је еквивалентно са q.

- ✓ **Негација** исказа p је исказ који је тачан ако је исказ p нетачан и нетачан ако је исказ p тачан. Означава се са $\neg \boldsymbol{p}$ и чита не p.

- ✓ **Тачан (истинит)** исказ p означавамо са $\top$ и пишемо $\tau(p) = \top$, а **нетачан (лажан)** са $\perp$ и пишемо $\tau(p) = \perp$. Такође се тачан исказ означава са 1 а нетачан са 0.

Искази повезани логичким операцијама се могу записати помоћу **таблица истинитости.**

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$

p	$\neg p$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

- ✓ Симболе $\top$ и $\perp$ зовемо **логичким константама**. Скуп $\{\top, \perp\}$ са операцијама $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$ чини **исказну алгебру.**

- ✓ **Исказне формуле** су:

  1. исказна слова и логичке константе
  2. $A \wedge B, A \vee B, A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow B, \neg A$, ако су A и B исказне формуле,
  3. формуле добијене кончном примјеном исказних формула из 1. и 2.

✓ **Таутологија** је исказна формула која је тачна за све вриједности својих исказних слова.

Примјер 1.2. Доказати да је исказна формула

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \tag{1.1}$$

таутологија.

Доказ:

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Сљедеће исказне формуле су таутологије:

1. $p \Rightarrow p$,	рефлексивност импликације
2. $p \vee \neg p$,	закон искључења трећег
3. $p \Leftrightarrow \neg\neg p$,	принцип двојне негације
4. $\left.\begin{array}{l} \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \\ \neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \end{array}\right\}$,	Де Органови закони [2]
5. $(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p$,	свођење на апсурд
6. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$,	закон контрапозиције
7. $\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$,	закон силогизма

Примјер 1.3. Користећи Де Морганове законе и таутологију (1.1.) из Примјера 1.2, можемо извести формулу за негацију импликације која се често користи у математичким доказима. Имамо:

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (\neg\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q).$$

Дакле, ако докажемо да вриједи $p \wedge \neg q$, онда смо негирали импликацију $p \Rightarrow q$. □

[2] Augustus De Morgan (1806-1871), британски математичар

Примјер 1.4. Докажимо таутологију 7, закон силогизма. Користићемо таутологију 5, свођење на апсурд. Претпоставимо да исказна формула $\mathcal{F} = \big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ није таутологија, тј. да постоје вриједности исказних слова за које је $\tau(\mathcal{F}) = \perp$. Тада је

$$\tau(\mathcal{F}) = \perp \Leftrightarrow \tau\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big) = \top \wedge \tau(p \Rightarrow r) = \perp \Rightarrow$$

$$\tau(p \Rightarrow q) = \top \wedge \tau(q \Rightarrow r) = \top \wedge \tau(p) = \top \wedge \tau(r) = \perp \Rightarrow$$

$$\tau(q) = \top \wedge \tau(q) = \perp$$

Дакле, претпоставка да $\mathcal{F}$ није таутологија је довела до исказа који је у исто вријеме и тачан и нетачан, што је немогуће на основу принципа искључења трећег. Дакле, $\mathcal{F}$ је таутологија. □

За логичке операције $\wedge, \vee$ и $\neg$ вриједе и сљедеће таутологије:

1. $p \wedge p \Leftrightarrow p, p \vee p \Leftrightarrow p,$ — идемпотентност
2. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p, p \vee q \Leftrightarrow q \vee p,$ — комутативност логичких операција $\wedge$ и $\vee$
3. $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r), (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r),$ — асоцијативност логичких операција $\wedge$ и $\vee$
4. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$ — диструбутивност операције $\wedge$ према $\vee$
5. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r),$ — диструбутивност операције $\vee$ према $\wedge$
6. $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p, p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ — апсорптивност

1.2. НАИВНА ТЕОРИЈА СКУПОВА

- ✓ **Скуп** је основни појам у математици, тј. појам који се не дефинише.

Скупове означавамо великим словима $A, B, C, \dots X, Y, Z, \dots$, а елементе скупа малим словима $a, b, c, \dots, x, y, z, \dots$

Скуп је познат ако можемо одредити све његове елементе.

- ✓ Ако елеменат x **припада (не припада)** скупу X, то означавамо са $x \in X$ ($x \notin X$).

- ✓ Скуп елемената са особином P се означава са $\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\}$.

- ✓ **Квантификатори** су $\forall$ (чита се: **за свако**) и $\exists$ (чита се: **постоји**) и користе се за симболичко записивање.

  $\forall$ је **универзални квантификатор** и означава да сви елементи датог скупа имају исту особину.

  $\exists$ је **егзистенцијални квантификатор** и означава да постоји елемент датог скупа који има дату особину.

- Два скупа X и Y су **једнака** ако имају исте елементе, и пишемо $X = Y$.

- Помоћу конјункције дефинишемо **пресјек** скупова

$$X \cap Y = \{x: x \in X \wedge x \in Y\}$$

  а помоћу дисјункције **унију** скупова

$$X \cup Y = \{x: x \in X \vee x \in Y\}$$

- За дефинисање подскупа користимо импликацију. Ако за све елементе скупа X вриједи

$$(\forall x)\; x \in X \Rightarrow x \in Y$$

  кажемо да је скуп X **подскуп** скупа Y и означавамо са $X \subseteq Y$.

  Знак $\subseteq$ се назива **инклузија**. За скуп Y кажемо да је **надскуп** скупа X.

- **Разлика скупова** X и Y је скуп

$$X \backslash Y = \{x: x \in X \wedge x \notin Y\}$$

  који се састоји од оних елемената скупа X који нису елементи скупа Y.

- ✓ Ако је $X \subseteq Y$ тада се скуп $Y \backslash X$ назива **комплементом скупа $\boldsymbol{X}$ у односу на скуп $\boldsymbol{Y}$**.

  Користи се и ознака $\boldsymbol{X_Y^C}$ или само $\boldsymbol{X^C}$ (уколико је познато у односу на који скуп се узима допуна).

- ✓ **Празан скуп** је скуп који нема елемената и означавамо га са $\emptyset$.

- ✓ **Партитивни скуп** скупа X је скуп свих подскупова скупа X, означавамо га са $\mathcal{P}(X)$.

Примјер 1.5. Нека је $A = \{x \in \mathbb{R}: |x-1| < 2\}, B = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{x-1}{x-2} > 1\right\}$. Одредити скупове $A \cup B, A \cap B, A^C, B^C$.

Примјер 1.6. Одредити партитивни скуп скупа $A = \{a, b, c\}$.

Рјешење:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Уочимо да скуп $\mathcal{P}(A)$ има $8 = 2^3$ елемената. У општем случају, партитивни скуп скупа од n елемената има 2^n елемената. □

Нека је U произвољан скуп и $\mathcal{P}(U)$ партитивни скуп скупа U. Тада за све $X, Y, Z \in \mathcal{P}(U)$ вриједи:

$\boldsymbol{K}^{\cup}: X \cup Y = Y \cup X,$
$\boldsymbol{A}^{\cup}: (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z),$
$\boldsymbol{D}_{\cap}^{\cup}: X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z),$
$\boldsymbol{C}^{\cup}: X \cup X^C = U$
$\boldsymbol{N}^{\cup}: X \cup \emptyset = X$

$\boldsymbol{K}^{\cap}: X \cap Y = Y \cap X,$
$\boldsymbol{A}^{\cap}: (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z),$
$\boldsymbol{D}_{\cup}^{\cap}: X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z),$
$\boldsymbol{C}^{\cap}: X \cap X^C = \emptyset$
$\boldsymbol{N}^{\cap}: X \cap U = X$

Из наведних особина слиједи да партитивни скуп датог скупа са бинарним операцијама $\cup$ и $\cap$ и унарном операцијом комплемента скупа, представља **Булову алгебру**.[3]

Примјер 1.7. Доказати Де Моргановe законе за скупове:

а) $(X \cap Y)^C = X^C \cup Y^C$ и

б) $(X \cup Y)^C = X^C \cap Y^C$.

Доказ:

а) $x \in (X \cup Y)^C \Leftrightarrow x \notin X \cup Y \Leftrightarrow x \notin X \wedge x \notin Y \Leftrightarrow x \in X^C \wedge x \in Y^C \Leftrightarrow x \in X^C \cap Y^C,$
б) $x \in (X \cap Y)^C \Leftrightarrow x \notin X \cap Y \Leftrightarrow x \notin X \vee x \notin Y \Leftrightarrow x \in X^C \vee x \in Y^C \Leftrightarrow x \in X^C \cup Y^C. \square$

[3] George Boole (1815-1864), енглески математичар и филозоф

1.3. СКУПОВИ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ И $\mathbb{R}$

1.3.1. СКУП $\mathbb{N}$

✓ Скуп **природних бројева** означавамо са $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$. [4] Скуп $\mathbb{N}$ има двије битне особине:

- има најмањи елемент, то је број 1 и
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$

У скупу $\mathbb{N}$ важи принцип математичке индукције, који користимо за доказивање разних тврдњи које се тичу природних бројева.

✓ **Принцип математичке индукције**:

Нека је X подскуп скупа $\mathbb{N}$ такав да вриједи:

- $1 \in X$
- $(\forall n \in X)\, n \in X \Rightarrow n+1 \in X$

тада је $X = \mathbb{N}$.

[4] Скуп $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

✓ За доказивање тврдње $P(n)$ у скупу природних бројева, обично се поступа на сљедећи начин:

- доказе се $P(1)$
- докаже се импликација $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Примјер 1.8. Доказати да за све природне бројеве n вриједи

а) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

б) $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{n+1}{3n+4}$.

Рјешење: а) Означимо формулу са $P(n)$.

1. Формула $P(1)$ се своди на $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$, која је тачна.

2. Треба доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ вриједи

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Пошто је

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

добијамо $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ за свако $n \in \mathbb{N}$. □

Примјер 1.9. Формулу из а) можемо искористити за одређивање збира S_n првих n чланова аритметичке прогресије, $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d$. Имамо:

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (a+(n-1)d) =$$

$$na + \big(1+2+\cdots+(n-1)\big)d = na + \frac{(n-1)n}{2}d = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d). \square$$

Примјер 1.10. Доказати да је збир S_n првих n чланова геометријске прогресије $a, a^2, a^3, \ldots a^n$ уз услов $a \neq 1$ једнак

$$S_n = a\frac{1-a^n}{1-a}. \tag{1.2}$$

Доказ:

1. Формула $P(1)$ се своди на $S_1 = a\frac{1-a}{1-a} = a$, која је тачна.
2. Треба доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ вриједи

$$S_n = a\frac{1-a^n}{1-a} \Rightarrow S_{n+1} = a\frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Пошто је

$$S_{n+1} = S_n + a^{n+1} = a\frac{1-a^n}{1-a} + a^{n+1} = \frac{a - a^{n+1} + a^{n+1} - a^{n+2}}{1-a} = a\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

добијамо $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ за свако $n \in \mathbb{N}$. □

Теорема 1.1. За сваки природан број n и сваки реалан број $x \geq -1$ вриједи **Бернулијева неједнакост** [5]

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Доказ:

1. За $n = 1$ имамо $1 + x \geq 1 + x$ што је тачно.

2. Докажимо да вриједи

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (1+x)^n \geq 1 + nx \Rightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x \tag{1.3}$$

Претпоставимо супротно, тј. да постоји природан број m такав да вриједи

$$(1+x)^m \geq 1 + mx \wedge (1+x)^{m+1} < 1 + (m+1)x$$

Тада из $(1+x)^m \geq 1 + mx$, након множења са $1 + x \geq 0$, добијамо

$$(1+x)^{m+1} \geq 1 + (m+1)x + mx^2 \geq 1 + (m+1)x.$$

Дакле, добили смо

$$(1+x)^{m+1} \geq 1 + (m+1)x \wedge (1+x)^{m+1} < 1 + (m+1)x$$

што је немогуће. Према томе, импликација (1.3) вриједи за сваки природан број n. □

[5] Jacob Bernoulli (1654-1705), швајцарски математичар

1.3.2. СКУП $\mathbb{Z}$

- ✓ Збир природних бројева је природан број, али то не мора да буде и њихова разлика. Зато се скуп природних бројева проширује са нулом и негативним бројевима и тако добијамо **скуп цијелих бројева** $\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\dots\}.$$

Једначина

$$m + x = n, \qquad m, n \in \mathbb{N},$$

има рјешење у скупу цијелих бројева, док то није увијек случај у скупу природних бројева.

- ✓ У скупу $\mathbb{Z}$ за елеменат 0 вриједи:

$$(\forall m \in \mathbb{Z})\ m + 0 = 0 + m = m,$$

  и каже се да је 0 **неутрални елеменат за сабирање**.

- ✓ Такође је

$$(\forall m \in \mathbb{Z}) m + (-m) = (-m) + m = 0,$$

  и број $(-m)$ је **инверзан (супротан) броју** m у односу на сабирање.

1.3.3. СКУП $\mathbb{Q}$

- Једначина

$$nx = m, \qquad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N},$$

нема увијек рјешење у скупу цијелих бројева. Због тога се скуп цијелих бројева проширује скупом

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

чије елементе називамо **рационалним бројевима**.

Примјер 1.11. Сваки рационалан број има коначан или бесконачан периодичан децимални приказ. На примјер,

$$\frac{1}{4} = 0{,}25; \ \frac{5}{9} = 0{,}55555\ldots. = 0,\dot{5}; \ \frac{1}{6} = 0{,}16666\ldots. = 0{,}1\dot{6}; \ \frac{1}{101} = 0{,}0099009900\ldots. = 0,\dot{0}09\dot{9}$$

Примјер 1.12. Показати да једначина $x^2 = 2$ нема рјешења у скупу рационалних бројева $\mathbb{Q}$.

Доказ: Претпоставимо супротно, да постоји рационалан број који је рјешење једначине $x^2 = 2$. Тада се то рјешење може записати у облику $\frac{p}{q}$, гдје су p и q узајамно прости природни бројеви. Тада је

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

Одавде добијамо да је p^2 паран број, па је и p такође паран број. Дакле, постоји $k \in \mathbb{N}$ тако да је $p = 2k$. Добијамо

$$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$$

Сада на исти начин закључујемо да је и q паран број, што је у контрадикцији са претпоставком да су p и q узајамно прости природни бројеви. Дакле, једначина $x^2 = 2$ нема рјешење у скупу рационалних бројева $\mathbb{Q}$. □

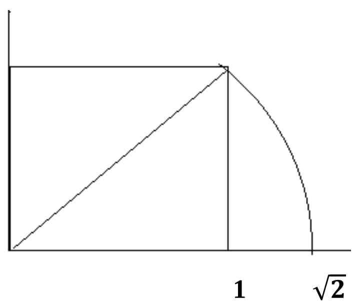
1.3.4. СКУП ℝ

- Из Примјера 1.12 видимо да се рјешење једначине $x^2 = 2$ не може представити помоћу разломака. Бројеве који се не могу представити помоћу разломака називамо **ирационалним бројевима.** То су нпр. бројеви:

$$\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt[5]{3}, 2 + \sqrt[3]{3}, \ldots$$

- Док сваки рационалан број има коначан или бесконачан периодичан децимални приказ, ирационални бројеви имају бесконачан непериодичан децимални приказ.

- **Скуп реалних бројева** је унија скупа рационалних и ирационалних бројева и означавамо га са ℝ.



Слика 1.[6]

- Суштинска разлика између скупова ℚ и ℝ је везана за **аксиому потпуности или непрекидности**. Рационалне бројеве представљамо на рационалној, а реалне на реалној правој. Рационална права је пуна *„шупљина“* и не представља *„компактну“* линију, док реалну праву можемо замислити као непрекидну линију, без *„шупљина“*.

- *„Шупљине“* које се појављују на рационалној правој су попуњене ирационалним бројевима, тако да су рационални бројеви *„густо“* распоређени на реалној правој. То је интуитивна представа о аксиому непрекидности.

[6] Дијагонали квадрата странице 1 на реалној правој не одговара ниједан рационалан број, већ ирационалан број $\sqrt{2}$.

- **Аксиома непрекидности**. Нека су X, Y непразни подскупови скупа реалних бројева такви да

$$(\forall x \in X)(\forall y \in Y)\ \ x \leq y.$$

Тада постоји $c \in \mathbb{R}$ такав да

$$(\forall x \in X)(\forall y \in Y)\ \ x \leq c \leq y.$$

- Аксиома непрекидности не вриједи у скупу рационалних бројева. Ако нпр. ставимо

$$X = \{x \in \mathbb{Q}: x^2 < 2\}, \qquad Y = \{x \in \mathbb{Q}: x^2 > 2\}$$

из Примјера 1.12. добијамо да не постоји $c \in \mathbb{Q}$ тако да је

$$(\forall x \in X)(\forall y \in Y)\ x \leq c \leq y.$$

Поред аксиоме непрекидности у скупу $\mathbb{R}$ вриједе и сљедеће аксиоме:

$(\boldsymbol{R1})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ x + y = y + x$

$(\boldsymbol{R2})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R})\ x + (y + z) = (x + y) + z$

$(\boldsymbol{R3})(\forall x \in \mathbb{R})\ x + 0 = 0 + x = x$

$(\boldsymbol{R4})(\forall x \in \mathbb{R})\ x + (-x) = (-x) + x = 0$

$(\boldsymbol{R5})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = y \cdot x$

$(\boldsymbol{R6})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

$(\boldsymbol{R7})(\forall x \in \mathbb{R})\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

$(\boldsymbol{R8})(\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\})\ x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$

$(\boldsymbol{R9})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + y \cdot z$

$(\boldsymbol{R10})(\forall x \in \mathbb{R})$ важи тачно једна од реалција

$$x < 0, x = 0, x > 0$$

$(\boldsymbol{R11})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})((\ 0 < x \wedge 0 < y) \Rightarrow (0 < x + y \wedge 0 < x \cdot y))$

$(\boldsymbol{R12})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ x < y \Rightarrow 0 < (-x) + y$

Кажемо да је $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ **уређено поље.**

✓ Ако $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, тада

$$(a, b) = \{x: a < x < b\}$$

означава **отворени интервал** (a, b), тј. скуп свих реалних бројева између a и b.

✓ Скуп

$$[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\}$$

означава **затворени интервал** $[a, b]$.

✓ Интервали

$$(a, b] = \{x: a < x \leq b\} \text{ и } [a, b) = \{x: a \leq x < b\}$$

су **полуотворени (или полузатворени**) интервали.

✓ Уводимо и интервале:

$$(a, +\infty) = \{x: a < x\}, \qquad [a, +\infty) = \{x: a \leq x\},$$

$$(-\infty, a) = \{x: x < a\}, \qquad (-\infty, a] = \{x: x \leq a\}.$$

1.3.5. СКУП $\overline{\mathbb{R}}$

- ✓ Ознаку $\overline{\mathbb{R}}$ користимо за **проширени скуп реалних бројева**. Скуп $\mathbb{R}$ проширујемо симболима $+\infty$ и $-\infty$:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

- ✓ Четири основне рачунске операције се проширују са скупа $\mathbb{R}$ на скуп $\overline{\mathbb{R}}$ на сљедећи начин:
  - $a + \infty = \infty + a = +\infty$,
  - $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$,
  - $-(+\infty) = -\infty$,
  - $a(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, a > 0 \\ \mp\infty, a < 0 \end{cases}$,
  - $\frac{a}{\pm\infty} = 0 \ (a \in \mathbb{R})$.

- ✓ Изрази

$$+\infty + (-\infty), \qquad (-\infty) + \infty, \qquad 0(\pm\infty), \qquad (\pm\infty)0, \qquad \frac{a}{0} \ (a \in \overline{\mathbb{R}}), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

нису дефинисани.

1.3.6. ОГРАНИЧЕНИ СКУПОВИ

Дефиниција 1.1. *Нека је S дати скуп реалних бројева.* ***Минимум и максимум скупа*** *S* ***(минимални и максимални елемент скупа)*** *дефинишемо са*

$$min\{x: x \in S\} = a \Leftrightarrow a \in S \wedge (\forall x \in S)\ a \leq x$$

$$max\{x: x \in S\} = b \Leftrightarrow b \in S \wedge (\forall x \in S)\ b \geq x.$$

- ✓ Минимум и максимум скупа не морају увијек да постоје. Нпр. интервал $(0,1)$ нема ни минимум ни максимум.

- ✓ Уколико не постоје минимум и максимум, одбацујемо услов припадања скупу и тражимо a и b ван скупа.

Дефиниција 1.2. *Кажемо да је број $a \in \overline{\mathbb{R}}$* ***доња граница*** *скупа S ако вриједи*

$$(\forall x \in S)\ a \leq x.$$

Кажемо да је број $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ***горња граница*** *скупа S ако вриједи*

$$(\forall x \in S)\ \ b \geq x.$$

Дефиниција 1.3. Кажемо да је *скуп S* ***ограничен одоздо (одозго)*** *ако има коначну доњу (горњу) границу.*

- ✓ За скуп који је ограничен одоздо и одозго кажемо да је **ограничен.**

- ✓ Скуп S је ограничен ако и само ако постоји позитиван реалан број $M > 0$ тако да за свако $x \in S$ важи $|x| \leq M$.

- ✓ Бројеви a и b у дефиницији 3.2. могу да буду реални бројеви или $\pm\infty$. Сваки скуп има једну доњу границу $-\infty$ и једну горњу границу $+\infty$.

Дефиниција 1.4. ***Супремум скупа S*** *је најмања горња граница скупа и означава се са* $supS$. ***Инфимум скупа S*** *је највећа доња граница скупа и означава се са* $infS$.

- ✓ У случају да у скупу постоји минимални елемент, он је једнак инфимуму, а ако постоји максимални елемент он је једнак супремуму.

Примјер 1.13. За скупове $(a, b), [a, b], a, b \in \mathbb{R}, a < b$ скуп горњих граница је $[b, +\infty]$ а скуп доњих граница $[-\infty, a]$. Највећа доња граница је a, а најмања горња граница је b. Према томе, инфимум је једнак a а супремум b. То су уједно и минимум, односно максимум скупа $[a, b]$.

Примјер 1.14. За скуп $(a, +\infty)$ скуп горњих граница је скуп $\{+\infty\}$. Дакле, скуп нема коначну горњу границу, па није ограничен одозго и његов супремум је $+\infty$. Скуп је ограничен одоздо и његов инфимум је a.

Примјер 1.15. Одредити инфимум и супремум празног скупа.

Рјешење: Скуп горњих, односно доњих граница празног скупа је $\overline{\mathbb{R}}$. Према томе

$$inf\emptyset = +\infty, \ \ sup\emptyset = -\infty.$$

Теорема 1.2. *Сваки одозго (одоздо) ограничен непразан скуп X има супремум (инфимум) у скупу* $\mathbb{R}$.

Доказ: Нека је X одозго ограничен непразан скуп. Скуп X има коначну горњу границу па је скуп

$$Y = \{y: y \in \mathbb{R} \wedge (\forall x \in X) \ \ x < y\}$$

непразан. Пошто су X и Y непразни подскупови скупа $\mathbb{R}$ такви да је

$$(\forall x \in X)(\forall y \in Y) \ \ x < y$$

можемо примијенити аксиому непрекидности. Дакле, постоји $c \in \mathbb{R}$ такво да је

$$(\forall x \in X)(\forall y \in Y) \ \ x < c < y.$$

Дакле, c је горња граница скупа X која је мања од свих других горњих граница, па је

$$c = minY = supX.$$

Аналогно се доказује да сваки одоздо ограничен скуп има инфимум у скупу $\mathbb{R}$. □

Примјер 1.16. Одредити инфимуме и супремуме сљедећих скупова и провјерити да ли су они минимални, односно максимални елементи тих скупова:

а) $S = \left\{\frac{2}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, б) $S = \left\{\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{n}{2n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$, в) $S = \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Рјешење: а) За $n \in N$ је очигледно

$$0 < \frac{2}{n} \leq 2.$$

Одавде је $supS = maxS = 2$. Скуп S је ограничен одоздо са 0 па према теореми 1.2 има инфимум. Покажимо да је инфимум скупа једнак 0. Претпоставимо супротно, да је неко $c > 0$ инфимум скупа S. Тада је

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; c \leq \frac{2}{n}.$$

Дакле,

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; n \leq \frac{2}{c}$$

што је немогуће, јер ако је $n_0 = \left[\frac{2}{c}\right]$,[7] тада за $n > n_0$ важи

$$n > \frac{2}{c} \Rightarrow 0 < \frac{2}{n} < c$$

што је супротно претпоставци да је c инфимум скупа S. Дакле, $infS = 0$. Инфимум није минимум јер не припада скупу.

[7] $[a]$ је ознака за највећи цио број који је мањи од a

б) За $n \in \mathbb{N}$ је

$$\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{n}{2n+1} \geq \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2(2n+1)} > 0.$$

Покажимо да је инфимум скупа једнак 0. Претпоставимо супротно, да је неко $c > 0$ инфимум скупа S. Нека је $n_0 = \left[\frac{1-2c}{4c}\right]$. Тада за $n > n_0$ важи

$$0 < \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} < c$$

што је супротно претпоставци да је c инфимум скупа S. Број 0 не припада скупу, па није минимум. Даље је за $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} \leq \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} = \frac{4n+1}{2(2n+1)} < 1$$

Сада се на сличан начин као за инфимум, покаже да је $supS = 1,$ који није максимум.

в)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

(видјети (1.2) из Примјера 1.10). Даље за свако $n \in \mathbb{N}$ имамо $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2^n} < 1$ и лако се покаже да је $infS = minS = \frac{1}{2},\ supS = 1.$ □

Теорема 1.3. Архимедова теорема. За сваки реалан број $x > 0$ и сваки реалан број y постоји природан број n такав да је $nx > y$.

Доказ: Претпоставимо супротно, тј.

$$(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ \ x > 0 \wedge\ nx \leq y.$$

Тада је скуп

$$A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$$

одозго ограничен са y, па по теореми 1.2 има супремум. Нека је $b = supA$. За сваки $n \in \mathbb{N}$ је

$$nx = (n+1)x - x \leq b - x,$$

јер је $(n+1)x \in A$. Дакле, добијамо да је $b - x$ горња граница скупа A која је мања од b, што је немогуће јер је b супремум, односно најмања горња граница. Дошли смо до контрадикције, што значи

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})\ \ x > 0\ \Rightarrow\ \ nx > y.\ \square$$

Теорема 1.4. Ако су инфимум и супремум скупа A коначни, тада важи:

1. $infA = a \Leftrightarrow (\forall x \in A)(x \geq a) \wedge (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)(x < a + \varepsilon)$
2. $supA = b \Leftrightarrow (\forall x \in A)(x \leq b) \wedge (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)(x > b - \varepsilon).\square$

Нека су $A, B \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$. Дефинишемо скупове λA и $A + B$ са

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}, \qquad A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Теорема 1.5. Ако су A, B непразни подскупови скупа $\mathbb{R}$, тада важи:

1. $inf(-A) = -supA, \;\; sup(-A) = -infA,$
2. $A \subseteq B \Rightarrow supA \leq supB \wedge \; infA \geq infB,$
3. $inf(\lambda A) = \begin{cases} \lambda infA, \lambda > 0 \\ \lambda supA, \lambda < 0 \end{cases}$,
4. $inf(A + B) = infA + infB, \;\; sup(A + B) = supA + supB.$

Доказ. 1. Нека је $s = supA$. Tada je

$$(\forall x \in A)\, x \leq s \;\Leftrightarrow (\forall x \in A) - x \geq -s\, .$$

Дакле,

$$(\forall y \in (-A))\; y \geq -s,$$

па је $(-s)$ доња граница скупа $(-A)$. Докажимо да је $(-s)$ највећа доња граница. Претпоставимо супротно, да је $(-s) + \epsilon, \epsilon > 0$ највећа доња граница.

Тада је

$$(\forall y \in (-A))\, y \geq -s + \epsilon \Rightarrow \big(\forall y \in (-A)\big) - y \leq s - \epsilon \Rightarrow (\forall x \in A)\, x \leq s - \epsilon$$

што би значило да је $s - \epsilon$ горња граница скупа A која је мања од супремума s.

Дакле,

$$(-s) = inf(-A) \Rightarrow inf(-A) = -supA.$$

Аналогно доказујемо тврдњу за супремум.

3. Из $A \subseteq B$ добијамо

$$(\forall a \in A)(\exists b \in B)\, a \leq b$$

па је $supA \leq supB$. Аналогно за инфимум.

2. Слиједи директно из дефиниције инфимума и супремума.

3. Нека је $m_1 = infA, m_2 = infB$. Тада је

$$(\forall a \in A)\, a \geq m_1 \wedge (\forall b \in B)\, b \geq m_1$$

Нека $s \in A + B$. Тада постоје $a \in A$ и $b \in B$ такви да је $s = a + b$ и добијамо

$$s \geq m_1 + m_2.$$

Покажимо да је s највећа доња граница скупа $A + B$.

Нека је $\epsilon > 0$. Према теореми 1.4 постоје $a_1 \in A$ и $b_1 \in B$такви да је

$$a_1 < m_1 + \frac{\epsilon}{2} \wedge b_1 < m_2 + \frac{\epsilon}{2}.$$

То значи да

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists s_1 \in A + B)(s_1 = a_1 + b_1 < m_1 + m_2 + \varepsilon)$$

што значи да је $m_1 + m_2$ инфимум скупа $A + B$. Аналогно се доказује да је супремум збира скупова једнак збиру супремума. □

1.3.7. АПСОЛУТНА ВРИЈЕДНОСТ, ОТВОРЕНИ И ЗАТВОРЕНИ СКУПОВИ

- ✓ Апсолутна вриједност $|a|$ реалног броја a се дефинише са

$$|a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}.$$

- ✓ Особине апсолутне вриједности:

1. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0,$
2. $|a| = |-a|$
3. $-|a| \leq a \leq |a|,$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (неједнакост троугла)
5. $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$
6. $|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$
7. $|ab| = |a||b|$
8. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$

гдје су a, b произвољни реални бројеви.

Из дефиниције апсолутне вриједности слиједи да за реалан број $\epsilon > 0$ важи

$$|x-a| < \epsilon \Leftrightarrow x \in (a-\epsilon, a+\epsilon).$$

Дефиниција 1.5. Интервал $(a-\epsilon, a+\epsilon), \epsilon > 0$ зовемо $\boldsymbol{\epsilon}$ **−околином** тачке a. **Околина** тачке a је сваки интервал који садржи неку ϵ −околину тачке a.

Примјер 1.17. Показати да за сваке двије тачке x и y $(x \neq y)$ постоје двије дисјунктне околине тих тачака.

Доказ: Нека је $\epsilon = \frac{|x-y|}{2} > 0$. Околине $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ и $(y-\epsilon, y+\epsilon)$ су дисјунктне околине тачака x и y.

Дефиниција 1.6. Непразан скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ је **отворен** ако је околина сваке своје тачке. Празан скуп по дефиницији је отворен. Скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ је **затворен** ако је његов комплемент у односу $\mathbb{R}$ отворен, тј. ако је отворен скуп $\mathbb{R} \setminus A$.

- ✓ Интервали $(a,b), (a,+\infty), (-\infty,b)$ су отворени интервали, а интервали $[a,b], [a,+\infty), (-\infty,b]$ су затворени $(a<b)$.

1.4. СКУП $\mathbb{C}$

- Једначина $x^2 + 1 = 0$ нема рјешења у скупу реалних бројева. Њена рјешења су i и $-i$. Комплексан број $i = \sqrt{-1}$ називамо **имагинарном јединицом.**

- Скуп комплексних бројева означавамо са

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

  Број x се зове **реални**, а број y **имагинарни** дио комплексног броја $z = x + iy$, и означавамо са $x = Rez, y = Imz$.

- **Коњугована вриједност** комплексног броја $z = x + iy$ је број $\bar{z} = x - iy$.

- **Модуо комплексног броја** $z = x + iy$ је број $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

✓ Нека су $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ дати комплексни бројеви. Операције сабирања, одузимања, множења и дијељења се врше на сљедећи начин:

- Збир

  $$(x_1 + iy_1)+(x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

- Разлика

  $$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

- Производ

  $$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

- Количник

  $$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}, \qquad {x_2}^2 + {y_2}^2 \neq 0$$

Примјер 1.18. а) Дати су комплексни бројеви $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 2 - 3i$. Одредити њихов збир, производ и количник.

б) Одредити $Rez, Imz, \bar{z}$ и $|z|$ ако је $z = i^{125}\frac{(1-i)^7}{(1+i)^6}$.

в) Наћи све комплексне бројеве за које вриједи $Im\frac{\bar{z}}{z} = 1, z \neq 0$.

Рјешење: б) Лако се види да је $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i, k \in \mathbb{Z}$. Према томе, $i^{125} = i^{4\cdot31+1} = i$ и добијамо

$$z = i(1-i)\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^6 = (1+i)\left(\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}\right)^6 = (1+i)\left(\frac{-2i}{2}\right)^6 = (1+i)i^6 = -1+i$$

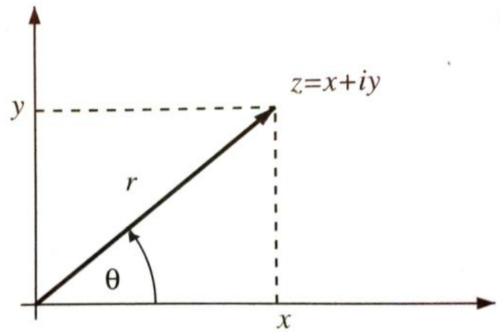
$$Rez = -1, Imz = 1, \bar{z} = -1 - i, |z| = \sqrt{2}$$

в)

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{x-iy}{x+iy} = \frac{(x-iy)^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2-2xyi}{x^2+y^2} \Rightarrow Im\frac{\bar{z}}{z} = -\frac{2xy}{x^2+y^2} \Rightarrow -\frac{2xy}{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow$$

$$(x+y)^2 = 0 \Rightarrow y = -x \ \Rightarrow \ z = x - ix, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Комплексном броју $z = x + iy$ у Декартовом [8] координатном систему можемо придружити тачку z са координатама (x, y) (комплексна или Гаусова [9] раван).



Нека је r растојање тачке z од координатног почетка, а θ угао између позитивног дијела реалне осе и радијус-вектора тачке z. Очигледно је

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad x = rcos\theta, \qquad y = rsin\theta,$$

Угао

$$\theta = argz \in [0,2\pi)$$

се назива **аргумент** комплексног броја z.

Дакле, број $z = x + iy$ можемо писати у **тригонометријском облику**

$$z = r(cos\theta + isin\theta).$$

[8] Rene Decartes (1596-1650), француски математичар
[9] Johann Carl Friedrich Gauss, lat. Carolus Fridericus Gauss (1777-1855), њемачки математичар

Користи се и ознака

$$z = re^{i\theta}$$

и то је **експоненцијални облик** комплексног броја.

Примјер 1.19. Представити сљедеће комплексне бројеве у тригонометријском облику:

а) $z = -1 + i$, б) $z = 1 - i\sqrt{3}$, в) $z = \sqrt{3} + i$.

*Рјешење:*а) $r = \sqrt{2}$, $cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$ па је

$z = -1 + i = \sqrt{2}\left(cos\dfrac{3\pi}{4} + isin\dfrac{3\pi}{4}\right).$

б) $z = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(cos\frac{5\pi}{3} + isin\frac{5\pi}{3}\right).$ □

Примјер 1.20. Одредити у комплексној равни сљедеће скупове:

$$A=\left\{z\in\mathbb{C}: Re\,\frac{z-1}{z+1}<0\right\}, B=\{z\in\mathbb{C}: |z-1-i|=1\}.$$

Рјешење: За скуп A имамо

$$\frac{z-1}{z+1}<0\Leftrightarrow\frac{x-1-iy}{x+1-iy}<0\Leftrightarrow\frac{(x-1)-iy}{(x+1)-iy}\cdot\frac{(x+1)+iy}{(x+1)+iy}<0\Leftrightarrow\frac{x^2+y^2-1-2xyi}{(x+1)+y^2}\Rightarrow$$

$$Re\,\frac{z-1}{z+1}<0\Leftrightarrow\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)+y^2}<0\Leftrightarrow x^2+y^2-1<0\Leftrightarrow x^2+y^2<1.$$

Скуп A је унутрашњост круга полупречника 1 са центром у координатном почетку.

За скуп B имамо

$$|z-1-i|=1\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2=1$$

па је B кружница полупречника 1 са центром у тачки $(1,1)$. □

Теорема 1.6. Муаврове формуле. [10] Ако су дати комплексни бројеви

$$z_1 = r_1(cos\theta_1 + isin\theta_1) \text{ и } z_2 = r_2(cos\theta_2 + isin\theta_2)$$

тада је:

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2(cos(\theta_1 + \theta_2) + i\, sin(\theta_1 + \theta_2))$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$
3. $(r_1(cos\theta_1 + isin\theta_1))^n = {r_1}^n(cosn\theta_1 + isinn\theta_1)$
4. $\sqrt[n]{r_1(cos\theta_1 + isin\theta_1)} = \sqrt[n]{r_1}\left(cos\frac{\theta_1 + 2k\pi}{n} + isin\frac{\theta_1 + 2k\pi}{n}\right), k = 0,1,2, \dots, n-1.$

Доказ:

1. Множењем комплексних бројева z_1 и z_2и примјеном адиционих формула добијамо

$$z_1 z_2 = r_1(cos\theta_1 + isin\theta_1) \cdot r_2(cos\theta_2 + isin\theta_2) =$$
$$r_1 r_2(cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2 + i(cos\theta_1 sin\theta_2 + sin\theta_1 cos\theta_2)) =$$
$$r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

[10] Abraham de Moivre (1667-1754), француски математичар

2. Имамо

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{r_1(cos\theta_1 + isin\theta_1) \cdot r_2(cos\theta_2 + isin\theta_2)}{{r_2}^2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

3. Користимо принцип математичке индукције.

Очигледно формула вриједи за $n = 1$. Докажимо импликацију

$$(r_1(cos\theta_1 + isin\theta_1))^n = {r_1}^n(cosn\theta_1 + isinn\theta_1) \Rightarrow$$

$$(r_1(cos\theta_1 + isin\theta_1))^{n+1} = {r_1}^{n+1}(\cos(n+1)\theta_1 + isin(n+1)\theta_1)$$

Имамо

$$(r_1(cos\theta_1 + isin\theta_1))^{n+1} = (r_1(cos\theta_1 + isin\theta_1))^n \cdot r_1(cos\theta_1 + isin\theta_1) =$$

$${r_1}^n(cosn\theta_1 + isinn\theta_1) \cdot r_1(cos\theta_1 + isin\theta_1) =$$

$${r_1}^{n+1}(cosn\theta_1 cos\theta_1 - sinn\theta_1 sin\theta_1 + i(cosn\theta_1 sin\theta_1 + sinn\theta_1 cos\theta_1)) =$$

$${r_1}^{n+1}(\cos(n+1)\,\theta_1 + isin(n+1)\theta_1).$$

4. Доказује се коришћењем формуле 3. □

Примјер 1.21. Израчунати:

а) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{17}$, б) $\left(\frac{-1+i}{1+i}\right)^{15}$, в) $\sqrt[4]{-1-i}$, г) $\sqrt[6]{-1}$.

1.5. РЕЛАЦИЈЕ И ФУНКЦИЈЕ

1.5.1. РЕЛАЦИЈЕ

✓ **Уређени пар** (x, y) се дефинише

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$ [11]

У уређеном пару (x, y), x се назива **прва**, а y **друга координата (компонента)**.

✓ Из дефиниције уређеног пара добијамо

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_1$$

✓ **Декартов или директни производ** скупова X и Y се означава са $X \times Y$ и дефинише са

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}.$$

[11] Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), руски математичар

- ✓ **Бинарна релација** ρ између непразних скупова X и Y је произвољан непразан подскуп Декартовог производа $X \times Y$. Ако је $X = Y$ онда говоримо о бинарној релацији ρ на напразном скупу X.

- ✓ Ако уређени пар (x, y) припада релацији ρ, то записујемо $(x, y) \in \rho$ или $x\rho y$.

- ✓ За бинарну релацију ρ на скупу X кажемо да је:

  - **рефлексивна**, ако вриједи $(\forall x \in X)\ x\rho x$
  - **симетрична**, ако вриједи $(\forall x, y \in X)\ x\rho y \Rightarrow y\rho x$
  - **антисиметрична**, ако вриједи $(\forall x, y \in X)\ x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y$
  - **транзитивна,** ако вриједи $(\forall x, y, z \in X)\ x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$

- ✓ Бинарна релација је **релација еквиваленције** ако је рефлексивна, симетрична и транзитивна.

- ✓ Бинарна релација је **релација поретка или парцијалног уређења** ако је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

- ✓ Скуп $C(x) = \{y: (x, y) \in \rho\}$ је **класа еквиваленције** за елемент x.

Примјер 1.22. Показати да је релација ρ дефинисана на скупу $\mathbb{Z}$ са

$$(x, y) \in \rho \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ x - y = 3k$$

релација еквиваленције и одредити класе еквиваленције.

Рјешење: Имамо

1. $(\forall x \in \mathbb{Z})\ x - x = 0 = 3 \cdot 0 \Rightarrow (x, x) \in \rho$ рефлексивност

2. $(\forall x, y \in \mathbb{Z})(x, y) \in \rho \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ x - y = 3k \Rightarrow$

$y - x = 3 \cdot (-k) \Rightarrow (y, x) \in \rho$ симетричност

3. $(\forall x, y, z \in \mathbb{Z})(x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \Rightarrow (\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z})\ x - y = 3k_1 \wedge y - z = 3k_2 \Rightarrow$

$x - z = 3(k_1 + k_2) \Rightarrow (x, z) \in \rho$ транзитивност

$C(0) = \{y : (\exists k \in \mathbb{Z})\ y = 3k\} = \{3k, k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots\}$

$C(1) = \{y : (\exists k \in \mathbb{Z})\ y - 1 = 3k\} = \{3k + 1, k \in \mathbb{Z}\} = \{1, 4, -2, 7, -5, \dots\}$

$C(2) = \{y : (\exists k \in \mathbb{Z})\ y - 2 = 3k\} = \{3k + 2, k \in \mathbb{Z}\} = \{2, 5, -1, 8, -4, \dots\}.$ □

Теорема 1.7. Ако је ρ релација еквиваленције на скупу X, тада су класе еквиваленције непразне, двије класе еквиваленције се или поклапају или су дисјунктне, и унија свих класа еквиваленције је скуп X.

Доказ:

1. $(\forall x \in X)(x,x) \in \rho \Rightarrow x \in C(x) \Rightarrow C(x) \neq \emptyset$

2. Нека је $C(x) \neq C(y)$ и претпоставимо да је $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$, тј. да постоји $z \in C(x) \cap C(y)$. Тада је $x\rho z \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z \wedge z\rho y \Rightarrow x\rho y \Rightarrow C(x) = C(y)$, што је супротно претпоставци да је $C(x) \neq C(y)$.

3. Очигледно је $(\forall x \in X)\ C(x) \subseteq X$ па је и $\bigcup_{x\in X} C(x) \subseteq X$. Такође за свако $x \in X$ важи $x \in C(x)$ па је $X \subseteq \bigcup_{x\in X} C(x)$. Према томе вриједи $\bigcup_{x\in X} C(x) = X$. □

Примјер 1.23. Показати да је релација $\subseteq$ релација парцијалног уређења на скупу $\mathcal{P}(S)$, гдје је S произвољан непразан скуп.

Рјешење: Имамо

1. $\big(\forall X \in \mathcal{P}(S)\big)\ X \subseteq X$	рефлексивност
2. $\big(\forall X, Y \in \mathcal{P}(S)\big)\ (X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X) \Rightarrow X = Y$	антисиметричност
3. $\big(\forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(S)\big)\ (X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z) \Rightarrow X \subseteq Z$	транзитивност □

1.5.2. ФУНКЦИЈЕ

Функција је специјалан случај релације.

- ✓ Нека су A и B непразни скупови. **Придруживање (кореcподенција, правило)** f које **сваком** елементу x из A додјељује **тачно један** елемент $f(x)$ из B назива се **функција**.

Дакле, **релација $\boldsymbol{f \subset A \times B}$ је функција ако** вриједе сљедећа два услова:

1. $(\forall x \in A)(\exists y \in B)(x, y) \in f$
2. $(\forall x \in A)(\forall y_1 \in B)(\forall y_2 \in B)(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

- ✓ Скуп A је **домен** а скуп B **кодомен**.

- ✓ **Скуп вриједности функције** f је скуп

$$f(A) = \{f(x): x \in A\}.$$

Очигледно је $f(A) \subset B$.

Функцију чији је домен A а кодомен B, записујемо у облику $f: A \to B$, а да је елементу x придружен елемент $f(x)$, у облику $x \mapsto f(x)$.

Примјер 1.24. Одредити домене функције $a)\ f(x) = \sqrt[4]{lnsinx}, b)\ f(x) = arccos(2sinx)$.

*Рјешење:*а) $D = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$, б) $D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$.

- ✓ Двије функције $f: A \to B$ и $g: C \to D$ су **једнаке** ако и само ако вриједи

$$A = C \wedge (\forall x \in A) f(x) = g(x).$$

Примјер 1.25. Функције $f(x) = 2logx$ и $f(x) = logx^2$ нису једнаке. Зашто? Да ли су једнаке функције $f(x) = x$ и $(x) = \sqrt{x^2}$?

- ✓ **График** функције $f: A \to B$ је скуп

$$G(f) = \{(x, y): (x, y) \in A \times B, y = f(x)\}$$

- ✓ За функцију $f: A \to B$ кажемо да је **инјекција** ако вриједи

$$(\forall x_1 \in A)(\forall x_2 \in A)\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- ✓ За функцију $f: A \to B$ кажемо да је **сирјекција** ако вриједи

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)\ y = f(x)$$

✓ За функцију $f: A \to B$ кажемо да је **бијекција** ако је и инјекција и сирјекција.

Примјер 1.26. Нека је $f: A \to B$ инјекција. Показати да важи

$$(\forall A \subset X)\ \ f^{-1}\big(f(A)\big) = A.$$

Доказ: Нека је $x \in A$. Тада је $f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}\big(f(A)\big) \Rightarrow A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$. Обрнуто, нека је $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$. Тада постоји $y \in A$ тако да је $f^{-1}\big(f(y)\big) = x$. Одавде добијамо $f(y) = f(x)$ и пошто је функција инјекција закључујемо да је $x = y \in A$. Према томе $f^{-1}\big(f(A)\big) \subseteq A$.□

✓ Нека су дате функције $f: A \to B$ и $g: B \to C$. Функција $g \circ f: A \to C$ дата са

$$(\forall x \in A)\ \ (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

назива се **композиција функција** f и g.

Примјер 1.27. Нека је $f(x) = \sqrt{x+1}, x > 0, g(x) = \frac{1}{x}, x > 0$. Тада је

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\big(\sqrt{x+1}\big) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x} + 1}.\square$$

Композиција функција није комутитативна, тј. у општем случају не вриједи $g \circ f = f \circ g$. Међутим, композиција функција је асоцијативна, тј. ако $f: A \to B$, $g: B \to C$ и $h: C \to D$, тада је

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

- ✓ Нека је функција $f: A \to B$ бијекција. Функција $f^{-1}: B \to A$ за коју вриједи

$$(\forall y \in B) f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

назива се **инверзна функција** функције f.

За график функције f^{-1} имамо

$$G(f^{-1}) = \{(y, x): (y, x) \in B \times A, y = f(x)\}$$

односно график функције f^{-1} је симетричан графику функције f у односу на праву $y = x$.

Примјер 1.28. а) За функцију $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$, инверзна функција је функција $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за коју вриједи $x = 3f^{-1}(x) - 1$, тј. $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$.

б) За функцију $f(x) = sinhx = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$, инверзна функција је

$$f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), x \in \mathbb{R}.$$ [12] □

✓ Нека је $X \subseteq \mathbb{R}, Y \subseteq \mathbb{R}$. За функцију $f\colon X \to Y$ кажемо да је **парна** ако вриједи

$$(\forall x \in X) f(x) = f(-x)$$

односно **непарна** ако вриједи

$$(\forall x \in X) f(x) = -f(-x).$$

Примјер 1.29. Функција $f(x) = 4x^2 - 1$ је парна, функција $f(x) = -sin^3 x + 2x$ је непарна, док функција $f(x) = -x^2 + 3x$ није ни парна ни непарна.

[12] **Хиперболичке функције** (синус, косинус, тангенс и котангенс) се дефинишу са $sinhx = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$, $coshx = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$, $tanhx = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$, $cothx = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$.

- За функцију $f: X \to Y$ кажемо да је **ограничена одозго** ако постоји константа $M \in \mathbb{R}$ таква да је

$$(\forall x \in X) f(x) \leq M,$$

односно **ограничена одоздо** ако постоји константа $m \in \mathbb{R}$ таква да је

$$(\forall x \in X) f(x) \geq m.$$

Функција је **ограничена** ако је ограничена одозго и одоздо.

Примјер 1.30. Функција $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$ је ограничена одоздо јер је $\frac{1}{x} > 0$ за све $x > 0$. Међутим, функција није ограничена одозго јер не постоји константа $M > 0$ таква да за све $x > 0$ вриједи $\frac{1}{x} \leq M$. Да ли је ограничена функција $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$?

- За функцију $f: X \to Y$ кажемо да је **периодична** ако постоји реалан број $p \neq 0$ такав да вриједи

$$(\forall x \in X)\, x + p \in X \wedge f(x + p) = f(x)$$

Најмањи позитиван период функције f се назива **основни период** функције.

Примјер 1.31. а) Функција $f(x) = 3\sin(5x-2)\,, x \in \mathbb{R}$ је периодична са основним периодом $\frac{2\pi}{5}$.

б) Функција $f(x) = \sin\sqrt{x}\,, x \geq 0$ није периодична јер растојање између сусједних нула $x_k = k^2\pi^2$ тежи ка ∞ кад $k \to \infty$.

- ✓ За функцију $f: X \to Y$ кажемо да је **монотоно растућа (неопадајућа)** ако за све $x_1, x_2 \in X$ вриједи

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \ \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$$

односно **монотоно опадајућа (нерастућа)** ако за све $x_1, x_2 \in X$ вриједи

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \ \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$$

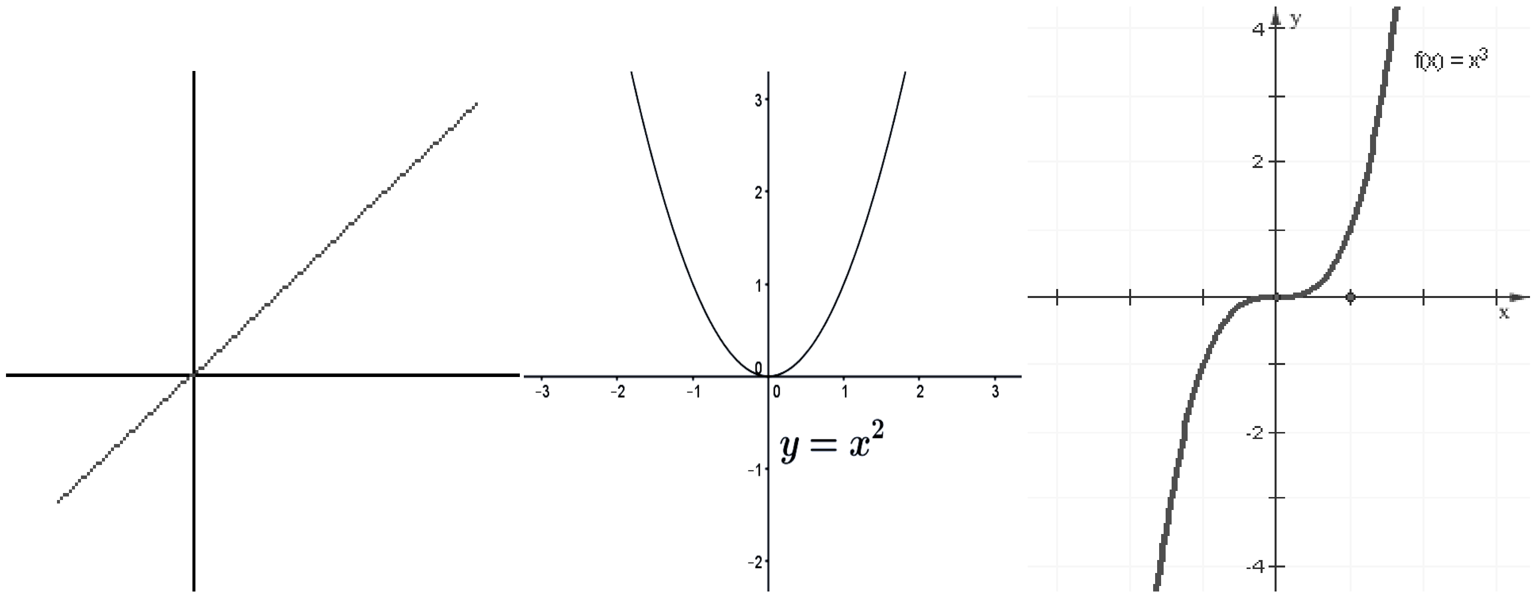
За функцију се каже каже да је **монотона** ако има једну од наведених особина.

Примјер 1.32. Функција $f(x) = -2x^3$ је монотоно опадајућа.

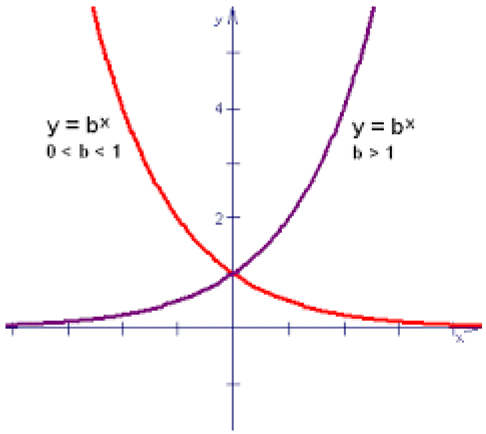
1.5.3. ЕЛЕМЕНТАРНЕ ФУНКЦИЈЕ

✓ **Основне елементарне функције** су:

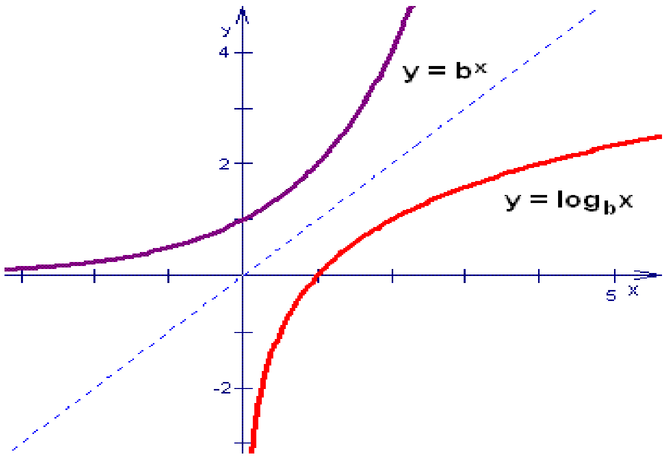
- **степена функција**, $f(x) = x^n, x \in \mathbb{R}, n \in N$,



- **експоненцијална функција**, $f(x) = b^x, x \in \mathbb{R}, b > 0, b \neq 1$



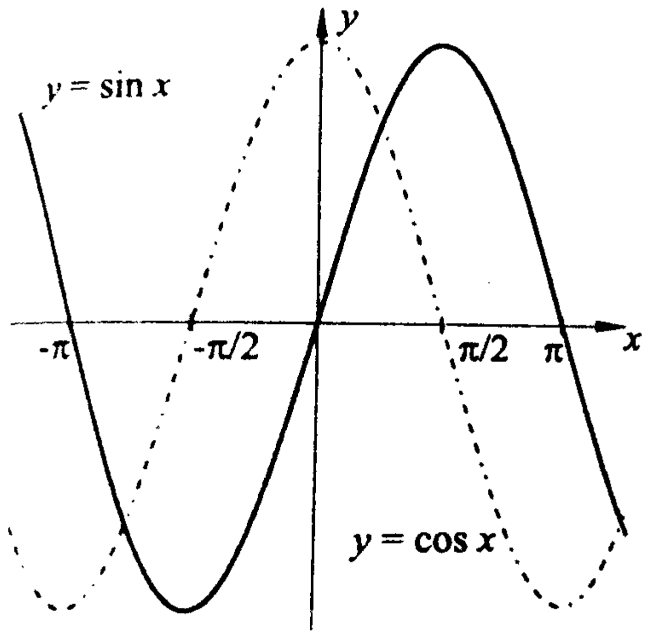
- **логаритамска функција**, $f(x) = \log_b x\,, x > 0, b > 0, b \neq 1,$

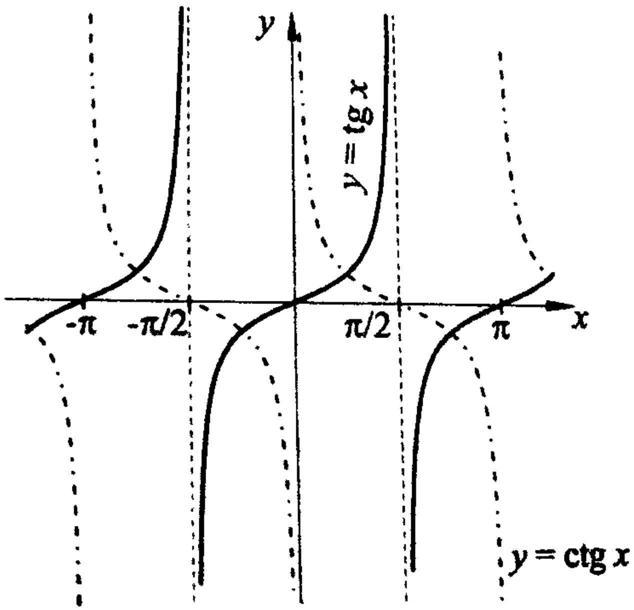


- **тригонометријске функције**,

○ $f(x) = sinx, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = cosx, x \in \mathbb{R}$

○ $f(x) = tgx, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}, f(x) = ctgx, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

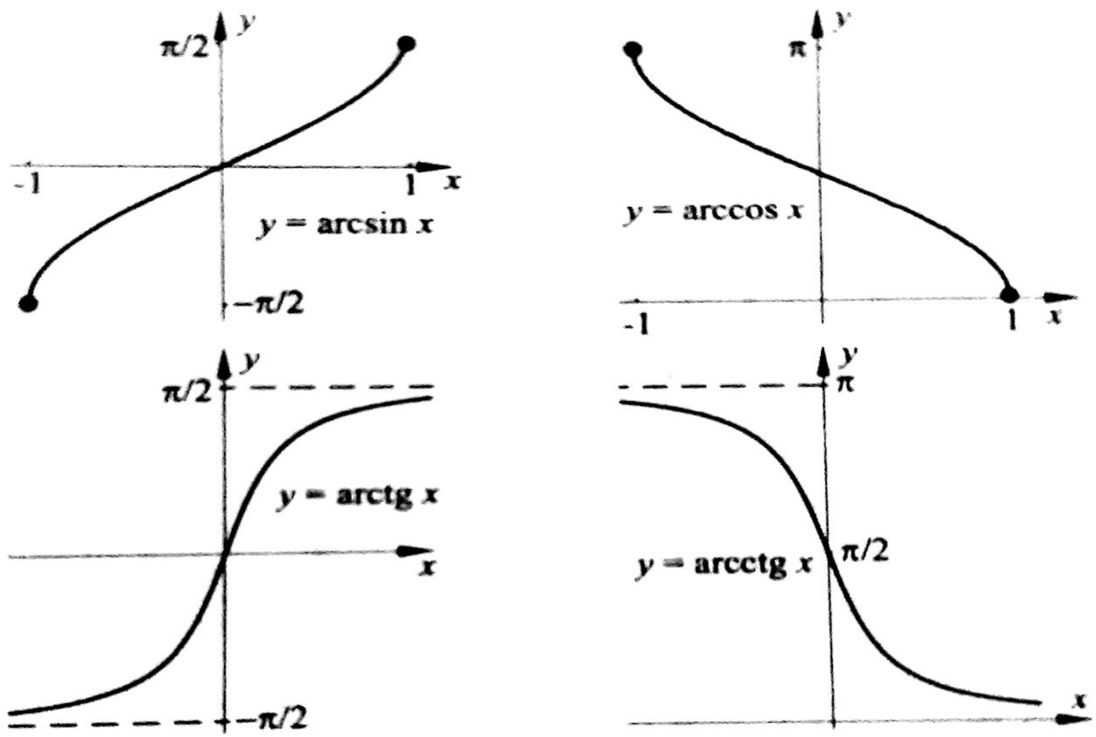




- **инверзне тригонометријске функције,**

○ $f(x) = arcsinx, x \in [-1,1]$, $f(x) = arccosx, x \in [-1,1]$,

○ $f(x) = arctgx, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = arcctgx, x \in \mathbb{R}$



- ✓ **Елементарне функције** се добијају примјеном коначног броја алгебарских операција: сабирања, одузимања, множења и дијељења, као и примјеном коначно много операција композиције, на основне елементарне функције.