УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 2- ПРЕДАВАЊА

Академска 2017/2018

ТЕМА 5: ФУНКЦИОНАЛНИ РЕДОВИ

5.1. Равномјерна конвергенција низова функција

5.2. Равномјерна конвергенција функционалних редова

5.3. Степени редови

5.4. Тејлоров и Маклоренов ред

ЛИТЕРАТУРА: **Математичка анализа II, Душан Аднађевић и Зоран Каделбург, Београд 1998** [1]

Наставник: Биљана Војводић

[1] У припреми предавања коришћена је и **Математичка анализа**, **Милан Меркле**, Електротехнички факултет (Београд 1997)

ТЕМА 5: ФУНКЦИОНАЛНИ РЕДОВИ

5.1. РАВНОМЈЕРНА КОНВЕРГЕНЦИЈА НИЗОВА ФУНКЦИЈА

Познато је да је гранична вриједности конвергентног низа $\{a_n\}$ реалних бројева такође реалан број

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Уколико су чланови низа функције које зависе од промјенљиве x, тј. облика $a_n(x), x \in B \subset \mathbb{R}$, тада кажемо да је низ $\{a_n(x)\}$ **функционални низ**.

Гранична вриједност функционалног низа је такође функција која зависи x и која је дефинисана на скупу B или на неком његовом подскупу

$$a(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x)\,, \qquad x \in A \subset B.$$

За конкретно задане функционалне низове $\{a_n(x)\}$, чак и у случају кад су $a_n(x)$ елементарне функције, прилично ријетко је могуће експлицитно одредити функцију $a(x)$. Такође, особине функција $a_n(x)$ се обично не преносе на функцију $a(x)$.

Примјер 5.1. Нека је $a_n(x) = x^n, x \in \mathbb{R}$. Тада $\lim_{n\to\infty} a_n(x)$ постоји ако и само ако $x \in (-1,1]$ и вриједи

$$a(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x) = \begin{cases} 0, -1 < x < 1 \\ 1, \ \ x = 1 \end{cases}.$$

Уочимо да су функције $a_n(x)$ непрекидне на $(-1,1]$, док то није случај са функцијом $a(x)$.□

Дакле, сама обична конверегенција (или конверегенција по тачкама) није довољна за преношење особина са функција $a_n(x)$ на функцију $a(x)$. Зато уводимо појам **равномјерне конвергенције низа функција.**

Дефиниција 5.1. Кажемо да низ функција $\{a_n(x)\}$ **равномјерно (униформно) конвергира** ка функцији $a(x)$ на скупу A ако

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in A)|a_n(x) - a(x)| < \epsilon. \tag{5.1}$$

Уочимо да се у Дефиницији 5.1 захтијева да n_0 буде исти за свако $x \in A$, док код обичне конверегенције n_0 може да зависи од x.

Примјер 5.2. Доказати да је низ функција

$$a_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}$$

равномјерно конвергентан на $\mathbb{R}$.

Рјешење: За фиксирано $x \in \mathbb{R}$ имамо

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x}{1 + n^2 x^2} = 0$$

па је

$$a(x) = 0, x \in \mathbb{R}.$$

Даље имамо

$$|a_n(x) - a(x)| = \left|\frac{x}{1 + n^2 x^2}\right| = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2n|x|}{1 + n^2 x^2} \leq \frac{1}{2n} < \epsilon$$

па је

$$(\forall \epsilon > 0)\left(\forall n \geq \frac{1}{2\epsilon}\right)(\forall x \in \mathbb{R})|a_n(x) - a(x)| < \epsilon.$$

Дакле, низ функција је равномјерно конвергентан на $\mathbb{R}$. □

Примјер 5.3. Низ функција $\{a_n(x)\}$ из Примјера 5.1 не конвергира равномјерно ка функцији $a(x)$ јер за $x \in (0,1)$ је

$$|a_n(x) - a(x)| = x^n < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln\epsilon}{\ln x}.$$

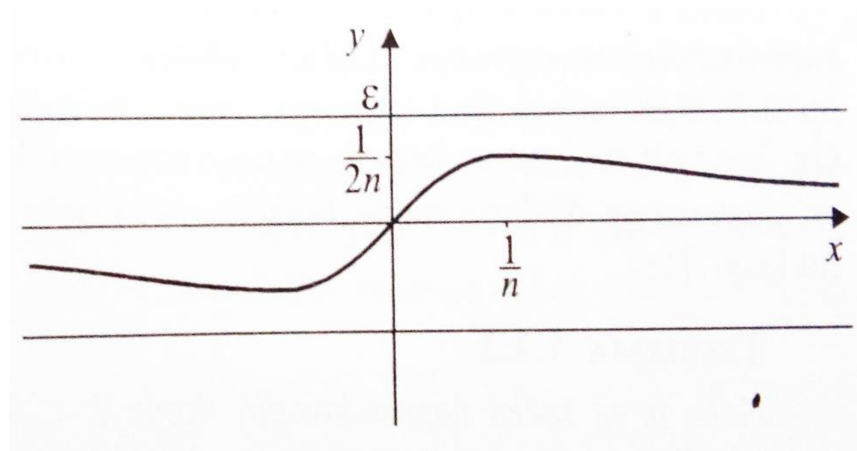
Уколико $x \to 1_-$ тада $\frac{\ln\epsilon}{\ln x} \to \infty$, па се не може одредити n_0 тако да

$$(\forall n \geq n_0)\big(\forall x \in (0,1)\big)|a_n(x) - a(x)| < \epsilon.\square$$

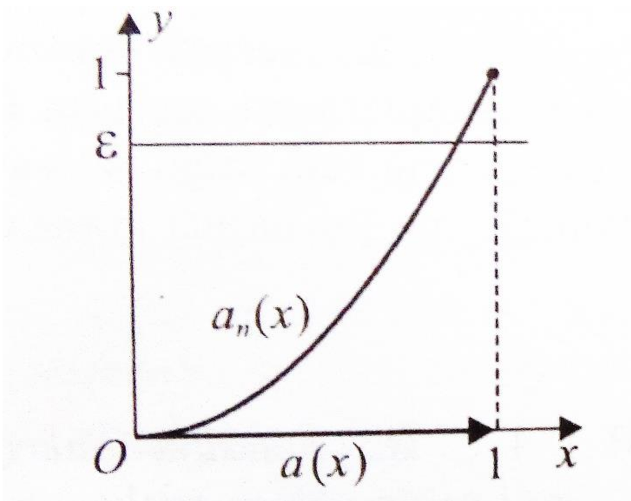
Разлика између обичне и равномјерне конвергенције илустрована је на сликама 5.1 и 5.2.

У случају равномјерне конвергенције за низ функција из Примјера 5.2, функције имају екстремне вриједности једнаке $\pm\frac{1}{2n}$ у тачкама $x = \pm\frac{1}{n}$ (Слика 5.1).

Према томе, за произвољно $\epsilon > 0$ и довољно велико n, цио график функције $a_n(x)$ се налази у траци $|y| < \epsilon$.



Слика 5.1.



Слика 5.2.

Уколико низ функција није равномјерно конвергентан, тада ће крива $a_n(x)$ увијек имати дио који ће излазити изван траке $|y| < \epsilon$.

Дакле, ма како велико било n, графици функција $a_n(x)$ неће комплетни бити у траци $|y| < \epsilon$ (Слика 5.2 за низ функција из Примјера 5.3).

5.2. РАВНОМЈЕРНА КОНВЕРГЕНЦИЈА ФУНКЦИОНАЛНИХ РЕДОВА

Ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \tag{5.2}$$

чији су чланови функције $a_n(x)$, назива се **функционални ред.** За сваку дату вриједност промјенљиве x у (5.2) добија се бројни ред.

Дефиниција 5.2. Кажемо да функционални ред (5.2) **равномјерно (униформно) конвергира** на скупу A ако низ његових парцијалних сума $\{S_n(x)\}$ равномјерно конвергира на A ка некој функцији $S(x)$, тј.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in A)|S_n(x) - S(x)| < \epsilon. \tag{5.3}$$

Најједноставнији и најчешће примјењивани критеријум за равномјерну конверегенцију редова је **Вајерштрасов критеријум**.

Лема 5.1. (Вајерштрасов критеријум равномјерне конвергенције) *Нека постоји низ* $\{c_n\}$ *реалних бројева такав да*

1) *постоји* $n_0 \in \mathbb{N}$ *тако да је* $(\forall n \geq n_0)(\forall x \in A)\ |a_n(x)| \leq c_n$ *и*

2) *ред* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *конвергира.*

Тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *равномјерно конвергира на* A.

Примјер 5.4. Испитати равномјерну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} \quad \text{на } \mathbb{R}.$$

Рјешење: Очигледно је

$$0 < \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Пошто је бројни ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергентан,[2] на основу Вајерштрасовог критеријума закључујемо да је дати функционални ред равномјерно конвергентан на $\mathbb{R}$. □

[2] Хиперхармонијски ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ конвергира за $p > 1$ и дивергира за $p \leq 1$.

Наводимо и **Абелов критеријум** за равномјерну конвергенцију редова.

Лема 5.2. (Абелов критеријум равномјерне конвергенције) *Нека су испуњени услови:*

1) *низ* $\{a_n(x)\}$ *је монотон и за свако* $x \in B$ *и* ***унифромно ограничен*** *на* A, *тј. постоји* $M \in \mathbb{R}$ *тако да* $(\forall x \in A)\ |a_n(x)| \leq M$ *и*
2) *ред* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *униформно конвергира на* A.

Тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ *равномјерно конвергира на* A.

Примјер 5.5. Испитати равномјерну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+x)}}$$

на $[0, \infty)$.

Рјешење: Нека је

$$a_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+x}} \text{ и } b_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Тада је за фиксирано $x \in [0, \infty)$ низ $\{a_n(x)\}$ монотон. Из неједнакости

$$\frac{1}{\sqrt{n+x}} \leq 1, x \in [0, \infty)$$

добијамо да је низ свако $\{a_n(x)\}$ унифромно ограничен на $[0, \infty)$. Пошто је бројни ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

конвергентан по Лајбницовом критеријуму, он је и равномјерно конвергентан на произвољном скупу. Према томе, дати функционални ред је по Абеловом критеријуму равномјерно конвергентан на $[0, \infty)$. □

5.2. РАВНОМЈЕРНА КОНВЕРГЕНЦИЈА ФУНКЦИОНАЛНИХ РЕДОВА

Видјели смо у Примјеру 5.1. да гранична вриједност низа непрекидних функција не мора да буде непрекидна функција. Међутим, ако је конвергенција равномјерна, онда је и функција којој равномјерно тежи низ непрекидних функција, такође непрекидна функција.

За равномјерно конвергентне редове непрекидних функција вриједи сљедећа теорема.

Теорема 5.1. *Ако су функције* $a_n: A \to \mathbb{R}$ *за свако* $n \in \mathbb{N}$ *непрекидне у тачки* $a \in A$ *и ако је ред* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *равномјерно конвергентан у некој околини тачке* a, *тада је и функција*

$$a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

непрекидна у тачки a.

Гранична вриједност равномјерно конвергентног реда може се одредити „уласком под знак суме“. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 5.2. *Нека је ред* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *равномјерно конвергентан на* A *и нека у некој тачки нагомилавања* $a \in A$ *постоји* $\lim_{x\to a} a_n(x)$ *за свако* $n \in \mathbb{N}$. *Тада ред* $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a} a_n(x)$ *конвергира и вриједи*

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a} a_n(x). \tag{5.4}$$

Равномјерно конвергентан ред се може интегралити члан по члан. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 5.3. *Нека је ред* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *равномјерно конвергентан на* $[a,b]$ *и нека су функције* $a_n(x)$ *интеграбилне на* $[a,b]$. *Тада је и збир реда интеграбилна функција и вриједи*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x) dx. \tag{5.5}$$

Равномјерно конвергентан ред се може диференцирати члан по члан. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 5.4. *Нека је свака од функција* $a_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *диференцијабилна за* $n \in \mathbb{N}$ *и нека је ред*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}'(x)$$

равномјерно конвергентан на $[a,b]$, *а сам ред*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

конвергентан бар у једној тачки из $[a,b]$. *Тада је ред* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *равномјерно конвергентан на* $[a,b]$, *његова сума је диференцијабилна функција и вриједи*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}'(x). \tag{5.6}$$

5.3. СТЕПЕНИ РЕДОВИ

Ред облика

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, a_n \in \mathbb{R}, n = 0,1,\dots \tag{5.7}$$

се назива **степеним или потенцијалним редом.**

Очигледно је да ред (5.7) конвергира за $x = x_0$. Може се догодити да то буде и једина вриједност промјенљиве за коју тај ред конвергира. Ако то није случај, вриједи сљедећа лема.

Лема 5.3. *Ако ред (5.7) конвергира за неко* $x = \bar{x} \neq x_0$, *онда он апсолутно конвергира за свако* $x \in \mathbb{R}$ *за које је* $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$.

Доказ: Из конвергенције реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\bar{x}-x_0)^n$ слиједи да је низ $a_n(\bar{x}-x_0)^n$ ограничен, тј. да за неко $M \in \mathbb{R}$ и свако n важи

$$|a_n(\bar{x}-x_0)^n| \leq M.$$

Ако је $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$ тада је

$$\left|\frac{x - x_0}{\bar{x} - x_0}\right| = q < 1.$$

Добијамо

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n(\bar{x} - x_0)^n| \left|\frac{x - x_0}{\bar{x} - x_0}\right|^n \leq Mq^n.$$

Пошто геометријски ред $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$ конвергира, из критеријума поређења добијамо да конвергира и ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. $\square$

Дакле, за испитивање конвергенције степеног реда, потребно је одредити број

$$R = sup\left\{|x - x_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \text{ конвергира } \right\} \tag{5.8}$$

јер степени ред (5.7) конвергира за $|x - x_0| < R$ и дивергира за $|x - x_0| > R$.

Број R дат релацијом (5.8) назива се **радијус** или **полупречник конвергенције** степеног реда (5.7). Ако је $R > 0$ тада се интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ у којем ред (5.7) апсолутно конвергира, назива **интервал конверегенције** реда (5.7).

На питање конвергенције степеног реда (5.7) у тачкама $|x - x_0| = R$, тј. $x = x_0 \pm R$ не може се дати никакав одређен одговор, што илуструју сљедећи примјери.

Примјер 5.6. а) Ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$$

дивергира за свако $x \neq 0$ јер му општи члан не тежи нули. За овај ред је $R = 0$.

б) Ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

конвергира за свако $x \in \mathbb{R}$ што се може провјерити нпр. помоћу Даламберовог критеријумима. За овај ред је $R = +\infty$.

в) Ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

конвергира за свако $|x| < 1$ а дивергира за $|x| \geq 1$. Дакле, $R = 1$, интервал конвергенције је $(-1,1)$ и ред дивергира на крајевима интервала конврегенције.

г) Ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

конвергира за свако $|x| < 1$ а дивергира за $|x| > 1$. Дакле, $R = 1$ и интервал конвергенције је $(-1,1)$. Ред (условно) конвергира за $x = -1$ и дивергира за $x = 1$.

д) Ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

конвергира за свако $|x| < 1$ а дивергира за $|x| > 1$. $R = 1$ и интервал конвергенције је $(-1,1)$. Ред (апсолутно) конвергира за $x = \pm 1$. □

За полупречник конвергенције R степеног реда (5.7) вриједи

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{5.9}$$

односно

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{5.10}$$

ако ови лимеси постоје.

Примјер 5.7. Одредити полупречник конверегенције, интервал конверегенције и испитати конвергенцију на крајевима интервала конверегенције степеног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n} x^n.$$

Рјешење: Из (5.10) имамо

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(-1)^n}{n2^n}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{n} = 2.$$

Интервал конвергенције је $(-2,2)$. Испитујемо конвергенцију на крајевима интервала конвергенције.

За $x = 2$ добијамо ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

који је условно конвергентан, док за $x = -2$ добијамо хармонијски ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

који је дивергентан. □

Видјели смо да равномјерно конвергентни функционални редови могу да се интеграле и диференцирају члан по члан. Поставља се питање равномјерне конвергенције степених редова. Вриједи сљедећа лема.

Лема 5.4. *Нека степени ред (5.7) има полупречник конвергенције* $R > 0$. *Тада је за свако* r, $0 < r < R$ *степени ред (5.7) равномјерно конвергентан на сегменту* $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Доказ: Пошто је ред (5.7) апсолутно конвергентан за $x = x_0 + r$, из Вајерштрасовог критеријума слиједи да је ред (5.7) равномјерно конвергентан на сегменту $[x_0 - r, x_0 + r]$.□

Пошто је свака тачка интервала $(x_0 - R, x_0 + R)$ садржана у неком сегменту облика $[x_0 - r, x_0 + r]$ за неко $0 < r < R$, из Леме 5.4 добијамо сљедеће леме.

Лема 5.5. *Ако је радијус конвергенције R степеног реда (5.7) позитиван, тада је функција*

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

непрекидна на интервалу $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Лема 5.6. *Ако у некој околини тачке* x_0 *вриједи*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

онда је $a_n = b_n, n = 0,1,2, \dots$

Ред (5.7) у општем случају не конвергира равномјерно на $(x_0 - R, x_0 + R)$. Може се показати да редови

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

не конвергирају равномјерно на интервалу конвергенције $(-1,1)$. Међутим, ако ред (5.7) конвергира у неком од крајева интервала конвергенције, макар и условно, тада се интервал равномјерне конвергенције може „проширити“ до тога краја. Вриједи сљедећа Абелова теорема.

Теорема 5.5. (Абелова теорема) *Нека степени ред (5.7) има полупречник конвергенције* $R > 0$ *и нека конвергира за* $x = x_0 + R$*. Тада ред (5.7) конвергира равномјерно и на сегменту* $[x_0, x_0 + R]$ *и његова сума је непрекидна слијева у тачки* $x = x_0 + R$*, тј. вриједи*

$$\lim_{x \to (x_0+R)_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n . \tag{5.11}$$

Степени ред се може диференцирати члан по члан произвољан број пута у свакој тачки из интервала $(\boldsymbol{x_0 - R, x_0 + R})$ **и може се интегралити члан по члан на сваком интервалу** $(\boldsymbol{a, b})$ **гдје је** $\boldsymbol{-R < a < b < R}$.

Редови који се добијају диференцирањем, односно интеграцијом степеног реда члан по члан, имају исти полупречник конверегенције као и тај ред.

5.4. ТЕЈЛОРОВ И МАКЛОРЕНОВ РЕД

Нека је функција f дефинисана на неком интервалу који садржи тачку x_0 и нека постоје сви изводи функције f у тачки x_0. Степени ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{5.12}$$

се назива **Тејлоров ред** функције f. Ако је $x_0 = 0$ кажемо да је ред (5.12) **Маклоренов ред** функције f.

Тејлоров ред функције f у датој тачки x може да буде конвергентан или дивергентан, а ако је конвергентан онда може, али не мора да конвергира ка $f(x)$.

Довољан услов да ред (5.12) конвергира ка функцији f на неком интервалу $[a, b]$ који садржи тачку x_0 је да на том интервалу постоје сви изводи функције f и да су униформно ограничени, тј. да постоји константа $M > 0$ тако да важи

$$(\forall x \in [a, b])(\forall n \in \mathbb{N})\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M.$$

Теорема 5.6. (Теорема о јединствености степеног реда) *Сваки степени ред са полупречником конвергенције $R > 0$ је Тејлоров ред функције која је дефинисана сумом тог реда на $(x_0 - R, x_0 + R)$.*

Према томе, ако је

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

тада је

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Лако се провјерава да су Маклоренови редови неких елементарних функција сљедећег облика.

Таблица основних Маклоренових редова

Функција	**Маклоренов ред**	***R***
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$
$sinx$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$	$+\infty$
$cosx$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} x^n$	1
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	1
$(1+x)^{\alpha}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$	1

Примјер 5.8. Наћи суму реда из примјера 5.7.

Рјешење: Показали смо да је за ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n} x^n$$

интервал конвергенције $(-2,2)$, те да је ред (условно) конвергентан за $x = 2$ и дивергентан за $x = -2$. Нека је

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n} x^n, x \in (-2,2).$$

Коришћењем таблице основних Маклоренових редова, добијамо

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n = -\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right), x \in (-2,2).$$

Пошто ред конвергира и за $x = 2$, примјеном Абелове теореме добијамо да горња једнакост вриједи и за $x = 2$. Дакле,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n} x^n = -\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right), x \in (-2,2]. \square$$

Примјер 5.9. Развити у Маклоренов ред функцију $f(x) = sin^2 x$.

Рјешење: Из идентитета

$$f(x) = sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos2x)$$

и Маклореновог реда функције $cosx$ добијамо

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(1 - 1 - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} =$$

$$x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \cdots, x \in \mathbb{R}. \square$$

Примјер 5.10. Испитати конвергенцију и наћи суму реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n .$$

Рјешење: Лако се добија да је $R = 1$ и да је ред дивергентан за $x = \pm 1$ (општи члан реда не тежи нули). Нека је

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n , \ x \in (-1,1).$$

Тада је

$$f(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = xg(x).$$

Интеграцијом члан по члан добијамо

$$\int_0^x g(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^x t^{n-1} dt =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}.$$

Одавде диференцирањем добијамо

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x g(t)dt\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

тј.

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Према томе

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad x \in (-1,1). \square$$