УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 2- ПРЕДАВАЊА

Академска 2017/2018

ТЕМА 2: ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЈЕНЉИВИХ

2.1. Увод

2.2. Гранична вриједност функција више промјенљивих

2.3. Непрекидност функција више промјенљивих

2.4. Диференцијални рачун функција више промјенљивих

2.5. Екстреми функција више промјенљивих

ЛИТЕРАТУРА: **Милан Јањић, Математика I, ПМФ, Бања Лука, 2001** [1]

Наставник: Биљана Војводић

[1] У припреми предавања коришћене су и **Математичка анализа 2, Душан Аднађевић и Зоран Каделбург** (Наука, Београд 1998) и **Математичка анализа**, **Милан Меркле**, Електротехнички факултет (Београд 1997)

ТЕМА 2: ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЈЕНЉИВИХ

2.1. УВОД

Дефиниција 2.1. Пресликавање $f: D \to \mathbb{R}$ гдје је $D \subset \mathbb{R}^n$, назива се **реална функција n реалних промјенљивих.** Скуп D се назива **скуп дефинисаности** функције f.

Функцију двије промјенљиве, за $n = 2$, обично означавамо са

$$z = f(x, y), (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

док за $n = 3$ користимо ознаку

$$u = f(x, y, z), (x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3.$$

Ако је дата функција $z = f(x, y)$ са скупом дефинисаности D, онда скуп тачака

$$S = \{(x, y, f(x, y)): (x, y) \in D\}$$

у простору представља површ која се може сматрати **графиком** функције двије промјенљиве.[2]

[2] Видјети Поглавље 4.4: Површи другог реда и Поглавље 4.5: Неке друге површи, предавања из Математике 1, Тема 4

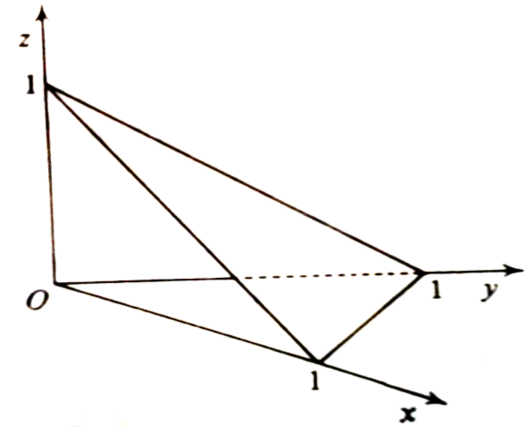
Примјер 2.1.

а) Ако је

$$z = -x - y + 1$$

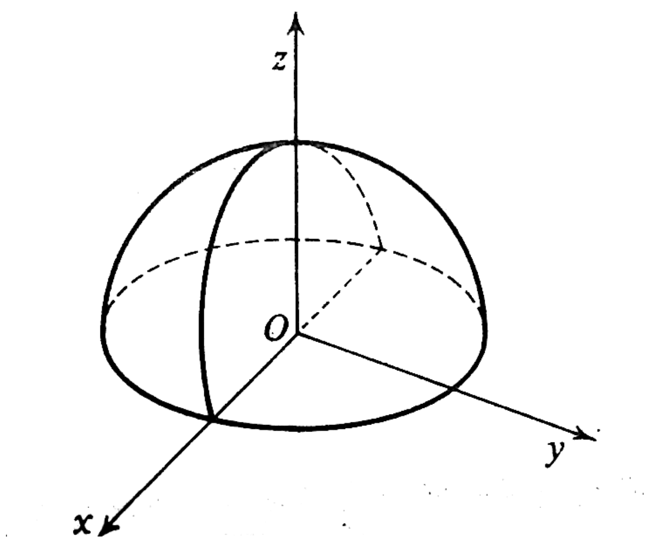
онда је $D = \mathbb{R}^2$.

График ове функције је раван, Слика 2.1.



Слика 2.1

б)



Слика 2.2

За функцију

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

скуп дефинисаности одређујемо из услова

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1.$$

Добијамо

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

тј. јединични круг са центром у координатном почетку.

График ове функције је горња јединична полусфера (Слика 2.2)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0. \square$$

Растојање између двије тачке је дефинисано као дужина дужи која спаја те двије тачке.

Растојање између тачака $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ у $\mathbb{R}^2$ је

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2},$$

а растојање између тачака $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$ у $\mathbb{R}^3$ је

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

Ако су $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ тачке из $\mathbb{R}^n$, тада је

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}.$$

Сада уводимо појмове кугле, околине тачке, те отворених и затворених скупова.

Дефиниција 2.2. Кугла са центром у тачки $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и полупречника $r > 0$ је скуп

$$K_r(a) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : d(a, x) < r\}.$$

Овако дефинисана кугла се назива и **отвореном куглом**.

Примјер 2.2. Кугла у $\mathbb{R}^2$ са центром у тачки $a = (a_1, a_2)$ и полупречника $r > 0$ је скуп тачака (x_1, x_2) за које важи неједнакост

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2$$

тј. кугла је унутрашњост круга са центром у тачки a и полупречника r.

Кугла у $\mathbb{R}^3$ са центром у тачки $a = (a_1, a_2, a_3)$ и полупречника $r > 0$ је скуп тачака (x_1, x_2, x_3) за које важи неједнакост

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 < r^2$$

тј. унутрашњост кугле са центром у тачки a и полупречника r, одакле је и преузет термин „кугла“. □

Скуп тачака

$$\{x \in \mathbb{R}^n : d(a, x) \leq r\}$$

се назива **затвореном куглом.**

Дефиниција 2.3. Отворена кугла са центром у тачки a полупречника $\epsilon > 0$ назива се $\boldsymbol{\epsilon}$ **−околина** тачке a. **Околина тачке** a је свака отворена кугла која садржи тачку a.

Дефиниција 2.4. Кажемо да је $D \subset \mathbb{R}^n$ **отворен скуп** ако заједно са сваком својом тачком садржи и неку њену околину. Кажемо да је скуп **затворен** ако је његов комплемент отворен скуп.

За скуп дефинисаности функције $z = f(x, y)$, обично користимо термин **област дефинисаности** [3] те функције.

[3] Појам области у математици се прецизно дефинише: **област** је отворен или затворен скуп чије се сваке двије тачке могу повезати изломљеном линијом која сва лежи у тој области.

2.2. ГРАНИЧНА ВРИЈЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЈЕНЉИВИХ

Као и код функција једне промјенљиве, граничну вриједности функције више промјенљивих дефинишемо у тачки нагомилавања области дефинисаности функције.

Кажемо да је тачка $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ **тачка нагомилавања** скупа $D \subset \mathbb{R}^n$ ако се у свакој њеној околини налази бар једна тачка из D која је различита од a.

Дефиниција 2.5. Нека је D област дефинисаности функције f и нека је $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ тачка нагомилавања скупа D. Кажемо да је реалан број L **гранична вриједност** функције f у тачки a и пишемо

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

ако за свако $\epsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да за све $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ вриједи

$$0 < d(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Ако је функција f из $\mathbb{R}^2$, умјесто $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$ пишемо $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = L$.

Одређивање граничне вриједности функција више промјенљивих је сложеније у односу на граничне вриједности функције једне промјенљиве због природе околина тачака у $\mathbb{R}^n$. Код функција једне промјенљиве $\epsilon -$ околине су интервали, тако да се тачки нагомилавања може тежити само на два начина - слијева или здесна. То није случај са функцијама више промјенљивих, јер су у $\mathbb{R}^2$ ϵ – околине кругови, а у $\mathbb{R}^3$ кугле.

Ради лакшег разумијевања посебно ћемо размотрити случај $n = 2$.

Из дефиниције 2.5 добијамо да је реалан број L гранична вриједност функције $f(x, y)$ у тачки (x_0, y_0) ако за сваку $\epsilon -$околину тачке L (у $\mathbb{R}$) постоји одговарајућа $\delta -$околина тачке (x_0, y_0) (у $\mathbb{R}^2$) тако да за све тачке (x, y) из те δ – околине (изузев евентуално саме тачке(x, y)) вриједности функције $f(x, y)$ се налазе у $\epsilon -$ околини тачке L.

Видјели смо да је потребан и довољан услов за постојање граничне вриједности функције једне промјенљиве постојање лијеве и десне граничне вриједности које су једнаке.

Таква аналогија не постоји за функције двије промјенљиве јер су околине тачке (x_0, y_0) кругови, па тачка (x, y) може да тежи тачки (x_0, y_0) дуж било које криве која спаја те двије тачке, што је суштинска разлика у односу на функције једне промјенљиве.

Међутим, уколико постоји гранична вриједност функције $f(x, y)$ у тачки (x_0, y_0), онда постоје и граничне вриједности дуж било које криве која спаја тачку (x_0, y_0) са тачком из њене околине. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 2.1. Нека је

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = L$$

и нека је

$$C: x = x(t), y = y(t)$$

произвољна крива дефинисана у некој околини тачке (x_0, y_0) таква да је

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0, \lim_{t\to t_0} y(t) = y_0.$$

Тада функција $f(x,y)$ има граничну вриједност по кривој C када $t \to t_0$ и вриједи

$$\lim_{t\to t_0} f\big(x(t), y(t)\big) = L.$$

Доказ: Пошто је $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = L,$ за свако $\epsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да

$$(\forall(x,y) \in D)\; 0 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq \delta^2 \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon. \tag{2.1}$$

Јасно је да ће импликација (2.1) вриједити и за све тачке унутар квадрата уписаног у круг $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq \delta^2$. Дакле постоји $\delta_1 > 0$ тако да вриједи

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \wedge 0 < |y - y_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon. \tag{2.2}$$

Из $\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0$ и $\lim_{t\to t_0} y(t) = y_0$, добијамо да за δ_1 из (2.2) постоји $\delta_2 > 0$ тако да вриједи

$$0 < |t - t_0| < \delta_2 \Rightarrow 0 < |x(t) - x_0| < \delta_1 \wedge 0 < |y(t) - y_0| < \delta_1. \tag{2.3}$$

Сада из (2.2) и (2.3) добијамо да за свако $\epsilon > 0$ постоји $\delta_2 > 0$ тако да за све $(x, y) \in D$ вриједи

$$0 < |t - t_0| < \delta_2 \Rightarrow \left|f\big(x(t), y(t)\big) - L\right| < \epsilon,$$

тј.

$$\lim_{t\to t_0} f\big(x(t), y(t)\big) = L. \square$$

Примјер 2.3. Израчунати граничне вриједности

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2 + y^2 + 3)$, б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

Рјешење: а) За $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3$ имамо $|f(x, y) - 3| = x^2 + y^2 < \epsilon$

па можемо узети $\delta = \sqrt{\epsilon}$. Дакле, за свако $\epsilon > 0$ и за све $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ вриједи

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{\epsilon} \Rightarrow |f(x, y) - 3| < \epsilon$$

па је

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2 + y^2 + 3) = 3.$$

б) Испитајмо понашање функције $f(x,y)$ претпостављајући да тачка (x,y) тежи нули дуж праве $y = kx$. Имамо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Дакле, $f(x,kx) \to \frac{k}{1+k^2}$ $(x \to 0)$ што значи да ова гранична вриједност зависи од k. Одавде, на основу Теореме 2.1 добијамо да не постоји $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

в) Као и примједру под б) испитујемо понашање функције претпостављајући да тачка (x,y) тежи нули дуж праве $y = kx$. Имамо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{(x^2+k^2)x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2+k^2} = 0.$$

Одавде закључујемо да постоји гранична вриједност дуж сваке праве $y = kx$. То међутим не значи да је гранична вриједност функције $f(x,y)$ једнака нули. Ако нпр. узмемо да тачка (x,y) тежи нули дуж параболе $y = x^2$ добијамо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2},$$

што на основу Теореме 2.1 значи да гранична вриједност не постоји. □

Ако нека од промјенљивих тежи ка $\pm\infty$, одговарајућа гранична вриједност се дефинише аналогно случају једне промјенљиве. Нпр.

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to+\infty}} f(x,y) = L$$

ако вриједи

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\exists K > 0)(0 < |x-a| < \delta \wedge y > K) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Примјер 2.4. Показати да је

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to\infty}} \frac{2xy-5}{y+2} = 4.$$

Рјешење: Имамо

$$|f(x,y)-4| = \left|\frac{2y(x-2)-13}{y+2}\right| \le 2\left|\frac{y}{y+2}\right||x-2| + \left|\frac{13}{y+2}\right| \le 2|x-2| + \frac{13}{|y+2|}.$$

За $\epsilon > 0$ узмимо да је

$$|x-2| < \frac{\epsilon}{4} \text{ и } |y+2| > \frac{13\cdot 2}{\epsilon}.$$

Тада је

$$|f(x,y)-4| \le 2\cdot\frac{\epsilon}{4} + 13\cdot\frac{\epsilon}{13\cdot 2} = \epsilon$$

чиме је једнакост доказана. □

Ако је функција $z = f(x,y)$ дефинисана у околини тачке (x_0, y_0), могу се посматрати и граничне вриједности

$$L_{12} = \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y) \text{ и } L_{21} = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

које се називају **поновљени лимеси**.

Лако се може показати да уколико функција $f(x,y)$ у тачки (x_0, y_0) има граничну вриједност L и уколико постоје лимеси

$$L_1 = \lim_{x\to x_0} f(x,y) \text{ и } L_2 = \lim_{y\to y_0} f(x,y),$$

да тада постоје оба поновљена лимеса L_{12} и L_{21} и да је $L_{12} = L_{21} = L$. Дакле, постојање поновљених лимеса не слиједи из самог постојања граничне вриједности функције $f(x,y)$ у тачки (x_0, y_0).[4]

---

[4] За функцију $f(x,y) = (x+y)sin\frac{1}{x}sin\frac{1}{y}$ вриједи

$$\left|(x+y)sin\frac{1}{x}sin\frac{1}{y}\right| \leq |x| + |y|$$

па је

$$L = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0.$$

Међутим, за ову функцију не постоје лимеси L_1 и L_2, па ни поновљени лимеси L_{12} и L_{21}. Покажимо да не постоји лимес $L_1 = \lim_{x\to 0} f(x,y)$.

Посматрамо функцију $g(x) = f(x,y)$, гдје је y фиксирано. Ако узмемо $y = 2/\pi$, добијамо $g(x) = \left(x + \frac{2}{\pi}\right)sin\frac{1}{x}$. Гранична вриједност $\lim_{x\to 0} g(x)$ не постоји јер ако изаберемо низове $x_n^{(1)} = \frac{1}{n\pi}$ и $x_n^{(2)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ добијамо

$$g\left(x_n^{(1)}\right) = \left(\frac{1}{n\pi} + \frac{2}{\pi}\right) sinn\pi = 0 \text{ и } g\left(x_n^{(2)}\right) = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} + \frac{2}{\pi}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \to \frac{2}{\pi}\ (n\to\infty).$$

2.3. НЕПРЕКИДНОСТ ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЈЕНЉИВИХ

Дефиниција 2.6. Кажемо да је функција f **непрекидна** у тачки $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ако је

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Нека су Δx_1,..., Δx_n прираштаји промјенљивих x_1,..., x_n, респективно. Са

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{2.4}$$

означавамо **потпуни прираштај** функције f у тачки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Из дефиниције 2.6 добијамо да је функција f непрекидна у тачки $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ако је

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

гдје је $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$.

Примјер 2.5. Функција

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \qquad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

на основу Примјера 2.3 б) има прекид у тачки (0,0).

Уочимо да је ова функција непрекидна у тачки (0,0) по свакој промјенљивој посебно, јер су функције

$$g(x)=f(x,0)=0 \text{ и } h(y)=f(0,y)=0$$

непрекидне у $\mathbb{R}$. □

Особине непрекидних функција више промјенљивих лако се доказују коришћењем особина граничних вриједности функција више промјенљивих.

Показује се да је збир, разлика, производ, количник и композиција непрекидних функција такође непрекидна функција.

Доказаћемо да је композиција непрекидних функција такође непрекидна функција за случај функције двије примјенљиве.

Теорема 2.2. Ако је функција $f(x,y)$ непрекидна у тачки (x,y) и ако су функције

$$x = x(u,v), y = y(u,v)$$

непрекидне функције у тачки (u,v), тада је сложена функција

$$F(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$$

непрекидна у тачки (u,v).

Доказ: Треба доказати да потпуни прираштај функције F тежи нули за $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$. Имамо

$$\Delta F = F(u+\Delta u, v+\Delta v) - F(u,v) =$$

$$f\big(x(u+\Delta u, v+\Delta v), y(u+\Delta u, v+\Delta v)\big) - f\big(x(u,v), y(u,v)\big).$$

Пошто су $x = x(u,v), y = y(u,v)$ непрекидне у (u,v), то значи да за $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$

$$\Delta x = x(u+\Delta u, v+\Delta v) - x(u,v) \to 0 \text{ и}$$

$$\Delta y = y(u+\Delta u, v+\Delta v) - y(u,v) \to 0.$$

Одавде добијамо

$$\Delta F \to f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \text{ за } \Delta u \to 0, \Delta v \to 0.$$

Међутим, када $\Delta u \to 0$ и $\Delta v \to 0$ тада и $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, а пошто је функција f непрекидна у (x,y), добијамо

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \to 0.$$

Дакле, $\Delta F \to 0$ када $\Delta u \to 0,\ \Delta v \to 0$ и теорема је доказана. □

Напомена 2.1. Претходна теорема вриједи и ако се претпостави да су функције x и y функције једне промјенљиве.

Кажемо да је скуп тачака D у равни **ограничен** ако постоји правоугаоник унутар којег се налазе све тачке датог скупа.

Видјели смо да за функцију једне промјенљиве која је непрекидна на сегменту $[a, b]$ постоје тачке x_0 и y_0 такве да за све $x \in [a, b]$ вриједи $f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0)$. [5]

Аналогна тврдња вриједи и за непрекидне функције двије промјенљивих на ограниченом и затвореном скупу.

Теорема 2.3. Нека је функција $f(x, y)$ дефинисана и непрекидна на ограниченом и затвореном скупу D. Тада је функција ограничена на D, тј. постоје константе m и M такве да за све $(x, y) \in D$ вриједи

$$m \leq f(x, y) \leq M.$$

[5] Видјети Вајерштрасову теорему, Математика 1, Поглавље Непрекидне функције, стр. 41

2.4. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАЧУН ФУНКЦИЈА ВИШЕ ПРОМЈЕНЉИВИХ

2.4.1. Парцијални изводи

Нека је $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функција n промјенљивих. За дефинисање извода по промјенљивим $x_i, i = 1,2, \ldots n$, посматрамо тзв. **парцијалне прираштаје** по свакој од промјенљивих који представљају прираштај функције f када се она посматра као функција једне промјенљиве.

Парцијални прираштај функције $f(x_1, \ldots, x_n)$ по промјенљивој $x_i, i = 1,2, \ldots n$ дефинишемо са

$$\Delta f(x_i) = f(x_1, x_2, \ldots x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots, x_n)$$

гдје је Δx_i прираштај промјенљиве $x_i, i = 1,2, \ldots n$.

Дефиниција 2.7. Парцијални извод функције f по промјенљивој $x_i, i = 1, \ldots n$, дефинишемо са

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots, x_n)}{\Delta x_i}$$

ако ова гранична вриједност постоји.

Користимо и ознаку

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad i = 1,2, \ldots n.$$

За функцију двије промјенљиве $z = f(x, y)$, из дефинције 2.7 добијамо

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Примјер 2.6. Наћи парцијалне изводе функција

а) $z = f(x, y) = 2xy^3 + 2x - 5y + 3,$

б) $z = f(x, y) = arctg\,\frac{x}{y}.$

Рјешење:

а) $z'_x = 2y^3 + 2, \quad z'_y = 6xy^2 - 5.$

б) $z'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad z'_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}\ .\square$

Примјер 2.7. За функцију

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \qquad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

смо у Примјеру 2.5 показали да има прекид у тачки $(0,0)$. Међутим, она у тачки $(0,0)$ има парцијалне изводе јер је

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\cdot 0}{\Delta x^2}-0}{\Delta x}=0$$

и аналогно

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.\ \square$$

Из претходног примјера закључујемо да само постојање парцијалних извода у тачки не гарантује непрекидност функције у тој тачки. Дакле, није довољно посматрати понашање функције у самој тачки већ и у некој њеној околини.

Да бисмо дефинисали појам диференцијабилности функције више промјенљивих, присјетимо се да смо за функцију једне промјенљиве рекли да је диференцијабилна у тачки x_0 ако она има коначан извод у тој тачки. У том случају смо имали

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = \beta(\Delta x),$$

гдје је

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

прираштај функције у тачки x_0 и $\beta(x) \to 0$ кад $\Delta x \to 0$. Дакле,

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \beta(\Delta x)\Delta x, \quad \beta(\Delta x) \to 0 \ \ (\Delta x \to 0),$$ [6]

тј. прираштај се састоји из главног дијела који је линеарна функција од Δx и функције која тежи нули када $\Delta x \to 0$. Преносећи ово представљање диференцијала на функције више промјенљивих долазимо до сљедеће дефиниције.

[6] Видјети Математика 1, Поглавље 6.2

Дефиниција 2.8. Кажемо да је функција $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **диференцијабилна** у тачки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ако се њен потпуни прираштај може написати у облику

$$\Delta f = L_1 \Delta x_1 + L_2 \Delta x_2 + \cdots + L_n \Delta x_n + \beta(\Delta x)|\Delta x| \tag{2.5}$$

гдје $\beta(\Delta x) \to 0$ за $|\Delta x| = \sqrt{{\Delta x_1}^2 + {\Delta x_2}^2 + \cdots + {\Delta x_n}^2} \to 0$, $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$.

Линеарну функцију $L_1 \Delta x_1 + L_2 \Delta x_2 + \cdots + L_n \Delta x_n$ зовемо **диференцијалом функције** f у тачки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и означавамо са

$$df = df(x_1, x_2, \dots, x_n) = L_1 \Delta x_1 + L_2 \Delta x_2 + \cdots + L_n \Delta x_n.$$

Диференцијабилна функција има сљедеће особине.

Теорема 2.4. Нека је функција f диференцијабилна у тачки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тада вриједи:

1) Функција је непрекидна у тачки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

2) Постоје парцијални изводи $\frac{\partial f}{\partial x_k}, k = 1,2, \dots n$ и диференцијал df има облик

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n \tag{2.6}$$

Доказ: 1) Непосредно из дефиниције диференцијабилности слиједи да је

$$\lim_{\Delta \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta \to 0}(L_1 \Delta x_1 + L_2 \Delta x_2 + \cdots + L_n \Delta x_n + \beta(\Delta x)|\Delta x|) = 0.$$

2) Ако у (2.5) ставимо редом $\Delta x_i = 0, i \neq k$ добијамо

$$\Delta f = f(x_1, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f(x_1, \dots x_k, \dots, x_n) = L_k \Delta x_k + \beta(\Delta x_k)\Delta x_k$$

одакле за $k = 1,2, \dots n$ добијамо

$$L_k = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f(x_1, \dots x_k, \dots, x_n)}{\Delta x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots x_k, \dots, x_n). \square$$

Ако у (2.6) ставимо редом $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_k$, добијамо

$$dx_k = \Delta x_k, k = 1,2, \ldots n,$$

па диференцијал функције пишемо у облику

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n. \tag{2.6$_1$}$$

За функцију двије промјенљиве $z = f(x, y)$ диференцијал има облик

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Сада нас занимају довољни услови за диференцијабилност функције више промјенљивих јер смо видјели да само постојање парцијалних извода није довољно за њену диференцијабилност. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 2.5. Нека функција $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у некој околини тачке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ има непрекидне парцијалне изводе $\frac{\partial f}{\partial x_k}, k = 1,2, \ldots n$. Тада је функција f диференцијабилна у тачки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Доказ: Доказујемо теорему за $n = 2$. Потпуни прираштај функције $z = f(x, y)$ у тачки (x, y) представљамо у облику

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) =$$

$$[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Прираштај $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)$ је прираштај функције једне промјенљиве (по x, $y + \Delta y$ је фиксирано) па примјењујући Лагранжову теорему добијамо

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y)\Delta x, \qquad \theta_1 \in (0,1).$$

На исти начин добијамо да је

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta_2 \Delta y)\Delta y, \qquad \theta_2 \in (0,1).$$

Из непрекидности парцијалних извода $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ у тачки (x, y) добијамо

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \text{ и}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta_2 \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Дакле, можемо писати

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \beta_1(\Delta x, \Delta y) \text{ и}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta_2 \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \beta_2(\Delta x, \Delta y),$$

при чему $\beta_1(\Delta x, \Delta y) \to 0, \beta_2(\Delta x, \Delta y) \to 0$ за $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$. Према томе имамо

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y + \beta(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

при чему

$$\beta(\Delta x, \Delta y) = \frac{\beta_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0$$

за $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$. Теорема је доказана. □

Примјер 2.8. Показати да функција

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \qquad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

има парцијалне изводе у тачки $(0,0)$, али да у тој тачки није диференцијабилна.

Рјешење: Ставимо ради једноставности $\Delta x = h, \Delta y = g$. Тада је

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = 1,$$

и аналогно је

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1.$$

Ако би функција била диференцијабилана у тачки $(0,0)$, онда бисмо њен прираштај могли писати у облику

$$\Delta f(0,0) = f(h,g) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} g + \beta(h,g)\sqrt{h^2+g^2}$$

при чему $\beta(h,g) \to 0$ за $\sqrt{h^2+g^2} \to 0$.

Дакле

$$\frac{h^3+g^3}{h^2+g^2} = h + g + \beta(h,g)\sqrt{h^2+g^2}$$

тј.

$$\beta(h,g) = \frac{1}{\sqrt{h^2+g^2}}\left(\frac{h^3+g^3}{h^2+g^2} - h - g\right).$$

Провјеримо да ли је $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ g\to 0}} \beta(h,g) = 0$. Ако ставимо $g = kh$ добијамо

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ g=kh}} \beta(h,g) = \lim_{\substack{h\to 0\\ g=kh}} \frac{1}{\sqrt{(1+k^2)h^2}}\left(\frac{(1+k^3)h^3}{(1+k^2)h^2} - (k+1)h\right) = -\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{(1+k^2)h^2}}\frac{(k+k^2)h}{(1+k^2)}$$

Ова гранична вриједност не постоји па функција није диференцијабилна у тачки (0,0).□

Услов непрекидности парцијалних извода јесте довољан, али није и потребан за диференцијабилност функције, што нам илуструје сљедећи примјер.

Примјер 2.9. Показати да парцијални изводи функције

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\neq(0,0)\\ \quad 0, \qquad (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

имају прекид у тачки $(0,0)$, али да је функција у тој тачки диференцијабила.

Рјешење: Имамо

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xsin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\neq(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2ysin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\neq(0,0).$$

У тачки $(0,0)$ имамо

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(h,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2sin\frac{1}{\sqrt{h^2}}}{h}=\lim_{h\to 0}hsin\frac{1}{\sqrt{h^2}}=0$$

и аналогно $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$ Покажимо да функција $\frac{\partial f}{\partial x}$ има прекид у тачки $(0,0)$. Имамо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(2xsin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=-\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ако у последњој граничној вриједности узмемо нпр. $y = 0$ добијамо

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x}{\sqrt{x^2}} cos \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to 0+} cos \frac{1}{x}$$

а овај лимес не постоји. [7]

Дакле, функција $\frac{\partial f}{\partial x}$ има прекид у тачки $(0,0)$. На исти начин се показује да функција $\frac{\partial f}{\partial y}$ има прекид у тачки $(0,0)$.

Покажимо сада да је функција ипак диференцијабилна у тачки $(0,0)$, тј. да се потпуни прираштај функције у тачки $(0,0)$ може представити у облику

$$\Delta f(0,0) = f(h,g) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} g + \beta(h,g)\sqrt{h^2 + g^2}$$

при чему $\beta(h,g) \to 0$ за $\sqrt{h^2 + g^2} \to 0$. Уврштавањем добијамо

$$\beta(h,g) = \sqrt{h^2 + g^2} sin \frac{1}{\sqrt{h^2 + g^2}}.$$

Због

$$\left| \sqrt{h^2 + g^2} sin \frac{1}{\sqrt{h^2 + g^2}} \right| \leq \sqrt{h^2 + g^2}$$

добијамо да је $\beta(h,g) \to 0$ за $\sqrt{h^2 + g^2} \to 0$. Дакле функција је диференцијабилна у $(0,0)$.□

[7] Нека је $x_n^{(1)} = \frac{1}{2n\pi}$ и $x_n^{(2)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$. Тада је $cos \frac{1}{x_n^{(1)}} = cos 2n\pi = 1$ и $cos \frac{1}{x_n^{(2)}} = \cos(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 0$.

2.4.2. Геометријска интерпретација диференцијабилности функције више промјенљивих

Ако је дата функција $z = f(x, y)$ са облашћу дефинисаности D, онда скуп тачака

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

у простору представља површ која се може сматрати **графиком** функције двије промјенљиве.

Пресјек површи S са равнима $x = x_0$ су криве $z = f(x_0, y)$, док пресјек површи S са равнима $y = y_0$ су криве $z = f(x, y_0)$. Те криве се називају **координатним линијама** површи S.

Ако посматрамо тангенту на координатну линију $z = f(x, y_0)$ у тачки (x_0, y_0), из геометријског значења извода функције једне промјенљиве закључујемо да је **коефицијент правца тангенте заправо парцијални извод** по x функције $z = f(x, y)$ у тачки (x_0, y_0).

На исти начин добијамо да је парцијални извод по y функције $z = f(x, y)$ у тачки (x_0, y_0) коефицијент правца тангенте на координатну линију $z = f(x_0, y)$ у тој тачки.

Ове двије тангенте одређују једну раван која се назива **тангентна раван површи** S у тачки $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

За одређивање једначине тангентне равни, на почетку одређујемо једначине тангенти на координатне линије.

Једначина тангенте t_x на координатну линију $z = f(x, y_0)$ у тачки $(x_0, y_0, z_0), z_0 = f(x_0, y_0)$ гласи

$$t_x\colon\ z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0), \qquad y = y_0,$$

док једначина тангенте t_y на координатну линију $z = f(x_0, y)$ гласи

$$t_y\colon\ z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0), \qquad x = x_0.$$

Вектор нормале $\boldsymbol{n}$ тангентне равни одређујемо као векторски производ вектора параваца тангенти t_x и t_y, тј.

$$\boldsymbol{n} = \left(1{,}0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \times \left(0{,}1, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right).$$

Дакле, **једначина тангентне равни** у тачки $(x_0, y_0, z_0), z_0 = f(x_0, y_0)$ гласи

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \tag{2.7}$$

Ако је функција $u = f(x, y, z)$ диференцијабилна у тачки (x_0, y_0, z_0), тада једначина тангентне равни површи $f(x, y, z) = c$ у тачки (x_0, y_0, z_0) гласи

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0. \tag{2.8}$$

Примјер 2.10. За једначину тангентне равни површи $z = x^2 + y^2$ у тачки $M(1, -1)$ имамо

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(M) = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = -2, \qquad z_0 = z(M) = 2.$$

Користећи формулу (2.7) добијамо

$$2(x - 1) - 2(y + 1) - (z - 2) = 0 \Rightarrow 2x - 2y - z - 2 = 0. \square$$

Примјер 2.11. Одредити једначину тангентне равни површи $4x^2 + y^2 + z^2 = 17$ у тачки $M(1,3,2)$.

Рјешење: Користимо формулу (2.8), $F(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2 - 17 = 0$. Имамо

$$8(x - 1) + 6(y - 3) + 4(z - 2) = 0 \Rightarrow 4x + 3y + 2z - 17 = 0. \square$$

2.4.3. Парцијални изводи вишег реда

Парцијални изводи вишег реда се дефинишу индуктивно.

За функцију $z = f(x, y)$ **парцијалне изводе другог реда** дефинишемо са

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = f''_{x^2} = z''_{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = f''_{y^2} = z''_{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = f''_{xy} = z''_{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = f''_{yx} = z''_{yx}.$$

Ако је f функција n промјенљивих, она има n^2 парцијалних извода другог реда,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, i, j = 1,2, \dots n.$$

Парцијални изводи

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, i \neq j$$

називају се **мјешовитим парцијалним изводима.**

Примјер 2.12. Израчунати парцијалне изводе другог реда функције

$$u = f(x, y, z) = (x + y^2)e^{xz}.$$

Рјешење:

$$u'_x = (1 + xz + y^2 z)e^{xz}, \quad u'_y = 2ye^{xz}, \quad u'_z = x(x + y^2)e^{xz},$$

$$u''_{x^2} = (2z + xz^2 + y^2 z^2)e^{xz}, \; u''_{xy} = u''_{yx} = 2yze^{xz},$$

$$u''_{xz} = u''_{zx} = (2x + y^2 + x^2 z + xz + xy^2 z)e^{xz},$$

$$u''_{y^2} = 2e^{xz}, \; u''_{yz} = u''_{zy} = 2xye^{xz}, \; u''_{z^2} = x^2(x + y^2)e^{xz}. \square$$

Матрица

$$H=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{n\times n} \tag{2.9}$$

се назива **Хесеовом матрицом** функције f.

Примјер 2.13. Одредити Хесеову матрицу функције $u=f(x,y,z)=x+y^2z-2e^{xz}$.

Рјешење:

$$u_x'=1-2ze^{xz},\quad u_y'=2yz,\quad u_z'=y^2-2xe^{xz},$$

$$u_{x^2}''=-2z^2e^{xz}, u_{xy}''=0, u_{xz}''=-2xze^{xz},\ u_{yx}''=0, u_{y^2}''=2z, u_{yz}''=2y,$$

$$u_{zx}''=-2xze^{xz}, u_{z^2}''=-2x^2e^{xz}, u_{zy}''=2y.$$

Из (2.9) добијамо

$$H=\begin{bmatrix}-2z^2e^{xz} & 0 & -2xze^{xz}\\ 0 & 2z & 2y\\ -2xze^{xz} & 2y & -2x^2e^{xz}\end{bmatrix}.\ \square$$

Примјер 2.14. Израчунати вриједност израза

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ако је $u=f\left(\frac{y}{x}\right)+xg\left(\frac{y}{x}\right)$.

Рјешење: Имамо

$$u'_x=-f'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2}+g\left(\frac{y}{x}\right)-g'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x},\qquad u'_y=f'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}+g'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x},$$

$$u''_{x^2}=f''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x^4}+2f'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^3}-g'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2}-g''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x^3}+g'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2}=$$

$$f''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x^4}+2f'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^3}-g''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x^3},$$

$$u''_{xy}=-f''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^3}-f'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x^2}+g'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}-g''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2}-g'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}=$$

$$-f''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^3}-f'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x^2}-g''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2},$$

$$u''_{y^2}=f''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x^2}+g''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x^2}.$$

Уврштавањем добијамо

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.\ \square$$

Примјер 2.15. Одредити $f''_{xy}(0,0)$ и $f''_{yx}(0,0)$ гдје је

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Рјешење:

$$f'_x(x,y) = y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right), (x,y) \neq (0,0),$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

па је

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f'_x(0,h)-f'_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h} = -1.$$

Даље је

$$f'_y(x,y) = x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right), (x,y) \neq (0,0),$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$

па је

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f'_y(h,0)-f'_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1. \square$$

Уочимо да су мјешовити парцијални изводи у примјерима 2.12 и 2.13 једнаки, односно да су одговарајуће Хесеове матрице симетричне. У Примјеру 2.15 не вриједи једнакост мјешовитих извода.

Зато разматрамо услове под којима вриједи једнакост мјешовитих парцијалних извода другог реда. Показује се да је **непрекидност** ових извода довољан услов за њихову једнакост.

Теорема 2.6. Ако су парцијални изводи f''_{xy} и f''_{yx} функције $z = f(x, y)$ дефинисани и непрекидни у некој околини тачке $M(x, y)$, тада у тој тачки вриједи

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Доказ: Посматрајмо израз

$$\mathrm{A} = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Нека је

$$g(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Тада је

$$\mathrm{A} = g(x + \Delta x) - g(x).$$

Функција $g(x)$ је непрекидна и диференцијабилна у некој околини тачке $M(x, y)$, па можемо примијенити Лагранжову теорему на функцију g на сегменту $[x, x + \Delta x]$.

Дакле добијамо

$$g(x+\Delta x)-g(x)=g'(x+\theta\Delta x)\Delta x, \theta\in(0,1).$$

Пошто је

$$g'(x+\theta\Delta x)=f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)-f'_x(x+\theta\Delta x, y)$$

примјеном Лагранжове теореме на функцију f'_x на сегменту $[y, y+\Delta y]$ добијамо

$$f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)-f'_x(x+\theta\Delta x, y)=f''_{xy}(x+\theta\Delta x, y+\omega\Delta y)\Delta y, \omega\in(0,1).$$

Дакле, добијамо

$$\mathrm{A}=f''_{xy}(x+\theta\Delta x, y+\omega\Delta y)\Delta y\Delta x, \theta, \omega\in(0,1).$$

Замјењујући улоге промјенљивим x и y добијамо

$$\mathrm{A}=f''_{yx}(x+\theta_1\Delta x, y+\ \omega_1\Delta y)\Delta y\Delta x, \theta_1, \omega_1\in(0,1).$$

Према томе

$$f''_{xy}(x+\theta\Delta x, y+\omega\Delta y)=f''_{yx}(x+\theta_1\Delta x, y+\ \omega_1\Delta y), \theta, \omega, \theta_1, \omega_1\in(0,1).$$

Због непрекидности парцијалних извода f''_{xy} и f''_{yx}, пуштајући да $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$, из последње једнакости добијамо

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y).\,\square$$

$\boldsymbol{n}$ **−ти парцијални извод** функције $z = f(x, y)$, гдје се функција диференцира прво по x p пута и затим по y $(n - p)$ пута означавамо са

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}} = \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^p \partial y^{n-p}}.$$

2.4.4. Тејлорова формула

Присјетимо се да за функцију f једне промјенљиве која има коначне изводе до реда n у некој околини тачке a, у тој околини вриједи Тејлорова формула [8]

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)\ (x \to a)$$

Уколико ставимо $x - a = h$, тада за довољно мало h Тејлорова формула добија облик

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n)\ (h \to 0). \tag{2.10}$$

Доказаћемо Тејлорову формулу за функцију двије промјенљиве $z = f(x,y)$, уз претпоставку да она има непрекидне парцијалне изводе првог и другог реда у некој околини тачке (a,b).

[8] Теорема 6.13. (Тејлорова формула), Математика 1, стр. 76

Теорема 2.7. (Тејлорова формула) Ако функција $z = f(x, y)$ има непрекидне парцијалне изводе првог и другог реда у некој околини тачке (a, b), тада за довољно мале h и k вриједи Тејлорова формула

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \left(f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k\right) +$$

$$\frac{1}{2!}\left(f''_{x^2}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{y^2}(a,b)k^2\right) + o(\rho^2), \rho \to 0 \qquad (2.11)$$

гдје је $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$.

Доказ: Ако функцију f посматрамо као функцију једне промјенљиве, узимајући да је y фиксирано а x промјенљива, примјеном Тејлорове формуле (2.10) за функције једне промјенљиве и за $n = 2$ добијамо

$$f(a+h, b+k) = f(a, b+k) + f'_x(a, b+k)h + \frac{1}{2!}f''_{x^2}(a, b+k)h^2 + o(h^2), h \to 0. \qquad (2.11_1)$$

На исти начин, посматрајући функцију $f(a, b+k)$ као функцију промјенљиве y уз фиксирано x, примјеном формуле (2.10) за $n = 2$, добијамо

$$f(a, b+k) = f(a,b) + f'_y(a,b)k + \frac{1}{2!}f''_{y^2}(a,b)k^2 + o(k^2), k \to 0. \qquad (2.11_2)$$

Аналогно, за функцију $f'_x(a, b+k)$ из (2.10) за $n=1$, добијамо

$$f'_x(a, b+k) = f'_x(a, b) + f''_{xy}(a, b)k + o(k), k \to 0. \tag{2.11_3}$$

Пошто функција има непрекидне парцијалне изводе другог реда у некој околини тачке (a, b), вриједи

$$f''_{x^2}(a, b+k) = f''_{x^2}(a, b) + o(1)\ (k \to 0). \tag{2.11_4}$$

Уврштавајаући (2.11$_2$), (2.11$_3$) и (2.11$_4$) у (2.11$_1$) добијамо

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + f'_y(a, b)k + \frac{1}{2!}f''_{y^2}(a, b)k^2 + f'_x(a, b)h + f''_{xy}(a, b)hk + \frac{1}{2!}f''_{x^2}(a, b)h^2 + o(h^2) + o(k^2) + o(hk), (h \to 0, k \to 0). \tag{2.11_5}$$

Уочимо да је

$$o(h^2) + o(k^2) + o(hk) = o(h^2 + k^2), (h \to 0, k \to 0).$$

Одавде, за $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$, добијамо

$$o(h^2) + o(k^2) + o(hk) = o(\rho^2), \rho \to 0,$$

па се формула (2.11$_5$) своди на формулу (2.11) и теорема је доказана. □

2.5. ЕКСТРЕМИ ФУНКЦИЈА ВИШЕ ПРОМЈЕНЉИВИХ

2.5.1. ЛОКАЛНИ ЕКСТРЕМИ

Дефиниција 2.9. Нека је функција f дефинисана у некој околини тачки $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Ако за свако $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ из те околине вриједи

$$f(x) \leq f(a) \quad \big(f(x) \geq f(a)\big)$$

кажемо да функција f у тачки a има **локални максимум (локални минимум).**

Локалне максимуме и локалне минимуме једним именом зовемо **локалним екстремима.**

Присјетимо се потребног услова за постојање локалног екстрема функције једне промјенљиве.

Показали смо да ако је функција f дефинисана и непрекидна на $[a, b]$, има локални екстрем у тачки $x_0 \in (a, b)$ и у x_0 има извод, тада је $f'(x_0) = 0$.[9]

Аналоган резултат имамо и у случају функција више промјенљивих.

[9] Фермаова теорема 6.5, Поглавље 6.3 Теореме о средњим вриједностима (Математика 1), стр. 59

Теорема 2.8. Нека функција f има у тачки $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ све парцијалне изводе првог реда, и нека у тачки a има локални екстрем. Тада је

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, i = 1,2, \dots n.$$

Специјално, ако је функција f диференцијабилна у тачки a, тада је $df(a) = 0$.

Доказ: Нека у некој околини тачке a вриједи

$$f(x) \leq f(a).$$

Посматрајмо функције g_i дефинисане у некој околини тачака $a_i, i = 1,2, \dots n$ са

$$g_i(x_i) = f(a_1, \dots a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

за x_i из те околине. Функције g_i су функције једне промјенљиве са локалним екстремом у тачки a_i, па је $g_i'(a_i) = 0, i = 1, \dots, n.$ Пошто је $g_i'(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), i = 1, \dots, n$, теорема је доказана. □

Тачке у којима вриједи

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, i = 1,2, \dots n$$

називају се **стационарне тачке**. У наставку разматрамо природу стационарних тачака и довољне услове за постојање локалних екстрема у стационарним тачкама. Да бисмо формулисали такве услове, на почетку наводимо одређене појмове из линеарне алгебре које су нам потребни за такву формулацију.

2.5.1.1. Дефинитне квадратне форме

Реална функција n промјенљивих

$$\Phi(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, h_i h_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, h_i h_j \tag{2.12}$$

зове се **квадратна форма** промјенљивих $h_1, h_2, \dots, h_n$.

Матрица

$$A(\Phi) = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$$

зове се **матрица квадратне форме** Φ. За ту матрицу увијек можемо претпоставити да је симетрична, тј. да је $a_{ij} = a_{ji}$ за све i, j.

Кажемо да је квадратна форма (2.12) **позитивно (негативно) дефинитна** ако за све $h \neq 0$ вриједи

$$\Phi(h_1, h_2, \dots, h_n) > 0 \ (\Phi(h_1, h_2, \dots, h_n) < 0)$$

гдје је $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$.

Квадратна форма (2.12) је **промјенљивог знака** ако постоје $h = (h_1, \dots, h_n)$ и $k = (k_1, \dots, k_n)$ такви да је

$$\Phi(h_1, h_2, \dots, h_n) > 0 \ \text{ и } \Phi(k_1, k_2, \dots, k_n) < 0.$$

Примјер 2.16. За квадратну форму

$$\Phi(h_1, h_2, h_3) = 2{h_1}^2 + 2{h_2}^2 + {h_3}^2 - 2h_1h_2 + 2h_2h_3$$

имамо

$$\Phi(h_1, h_2, h_3) = {h_1}^2 + {h_2}^2 - 2h_1h_2 + {h_2}^2 + {h_3}^2 + 2h_2h_3 + {h_1}^2 =$$

$$(h_1 - h_2)^2 + (h_2 + h_3)^2 + {h_1}^2 \geq 0$$

Пошто је

$$\Phi(h_1, h_2, h_3) = 0 \Leftrightarrow h_1 - h_2 = 0 \wedge h_2 + h_3 \wedge h_1 = 0$$

добијамо да је

$$\Phi(h_1, h_2, h_3) = 0 \Leftrightarrow h_1 = h_2 = h_3 = 0.$$

Према томе за свако $(h_1, h_2, h_3) \neq (0,0,0)$ добијамо

$$\Phi(h_1, h_2, h_3) > 0$$

па је кавадратна форма позитивно дефинитна. □

Примјер 2.17. За квадратну форму

$$\Phi(h_1, h_2) = {h_1}^2 + {h_2}^2 - 2h_1h_2$$

имамо

$$\Phi(h_1, h_2) = (h_1 - h_2)^2 \geq 0.$$

Међутим,

$$\Phi(h_1, h_2) = 0 \Leftrightarrow h_1 = h_2$$

па квадратна форма може да има вриједност нула и за неке $(h_1, h_2) \neq (0,0)$. Дакле, квадратна форма није позитивно дефинитна. □

За испитивање дефинитности квадратне форме користимо **Силвестеров [10] критеријум**.

[10] J. J. Sylvester (1814-1897), енглески математичар

Теорема 2.9. Нека је

$$A(\Phi) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

симетрична матрица квадратне форме (2.12) и нека су

$$A_1 = a_{11},\ A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots,\ A_n = \det A(\Phi)$$

њени главни минори.

1) Да би квадратна форма (2.12) била позитивно дефинитна, потребно је и довољно да су сви главни минори позитивни, тј. да вриједи

$$A_1 > 0, A_2 > 0, \dots,\ A_n > 0.$$

2) Да би квадратна форма (2.12) била негативно дефинитна потребно је и довољно да главни минори наизмјенично мијењају знак, с тим да је $A_1 < 0$, тј. да вриједи:

$$A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \dots. \ \square$$

Примјер 2.18. Квадратна форма из примјера 2.16 има матрицу

$$A(\Phi) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пошто је

$$A_1 = 2 > 0,\ A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,\ A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

квадратна форма је позитивнио дефинитна.

Квадратна форма из Примјера 2.17 има матрицу

$$A(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пошто је $A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, квадратна форма није ни позитивно ни негативно дефинитна. □

2.5.1.2. Довољни услови локалног екстрема

Сада формулишемо теорему која даје довољне услове за постојање локалног екстрема у стационарној тачки функције у зависности од знака квадратне форме чију матрицу чине њени парцијални изводи другог реда.

Теорема 2.10. Нека је $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ стационарна тачка функције f која има непрекидне парцијалне изводе другог реда у некој околини тачке a. Нека је Φ квадратна форма чија је матрица

$$A(\Phi) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right]_{n\times n}. \tag{2.13}$$

Тада:

1) ако је квадратна форма Φ позитивно дефинитна, функција f има локални минимум у a,

2) ако је квадратна форма Φ негативно дефинитна, функција f има локални максимум у a,

3) ако је квадратна форма Φ промјенљивог знака, функција f нема локални екстрем у a.

Пошто се у примјерима најчешће појављују функције двије промјенљиве, формулисаћемо и доказати теорему о довољним условима за постојање локалног екстрема у стационарној тачки за овај случај.

Теорема 2.11. Нека функција f има непрекидне парцијалне изводе другог реда у некој околини тачке (a,b) и нека је

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0.$$

Нека је

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b), \qquad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b), \qquad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b).$$

Тада:

1) ако је $A>0 \wedge AC-B^2>0$, функција f има локални минимум у тачки (a,b),

2) ако је $A<0 \wedge AC-B^2>0$, функција f има локални максимум у тачки (a,b),

3) ако је $AC-B^2<0$, функција f нема локални екстрем у тачки (a,b),

4) ако је $AC-B^2=0$, тачка (a,b) може али не мора да буде тачка екстрема.

Доказ: Из Тејлорове формуле (2.11) добијамо

$$\Delta z = f(a+h,b+k) - f(a,b) = \left(f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k\right) +$$
$$\frac{1}{2!}\left(f''_{x^2}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{y^2}(a,b)k^2\right) + o(\rho^2), \rho \to 0$$

тј.

$$\Delta z = \frac{1}{2!}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + o(\rho^2), \rho \to 0.$$

Одавде за $A \neq 0$ добијамо

$$\Delta z = \frac{1}{2A}(A^2h^2 + 2ABhk + ACk^2 + B^2k^2 - B^2k^2) + o(\rho^2), \rho \to 0$$

тј.

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2A}((Ah+Bk)^2 + (AC-B^2)k^2) + o(\rho^2), \rho \to 0 \tag{2.14}$$

Увијек можемо изабрати довољно мало ρ тако да сабирак $o(\rho^2)$ не утиче на знак прираштаја функције f.

Према томе, ако је $A > 0$ и $AC - B^2 > 0$, тада из (2.14) добијамо $f(a+h,b+k) - f(a,b) > 0$, тј.

$$f(a+h,b+k) > f(a,b)$$

па је (a,b) тачка локалног минимума.

Уколико је $A < 0$ и $AC - B^2 > 0$ тада је $f(a+h, b+k) - f(a,b) < 0$, тј.

$$f(a+h, b+k) < f(a,b)$$

па је (a,b) тачка локалног максимума.

Ако је $AC - B^2 < 0$ може се показати да тада прираштај функције у тачки (a,b) може да буде и позитиван и негативан па функције нема екстрем у тачки (a,b). □

Примјер 2.19. Одредити локалне екстреме функције

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Рјешење:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12 = 0.$$

Рјешење овог система су тачке:

$$P_1(1,2),\ P_2(2,1),\ P_3(-1,-2) \text{ и } P_1(-2,-1).$$

Даље је

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 6y.$$

У тачки $P_1(1,2)$ је $A = 6, B = 12, C = 6.$ Дакле,

$$AC - B^2 = -108 < 0$$

па функција нема екстрем у тачки P_1.

У тачки $P_2(2,1)$ је $A = 12, B = 6, C = 12.$ Дакле,

$$A = 12 > 0, \qquad AC - B^2 = 108 > 0$$

па функција има минимум у тачки P_2, $f_{min} = f(2,1) = -28.$

У тачки $P_3(-1,-2)$ је $A = -6, B = -12, C = -6.$ Дакле,

$$AC - B^2 = -108 < 0$$

па функција нема екстрем у тачки P_3.

У тачки $P_4(-2,-1)$ је $A = -12, B = -6, C = -12.$ Дакле,

$$A = -12 < 0, \qquad AC - B^2 = 108 > 0$$

па функција има максимум у тачки P_4, $f_{max} = f(-2,-1) = 28.$ □

Примјер 2.20. Одредити локалне екстреме функције

$$u(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

Рјешење:

$$u'_x = 3x^2 + 12y = 0$$

$$u'_y = 2y + 12x = 0$$

$$u'_z = 2z + 2 = 0.$$

Рјешавањем овог система добијамо двије стационарне тачке:

$$P_1(24,-144,-1) \text{ и } P_2(0,0,-1).$$

Даље је

$$u''_{x^2} = 6x, \qquad u''_{y^2} = 2, \qquad u''_{z^2} = 2, \; u''_{xy} = 12, \qquad u''_{xz} = u''_{yz} = 0.$$

У тачки P_1 је

$$a_{11} = u''_{x^2}(24,-144,-1) = 144, a_{12} = 12, a_{13} = 0, a_{22} = 2, a_{23} = 0, a_{33} = 2$$

па је

$$A_1 = 144 > 0,\; A_2 = \begin{vmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 144 > 0,\; A_3 = \begin{vmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 288 > 0$$

и квадратна форма је позитивно дефинитна. Према томе, функција у тачки P_1 има локални минимум, $u_{min} = u(24,-144,-1)$.

У тачки P_2 је

$$A_1 = u''_{x^2}(0,0,-1) = 0$$

па квадратна форма није ни позитивно ни негативно дефинитна (Силвестеров критеријум). Квадратна форма у тачки P_2 је облика

$$\Phi(h_1, h_2, h_3) = \Phi(dx, dy, dz) = d^2u = 2dy^2 + 2dz^2 + 24dxdy.$$

Покажимо да је ова квадратна форма промјенљивог знака.

Ако узмемо $dx = dy > 0, dz = 0$ тада је

$$d^2u = 26dy^2 > 0.$$

Ако узмемо $dx = -dy > 0, dz = 0$ тада је

$$\Phi(dx, dy, dz) = -22dy^2 < 0.$$

Дакле, квадратна форма је промјенљивог знака, па функција нема екстрем у тачки P_2.□

2.5.2. УСЛОВНИ ЕКСТРЕМИ

Поред одређивања локалних екстрема, код функција више промјенљивих често се сусрећемо са ситуацијом у којој се аргументи функције не могу слободно мијењати у области дефинисаности функције, већ су везане неким додатним релацијама.

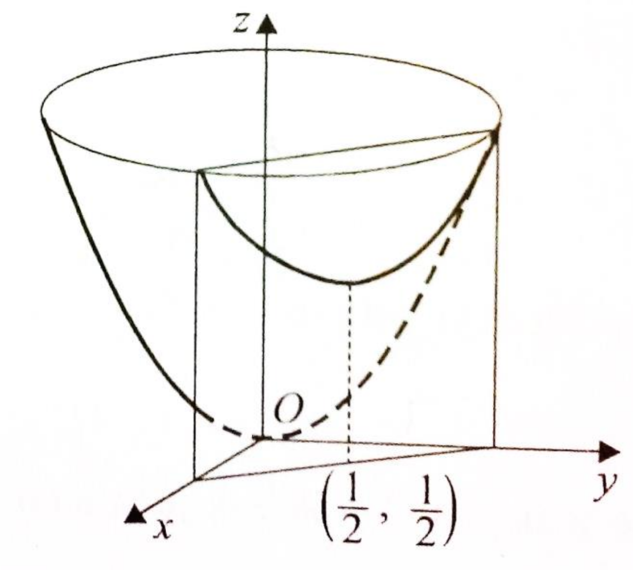
Примјер 2.21. Нека је дата функција $f(x,y) = x^2 + y^2$. Одредити најмању вриједност функције под условом да су промјенљиве x и yвезане релацијом $x + y = 1$.

Рјешење: Из једначине везе добијамо $y = 1 - x$, па уврштавањем у функцију $f(x,y)$ добијамо функцију једне промјенљиве

$$g(x) = f(x, 1-x) = 2x^2 - 2x + 1.$$

Функција g има минимум у тачки $x = \frac{1}{2}$, односно функција f има минимум у тачки $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

$$f_{min} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$



Слика 2.3

Уочимо да сама функција f у околини тачке P има мањих вриједности од $\frac{1}{2}$, али у тачки P функција има минимум под условом да је $x + y = 1$.

У овом примјеру смо одређивали најмању вриједност функције у тачкама које се налазе у равни $x + y = 1$, односно тачку минимума на кривој која се добија као пресјек параболоида $z = x^2 + y^2$ и равни $x + y = 1$, Слика 2.3. □

Нека је дата функција $f = f(x_1, \dots, x_n)$ и нека су дате функције $\varphi_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n), i = 1,2, \dots, s$, гдје је s фиксиран природан број мањи од n. Означимо са B скуп

$$B = \{x : \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = 1,2, \dots, s\}.$$

Дефиниција 2.10. Кажемо да функција $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у тачки $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in B$ има **локални максимум при условима** $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = 1,2, \dots, s,$ ако постоји околина тачке a тако да за све $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ из пресјека те околине и скупа B вриједи

$$f(x) \leq f(a).$$

Аналогно се дефинише **локални минимум при условима** $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = 1,2, \dots, s$.

Приликом одређивања локалних екстрема претпостављаћемо да матрица

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

има ранг s.[11]

[11] Уколико би ранг био мањи од s, то би значило да би се бар једна од функција φ_i могла изразити преко осталих, па би одговарајући услов $\varphi_i = 0$ био „сувишан“.

Условне екстреме можемо одређивати тако да из система

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = 1,2, \dots, s,$$

изразимо s промјенљивих помоћу преосталих $n - s$ промјенљивих. Нпр. ако су то промјенљиве $(x_1, x_2, \dots, x_s)$ имали бисмо:

$$x_1 = \psi_1(x_{s+1}, \dots, x_n)$$

$$x_2 = \psi_2(x_{s+1}, \dots, x_n)$$

......

$$x_s = \psi_s(x_{s+1}, \dots, x_n).$$

Замјеном ових промјенљивих у функцији $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ добија се

$$f = f(\psi_1(x_{s+1}, \dots, x_n), \dots, \psi_s(x_{s+1}, \dots, x_n), x_{s+1}, \dots, x_n) = g(x_{s+1}, \dots, x_n),$$

па се проблем одређивања условног екстрема своди на одређивање локалног екстрема функције $n - s$ промјенљивих.

Описани метод одређивања условних екстрема има два значајна недостатка. Прво, без обзира на могућност рјешавања система $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = 1,2, \dots, s$, та рјешења се најчешће не могу добити експлицитно. Друго, оваквим поступком се у одређеном смислу нарушава равноправност промјенљивих што може да доведе до компликовања даљих извођења.

Оба ова недостатка се отклањају примјеном тзв. **Лагранжовог метода мултипликатора.**

Наводимо без доказа теорему за одређивање условних екстрема **Лагранжовом методом**.

Теорема 2.12. Нека функције $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1,2, \dots, s,\ s < n$ имају непрекидне парцијалне изводе првог реда у некој околини тачке $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и нека матрица (2.15) има ранг једнак s. Ако функција f има у тачки a локални екстрем при условима

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = 1,2, \dots, s,$$

онда постоје реални бројеви $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ такви да је a стационарна тачка **Лагранжове функције**

$$F = f + \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_s\varphi_s.$$

Дакле, приликом практичног одређивања потенцијалних тачака условног екстрема, треба наћи стационарне тачке Лагранжове функције F, тј. рјешење система од $n + s$ једначина са непознатим $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_s$.

Имамо систем

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \cdots + \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j} = 0, j = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = \varphi_i = 0, i = 1, \dots, s.$$

За испитивање да ли су рјешења овог система заиста тачке траженог екстрема, испитујемо знак квадратне форме промјенљивих $h_{s+1}, \dots, h_n$

$$\Phi(h_{s+1}, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(a)\, h_i h_j,$$

при чему су $h_1, \dots, h_s$ одређени системом једначина

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(a) h_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}(a) h_n = 0, i = 1, \dots, s.$$

Ако је форма Φ позитивно (негативно) дефинитна, тада је a тачка локалног минимума (максимума) функције f при условима $\varphi_i = 0, i = 1, \dots, s$.

Примјер 2.22. Помоћу Лагранжове функције одредити најмању вриједност функције

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

под условом да су промјенљиве x и y везане релацијом $x + y = 1$ (Примјер 2.21).

Рјешење: Функција везе је

$$\varphi(x,y) = x + y - 1, \qquad s = 1.$$

Посматрамо Лагранжову функцију

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

Имамо систем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0.$$

Из прве и друге једначине система добијамо

$$x = y = -\frac{\lambda}{2}$$

и уврштавањем у трећу једначину добијамо

$$\lambda = -1.$$

Дакле, стационарна тачка функције $F(x, y, \lambda)$ је тачка $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$.

Даље је

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0,$$

тј.

$$d^2F = 2dx^2 + 2dy^2.$$

Из функције везе добијамо

$$dx = -dy$$

па је

$$\Phi(h_2) = \Phi(dy) = 2dx^2 + 2dy^2 = 4dy^2 > 0.$$

Дакле, функција има минимум у тачки $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ уз услов $x + y - 1 = 0$. □

Примјер 2.23. Одредити екстреме функције функције

$$u(x, y, z) = x - 2y + 2z$$

ако је

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Рјешење: Пошто је

$$\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

Лагранжова функција је

$$F(x,y,z,\lambda) = u(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z) = x - 2y + 2z \; + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Имамо систем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2 + 2\lambda y = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2 + 2\lambda z = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Изражавајући x, y и z из прве, друге и треће једначине система респективно, и затим уврштавајући у четврту једначину, добијамо

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{3}{2}.$$

Добијамо двије стационарне тачке функције F:

$$P_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right) \text{ и } P_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\right).$$

Даље је

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 0$$

па је

$$d^2F = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 + 2\lambda dz^2.$$

Из функције везе добијамо

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = 0 \Rightarrow xdx = -ydy - zdz.$$

Према томе

$$\Phi(h_2, h_3) = \Phi(dy, dz) = 2\lambda(ydy + zdz)^2 + 2\lambda dy^2 + 2\lambda dz^2$$

У тачки P_1 је

$$\Phi(h_2, h_3) = \Phi(dy, dz) = \frac{4}{3}(dy - dz)^2 + 3dy^2 + 3dz^2 > 0$$

па функција у тачки P_1 има условни минимум, $u_{min} = u\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -3.$

У тачки P_2 је

$$\Phi(h_2, h_3) = \Phi(dy, dz) = -\frac{4}{3}(dy - dz)^2 - 3dy^2 - 3dz^2 < 0$$

и функција у тачки P_2 има условни максимум, $u_{max} = u\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 3.$ □

Примјер 2.24. Одредити најмању и највећу вриједност функције

$$u(x,y,z) = x + y + z$$

у области

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 1.$$

Рјешење: На основу Вајерштрасове теореме (Теорема 2.3) непрекидна функција на ограниченом и затвореном скупу достиже своју најмању и највећу вриједност. То значи да треба да одредимо локалне екстреме у унутрашњости области (уколико постоје), а затим условне екстреме на граници области. Поредећи вриједности функције у тачкама локалних и условних екстрема, долазимо да најмање и највеће вриједности функције u у датој области.

1. На почетку одређујемо локалне екстреме функције у области $x^2 + y^2 < z < 1$. Пошто је

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 1$$

функција нема стационарних тачака. То значи да се најмања и највећа вриједност функције достижу на граници области.

2. Одређујемо екстреме функције u под условом $z = 1, x^2 + y^2 < 1$, тј. у унутрашњости круга $x^2 + y^2 < 1$ у равни $z = 1$.

Тада је

$$g(x,y)=u(x,y,1)=x+y+1,\ x^2+y^2<1$$

па функција g нема стационарних тачака, тј. функција u нема тачака екстрема под условом $z=1,\ x^2+y^2<1$.

3. Одређујемо екстреме функције u под условом $z=x^2+y^2$, тј. под условом да се тачка (x,y,z) налази на параболоиду $z=x^2+y^2$ за $z<1$. Тада је

$$g(x,y)=u(x,y,x^2+y^2)=x+y+x^2+y^2,\ x^2+y^2<1.$$

Добијамо

$$1+2x=0 \wedge 1+2y=0 \Rightarrow x=y=-\frac{1}{2}.$$

Дакле, тачка могућег екстрема функције g је $P_1\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. Пошто је

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=2,\qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=2,\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=0$$

добијамо да је

$$A_1=2>0,\ A_2=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4>0$$

па функција g у тачки P_1 има локални минимум, односно функција u има условни минимум

$$u_{min}=u\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

4. Одређујемо екстреме функције u под условом $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$, тј. под условом да се тачка (x, y, z) налази на кружници $x^2 + y^2 = 1$ у равни $z = 1$. Тада је

$$F(x, y, \lambda) = x + y + 1 \quad + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Добијамо двије стационарне тачке функције F: $P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $P_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Пошто је

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

добијамо да да је тачка P_2 тачка локалног минимума, а тачка P_3 тачка локалног максимума функције F. Дакле,

$$u_{min} = u\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = -\sqrt{2} + 1$$
$$u_{max} = u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = \sqrt{2} + 1.$$

5. Упоређујући вриједности функције у тачкама условних екстрема, добијамо да је

$$sup u = max u = u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = \sqrt{2} + 1$$
$$inf u = min u = u\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$