УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 2- ПРЕДАВАЊА

Академска 2017/2018

ТЕМА 1: ИНТЕГРАЛНИ РАЧУН

1.1. Неодређени интеграл
1.2. Неке класе интеграла
1.3. Одређени интеграл
1.4. Теорема о средњој вриједности. Њутн-Лајбницова формула
1.5. Несвојствени интеграл
1.6. Примјене одређеног интеграла

ЛИТЕРАТУРА: **Милан Јањић, Математика I, ПМФ, Бања Лука, 2001**

Зоран Митровић, Математика I, Бања Лука, 2016 [1]

Наставник: Биљана Војводић

[1] У припреми предавања коришћене су и књиге **Математичка анализа 1, Душан Аднађевић и Зоран Каделбург** (Наука, Београд 1998) и **Математичка анализа**, **Милан Меркле**, Електротехнички факултет (Београд 1997)

ТЕМА 1: ИНТЕГРАЛНИ РАЧУН

1.1. НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

Посматрамо **проблем одређивања функције ако је познат њен извод**, тј. поступак обрнут од поступка диференцирања.

Примјер 1.1. Одредити функцију $F(x)$ чији је извод функција $f(x) = x^3$.

Рјешење: Из правила за тражење извода имамо $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$, па је $F(x) = \frac{x^4}{4}$. Уочимо да је и извод функције $F(x) + C = \frac{x^4}{4} + C$ (C произвољна константа), такође једнак функцији $f(x)$. □

Дефиниција 1.1. *Нека је функција* f *дефинисана на* (a, b). *Ако постоји диференцијабилна функција* F *таква да је за* $x \in (a, b)$

$$F'(x) = f(x)$$

кажемо да је F ***примитивна функција*** *функције* f *на* (a, b).

Примједба 1.1. Нека је F примитивна функција функције f на (a, b). Тада је за $x \in (a, b)$

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

па је и $F(x) + C$ (C произвољна константа), такође примитивна функција функције f на (a, b).

Дефиниција 1.2. ***Неодређени интеграл*** *функције* f *на* (a, b) *је* ***скуп свих примитивних функција*** *функције* f *на интервалу* (a, b). *Означавамо га са*

$$\int f(x)dx.$$

Функција $f(x)$ у овој дефиницији се назива **подинтегралном функцијом (интеграндом),** а израз $f(x)dx$ **подинтегрални израз**. Поступак налажења примитивне функције називамо **интеграцијом или интегрисањем.**

Ако је F једна примитивна функција функције f на (a, b), тада из дефиниције неодређеног интеграла и Примједбе 1.1 добијамо да је

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\},$$

што обично краће записујемо у облику

$$\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Основне особине неодређеног интеграла дате су сљедећом теоремом.

Теорема 1.1. *Ако функције* f *и* g *имају примитивне функције на* (a, b), *тада је:*

1) $\displaystyle\int f'(x)dx = f(x) + C,$

2) $\displaystyle\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$

3) $\displaystyle\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx\,, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и

4) $\displaystyle\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Доказ: 1) Слиједи из дефиниције неодређеног интеграла.

2) Нека је F примитивна функција функције f на (a, b). Тада је

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

3) Једнакост слиједи из једнакости извода лијеве и десне стране, јер из особине 2) добијамо

$$\left(\int \alpha f(x)dx\right)' = \alpha f(x) \text{ и } \left(\alpha \int f(x)dx\right)' = \alpha f(x)$$

тј. вриједи особина 3).[2]

[2] Једнакост 3) не вриједи за $\alpha = 0$. У том случају је $\int 0dx = C$, док је $0 \cdot \int f(x)dx = 0$.

4) Изводи лијеве и десне стране су једнаки јер из особине 2) и линеарности извода функције добијамо

$$\left(\int \big(f(x)+g(x)\big)dx\right)' = f(x)+g(x) \text{ и}$$

$$\left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' + \left(\int g(x)dx\right)' = f(x)+g(x).$$

Одавде добијамо особину 4) и теорема је доказана.□

Пошто је **интеграција поступак инверзан поступку диференцирања,** сада се једноставно из таблице извода добија таблица неодређених интеграла,[3] Табела 1.1.

[3] Видјети предавања из Математике 1: Тема 6, Поглавље 6.1 Први извод, стр. 57

Таблица неодређених интеграла

Функција	Интеграл	Интервал за x	Функција	Интеграл	Интервал за x
$x^a, a \geq 0$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C,$	$(-\infty, +\infty)$	$x^a, a < 0,$ $a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	$(-\infty, 0)$ или $(0, +\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C,$	$(-\infty, 0)$ или $(0, +\infty)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$	$(-\infty, -1)$ или $(-1,1)$ или $(1, +\infty)$
$sinx$	$-cosx + C$	$(-\infty, +\infty)$	$cosx$	$sinx + C$	$(-\infty, +\infty)$
$\frac{1}{cos^2 x}$	$tgx + C$	$\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right),$ $k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{sin^2 x}$	$-ctgx + C$	$(k\pi, (k+1)\pi),$ $k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsinx + C$	$(-1,1)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$arctgx + C$	$(-\infty, +\infty)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$	$(-\infty, +\infty)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + C$	$(-\infty, -1)$ или $(1, +\infty)$
$a^x,$ $a > 0, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a} + C,$	$(-\infty, +\infty)$	e^x	$e^x + C$	$(-\infty, +\infty)$
shx	$chx + C$	$(-\infty, +\infty)$	chx	$shx + C$	$(-\infty, +\infty)$

Табела 1.1.

Примјер 1.2. Израчунати интеграл

$$\int tg^2 x dx.$$

Рјешење: Примјеном основног тригонометријског идентитета и особине 4) неодређеног интеграла из Теореме 1.1 добијамо

$$\int tg^2 x dx = \int \frac{sin^2 x}{cos^2 x} dx = \int \frac{1 - cos^2 x}{cos^2 x} dx = \int \frac{1}{cos^2 x} dx - \int dx = tgx - x + C. \square$$

1.1.1. Смјена промјенљиве у неодређеном интегралу

Смјена промјенљиве је метод за израчунавање неодређеног интеграла којим се поједностављује подинтегрална функција.

Ако f има примитивну функцију F на (a, b) и ако је функција $\varphi: X \to (a, b)$диференцијабилна, из извода сложене функције добијамо

$$\left(F\big(\varphi(t)\big)\right)' = F'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$$

па је

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = F\big(\varphi(t)\big) + C. \tag{1.2}$$

Користећи формулу (1.2) лако се доказују сљедеће двије теореме.

Теорема 1.2. (Смјена $\boldsymbol{x = \varphi(t)}$) *Ако функција f има примитивну функцију на (a, b) и ако је $\varphi: X \to (a, b)$ диференцијабилна функција, тада је*

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt + C. \tag{1.3}$$

Теорема 1.3. (Смјена $\boldsymbol{\varphi(x) = t}$) *Нека функција f има примитивну функцију на (a, b) и нека функција $\varphi: (a, b) \to X$ има инверзну функцију $\varphi^{-1} = \psi: X \to (a, b)$. Ако су функције* ψ и ψ' *непрекидне, тада је*

$$\int f(\varphi(x))dx = \int f(t)\psi'(t)dt + C. \tag{1.3$_1$}$$

Примјер 1.3. Израчунати интеграле

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$, б) $\displaystyle\int (2x-3)^{10} dx$, в) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2} dx$.

Рјешење: а) За $x \in (0, \infty)$ уведимо смјену $x = \varphi(t) = t^2$, $\varphi: (0, \infty) \to (0, \infty)$. Испуњени су услови за примјену Теореме 1.2 и имамо

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{2tdt}{(1+t^2)t} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2arctgt + C = 2arctg\sqrt{x} + C.$$

б) У овом примјеру је $\varphi(x) = t = 2x - 3$, $\varphi^{-1}(t) = \psi(t) = \frac{t+3}{2}$ и испуњени су услови за примјену Теореме 1.3 на $(-\infty, +\infty)$. Имамо

$$\int (2x-3)^{10} dx = \left| \begin{matrix} 2x - 3 = t \\ 2dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int t^{10} dt = \frac{t^{11}}{22} + C = \frac{(2x-3)^{11}}{22} + C.$$

в) Уводимо смјену $\varphi(x) = t = 1 + x^2$. Испуњени су услови за примјену Теореме 1.3 на $(-\infty, +\infty)$. Имамо

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \left| \begin{matrix} 1 + x^2 = t \\ 2xdx = dt \Rightarrow xdx = \frac{1}{2} dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$$

Уочимо да смо интеграл израчунали без одређивања инверзне функције $\psi(t)$ јер смо диференцијал dt изразили диференцирањем у $\varphi(x) = t$ и коришћењем одговарајућег дијела подинтегралне функције. $\square$

Коришћењем Теореме 1.3. лако се доказују сљедеће формуле.

Лема 1.1.

1) Ако функција f има примитивну функцију F на (a, b) и ако је $c \neq 0$, тада је

$$\int f(cx+d)dx = \frac{1}{c}F(cx+d) + C. \tag{1.3₂}$$

2)

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C, \qquad f(x) \neq 0. \tag{1.3₃}$$

Доказ: 1) Уводимо смјену промјенљиве $cx + d = t$:

$$\int f(cx+d)dx = \left| \begin{array}{c} cx+d=t \\ cdx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{c}dt \end{array} \right| = \frac{1}{c}\int f(t)dt = \frac{1}{c}F(t) + C = \frac{1}{c}F(cx+d) + C.$$

2) Имамо

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left| \begin{array}{c} f(x) = t \\ f'(x)dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C, \qquad f(x) \neq 0. \square$$

Примјер 1.4. Израчунати интеграле:

а) $\int sin2xdx$, б) $\int \frac{6x^2-2x+5}{2x^3-x^2+5x}dx.$

Рјешење:

а) Примјеном особине 1) из Леме 1.1 добијамо

$$\int sin2xdx = -\frac{1}{2}cos2x + C.$$

б) Пошто је $(2x^3-x^2+5x)' = 6x^2-2x+5$ користећи особину 2) из Леме 1.1 добијамо

$$\int \frac{6x^2-2x+5}{2x^3-x^2+5x}dx = \ln|2x^3-x^2+5x| + C. \square$$

1.1.2. Парцијална интеграција у неодређеном интегралу

Ако су су функције u и v диференцијабилне, из правила за извод производа имамо

$$\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Одавде добијамо да је $u(x)v(x)$ примитивна функција функције $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, тј.

$$\int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = u(x)v(x) + C. \tag{1.4}$$

Из формуле (1.4) добијамо фомулу за **парцијалну интеграцију**.

Теорема 1.4. (Парцијална интеграција) *Ако су функције* u и v *диференцијабилне и ако постоји примитивна функција функције* $u'(x)v(x)$, *тада је*

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)\,. \square \tag{1.4$_1$}$$

Примјер 1.5. Израчунати интеграл

$$\int x\ln x dx.$$

Рјешење:

$$\int x\ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & dv = xdx \\ du = \dfrac{1}{x}dx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C. \square$$

1.2. НЕКЕ КЛАСЕ ИНТЕРАЛА

1.2.1. Интеграција рационалних функција

I. Интеграли облика

$$\int \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx},\ \boldsymbol{R} \text{ рационална функција}$$

Рационална функција $R(x)$ је облика

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

гдје су $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ полиноми са реалним коефицијентима степена n и m респективно.

Ако је $n < m$ кажемо да $R(x)$ **права рационална функција**.

Ако је $n \geq m$, рационална функција се може представити у облику збира полинома и праве рационалне функције.

Примјер 1.6. Функцију

$$f(x) = \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 1}{x^2 - x - 2}$$

представити у облику збира полинома и праве рационалне функције.

Рјешење: Дијељењем полинома у бројиоцу полиномом у имениоцу добијамо

$$\begin{array}{l}
(3x^4 + 2x^2 - 3x + 1) : (x^2 - x - 2) = 3x^2 + 3x + 11 \\
\underline{-3x^4 \mp 3x^3 \mp 6x^2} \\
\qquad\qquad 3x^3 + 8x^2 - 3x + 1 \\
\qquad\quad -\underline{3x^3 \mp 3x^2 \mp 6x\quad} \\
\qquad\qquad\quad 11x^2 + 3x + 1 \\
\qquad\qquad \underline{-11x^2 \mp 11x \mp 22} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 14x + 23
\end{array}$$

Дакле количник је полином $Q(x) = 3x^2 + 3x + 11$ а остатак полином $R(x) = 14x + 23$, па функцију f представљамо у облику

$$f(x) = \frac{(x^2 - x - 2)(3x^2 + 3x + 11) + 14x + 23}{x^2 - x - 2} = 3x^2 + 3x + 11 + \frac{14x + 23}{x^2 - x - 2}. \square$$

Права рационална функција се може представити у облику збира **елементарних (парцијалних) разломака** облика

$$\frac{A}{(x-a)^k} \ \text{ и } \ \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c\,)^k}, \qquad A,B,C,a,b,c \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}, b^2-4c<0. \tag{1.5}$$

Уочимо да је

$$x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4c-b^2}{4}$$

односно

$$x^2+bx+c=(x-p)^2+q^2$$

гдје је $p=-\frac{b}{2}$, $q^2=\frac{4c-b^2}{4}$. Зато у наставку посматрамо елементарне разломке облика

$$\frac{A}{(x-a)^k} \ \text{ и } \ \frac{Bx+C}{((x-p)^2+q^2\,)^k}, \qquad A,B,C,a,p,q \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}. \tag{1.5$_1$}$$

Облик елементарних разломака помоћу којих представљамо праву рационалну функцију зависи од облика фактора полинома у имениоцу.

У Табели 1.2. наведени су облици елементарних разломака у зависности од облика фактора у имениоцу праве рационалне функције.

Облик фактора полинома у имениоцу	**Облик елементарних разломака**
$x-a$	$\frac{A}{x-a}$
$(x-a)^k$	$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$
$(x-p)^2+q^2$	$\frac{Bx+C}{(x-p)^2+q^2}$
$((x-p)^2+q^2)^k$	$\frac{B_1x+C_1}{(x-p)^2+q^2}+\frac{B_2x+C_2}{((x-p)^2+q^2)^2}+\cdots+\frac{B_kx+C_k}{((x-p)^2+q^2)^k}$

Табела 1.2.

Примјер 1.7. Функцију

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x^2-1)(x-1)}$$

представити у облику збира елементарних разломака.

Рјешење: Користећи Табелу 1.2 добијамо

$$\frac{2x+1}{(x^2-1)(x-1)} = \frac{2x+1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Имамо

$$2x+1 = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2$$

односно

$$2x+1 = (A+C)x^2 + (B-2C)x - A + B + C.$$

Одавде добијамо систем

$$A + C = 0 \land B - 2C = 2 \land -A + B + C = 1.$$

Рјешење овог система је

$$A = \frac{1}{4}, B = \frac{3}{2}, C = -\frac{1}{4}.$$

Дакле,

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x^2-1)(x-1)} = \frac{1}{4(x-1)} + \frac{3}{2(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)}. \square$$

Дакле, интеграција рационалних функција се своди на интеграцију функција облика (1.5_1), па ћемо одредити ове интеграле.

II. Интеграли облика

$$\int \frac{\boldsymbol{A}}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{k}}}\boldsymbol{dx}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$$

Интеграл рјешавамо увођењем смјене $x-a=t$:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \begin{vmatrix} x-a=t \\ dx=dt \end{vmatrix} = A\int \frac{dt}{t^k} = \begin{cases} A\ln|t| + C, k=1 \\ -\dfrac{A}{(k-1)t^{k-1}} + C, k>1. \end{cases}$$

Дакле

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \begin{cases} A\ln|x-a| + C, k=1 \\ -\dfrac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C, k>1. \end{cases} \tag{1.6}$$

Примјер 1.8. Израчунати интеграл

$$\int f(x)dx$$

гдје је $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2-1)(x-1)}$ функција из Примјера 1.7.

Рјешење: Функцију $f(x)$ смо у Примјеру 1.7 представили у облику збира елементарних разломака

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x^2-1)(x-1)} = \frac{1}{4(x-1)} + \frac{3}{2(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)}.$$

Према томе

$$\int \frac{2x+1}{(x^2-1)(x-1)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx =$$

$$\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\ln|x+1| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{3}{2(x-1)} + C. \square$$

Примјер 1.9. Израчунати интеграл

$$\int \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - x - 2} dx.$$

Рјешење: Након дијељења полинома, подинтегралну функцију пишемо у облику збира полинома и праве рационалне функције:

$$\frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - x - 2} = \frac{(x^2 - x - 2)(x + 1) + 5x + 3}{x^2 - x - 2} = x + 1 + \frac{5x + 3}{x^2 - x - 2}.$$

Даље је

$$\frac{5x + 3}{x^2 - x - 2} = \frac{5x + 3}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2}$$

и

$$5x + 3 = A(x - 2) + B(x + 1) \Rightarrow 5x + 3 = (A + B)x - 2A + B.$$

Добијамо систем

$$A + B = 5 \ \wedge -2A + B = 3 \Rightarrow A = \frac{2}{3}, B = \frac{13}{3}.$$

Према томе

$$\int \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - x - 2} dx = \int (x + 1) dx + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x + 1} dx + \frac{13}{3} \int \frac{1}{x - 2} dx =$$

$$\frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{3} \ln|x + 1| + \frac{13}{3} \ln|x - 2| + C. \square$$

III. Интеграл облика

$$\int \frac{\boldsymbol{Bx+C}}{(\boldsymbol{x-p})^2+\boldsymbol{q}^2}\,\boldsymbol{dx}$$

Смјеном $x-p=t, dx=dt$ добијамо

$$\int \frac{Bx+C}{(x-p)^2+q^2}dx = \int \frac{Bt+pB+C}{t^2+q^2}dt =$$
$$B\int \frac{t}{t^2+q^2}dt + (pB+C)\int \frac{1}{t^2+q^2}dt.$$

Као и у Примјеру 1.3. в) лако се покаже да је

$$\int \frac{t}{t^2+q^2}dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+q^2)+C_1$$

док је

$$\int \frac{1}{t^2+q^2}dt = \frac{1}{q^2}\int \frac{1}{\left(\frac{t}{q}\right)^2+1}dt = \frac{1}{q}arctg\frac{t}{q}+C_1.$$

Према томе

$$\int \frac{Bx+C}{((x-p)^2+q^2}dx = \frac{B}{2}\ln((x-p)^2+q^2)+\frac{pB+C}{q}arctg\frac{x-p}{q}+C_1.$$

IV. Интеграли облика

$$\int \frac{\boldsymbol{Bx+C}}{((\boldsymbol{x-p})^2+\boldsymbol{q}^2)^{\boldsymbol{k}}}\boldsymbol{dx},\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}$$

Смјеном $x-p=t$ добијамо

$$\int \frac{Bx+C}{((x-p)^2+q^2)^k}dx = B\int \frac{t}{(t^2+q^2)^k}dt+(pB+C)\int \frac{dt}{(t^2+q^2)^k} =$$

$$BJ_1+(pB+C)J_2.$$

Израчунајмо интеграле J_1 и J_2. За интеграл J_1 имамо

$$J_1=\int \frac{t}{(t^2+q^2)^k}dt=\left|\begin{matrix} t^2+q^2=s \\ tdt=\frac{1}{2}ds \end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{ds}{s^k}$$

па је

$$\int \frac{t}{(t^2+q^2)^k}dt=\begin{cases} \frac{1}{2}\ln(t^2+q^2)+C_1, k=1 \\ -\frac{1}{2(k-1)(t^2+q^2)^{k-1}}+C_1, k>1. \end{cases}$$

За интеграл J_2 имамо

$$J_2 = \int \frac{dt}{(t^2+q^2)^k} = \frac{1}{q^{2k}} \int \frac{dt}{\left(\left(\frac{t}{q}\right)^2+1\right)^k} = \left| \begin{matrix} \frac{t}{q} = s \\ dt = qds \end{matrix} \right| = \frac{1}{q^{2k-1}} \int \frac{ds}{(s^2+1)^k}.$$

Нека је

$$I_k = \int \frac{ds}{(s^2+1)^k}. \qquad (1.7)$$

Ако је $k = 1$ тада имамо таблични интеграл

$$I_1 = \int \frac{ds}{s^2+1} = arctgs + C_1.$$

За $k = 2$ имамо

$$I_2 = \int \frac{ds}{(s^2+1)^2} = \int \frac{(1+s^2)-s^2}{(s^2+1)^2} ds = I_1 - \int s \cdot \frac{s}{(s^2+1)^2} ds =$$

$$\left| \begin{matrix} u = s & dv = \frac{s}{(s^2+1)^2} ds \\ du = ds & v = -\frac{1}{2(s^2+1)} \end{matrix} \right| = I_1 + \frac{s}{2(s^2+1)} - \frac{1}{2} I_1 =$$

$$\frac{1}{2} I_1 + \frac{s}{2(s^2+1)} = \frac{1}{2} arctgs + \frac{s}{2(s^2+1)} + C_1.$$

Дакле, нашли смо везу између интеграла I_2 и I_1:

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{s}{2(s^2+1)}. \tag{1.7$_1$}$$

На исти начин успостављамо везу између интеграла I_k и I_{k-1} и долазимо до **рекурентне формуле** за рачунање интеграла I_k:

$$I_k = \frac{s}{2(k-1)(s^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)} I_{k-1}, k \in \mathbb{N}. \tag{1.7$_2$}$$

Примјер 1.10. Израчунати интеграл

$$I = \int \frac{1}{(x^2-2x+5)(x-3)} dx.$$

Рјешење:

$$\frac{1}{(x-3)(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5}.$$

Одавде је

$$1 = A(x^2-2x+5) + (Bx+C)(x-3)$$

и добијамо систем

$$A + B = 0 \wedge -2A - 3B + C = 0 \wedge 5A - 3C = 1.$$

Рјешење система је

$$A = \frac{1}{8}, B = -\frac{1}{8}, C = -\frac{1}{8}.$$

Према томе добијамо

$$\int \frac{1}{(x^2-2x+5)(x-3)}dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{x-3}dx - \frac{1}{8}\int \frac{x+1}{x^2-2x+5}dx =$$

$$\frac{1}{8}\ln|x-3| - \frac{1}{8}\int \frac{x+1}{x^2-2x+5}dx.$$

Даље је

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{x+1}{(x-1)^2+4}dx = \begin{vmatrix} x-1=t \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{t+2}{t^2+4}dt =$$

$$\int \frac{t}{t^2+4}dt + 2\int \frac{1}{t^2+4}dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+4) + arctg\frac{t}{2} + C =$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) + arctg\frac{x-1}{2} + C.$$

Дакле,

$$I = \int \frac{1}{(x^2-2x+5)(x-3)}dx = \frac{1}{8}\ln|x-3| - \frac{1}{16}\ln(x^2-2x+5) - \frac{1}{8}arctg\frac{x-1}{2} + C. \square$$

1.2.2. Интеграција неких ирационалних функција

V. Интеграли облика

$$\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}^{\frac{p_1}{q_1}}, \boldsymbol{x}^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, \boldsymbol{x}^{\frac{p_k}{q_k}}\right) \boldsymbol{dx}, \boldsymbol{p_i}, \boldsymbol{q_i} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{R} \text{ рационална функција}$$

Смјеном

$$x = t^q, q = NZS(q_1, q_2, \dots, q_k)$$

интеграл сводимо на интеграл рационалне функције по t.

Примјер 1.11. Израчунати интеграл

$$I = \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)} dx.$$

Рјешење: $NZS(3,6) = 6 \Rightarrow x = t^6,\ dx = 6t^5 dt.$ Имамо

$$I = 6\int \frac{t^6 + t^4 + t}{t^6(1 + t^2)} t^5 dt = 6\int \frac{t^5 + t^3 + 1}{1 + t^2} dt = 6\int t^3\, dt + 6\int \frac{1}{1 + t^2} dt =$$

$$\frac{3}{2}t^4 + 6arctgt + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6arctg\sqrt[6]{x} + C. \square$$

VI. Интеграли облика

$$\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}}\right) \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{R} \text{ рационална функција}$$

Ови интеграли се своде на интеграле рационалних функција помоћу **Ојлерових [4] смјена:**

- $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a},$ ако је $a > 0$
- $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c},$ ако је $c > 0$
- $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - x_1)t$, ако је $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

[4] Leonhard Euler (1707 - 1783), швајцарски математичар и физичар

Примјер 1.12. Израчунати интеграл

$$I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Рјешење: Уводимо смјену $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$. Добијамо

$$I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=2\int\frac{t^2+t+1}{t(2t+1)^2}dt=$$

$$2\int\frac{dt}{t}-3\int\frac{dt}{2t+1}-3\int\frac{dt}{(2t+1)^2}=$$

$$2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t+1|+\frac{3}{2(2t+1)}+C=$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|2t+1|^3}+\frac{3}{2(2t+1)}+C,\qquad t=x+\sqrt{x^2+x+1}.\ \square$$

VII. Интеграл биномног диференцијала

$$\int \boldsymbol{x^m(a+bx^n)^p dx}\,, m,n,p \in \mathbb{Q}, m=\frac{m_1}{m_2}, n=\frac{n_1}{n_2}, p=\frac{p_1}{p_2}$$

Интеграл биномног диференцијала се може свести на интеграл рационалне функције у сљедећим случајевима:

- $p \in \mathbb{Z}$, уводимо смјену $x=t^k, k=NZS(m_2,n_2)$
- $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, уводимо смјену $a+bx^n=t^{p_2}$,
- $p+\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, уводимо смјену $ax^{-n}+b=t^{p_2}$.

Примјер 1.13. Израчунати интеграл

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}\,dx.$$

Рјешење: $I = \int x\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^{-1/2} dx$ па је

$$m = 1, n = \frac{2}{3}, p = -\frac{1}{2}.$$

Пошто је

$$\frac{m+1}{n} = 3 \in \mathbb{Z}$$

уводимо смјену

$$1+\sqrt[3]{x^2} = t^2.$$

Добијамо

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}dx = 2tdt \Rightarrow xdx = 3t\sqrt[3]{x^4}dt \Rightarrow xdx = 3t(t^2-1)^2 dt.$$

Према томе

$$I = 3\int t(t^2-1)^2\frac{1}{t}dt = 3\int (t^4-2t^2+1)\,dt =$$

$$\frac{3}{5}t^5 - 2t^3 + 3t + C, t = \sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}.\square$$

1.2.3. Интеграција тригонометријских функција

VIII. Интеграли облика

$$\int \boldsymbol{R}(\boldsymbol{sinx}, \boldsymbol{cosx})\ , \boldsymbol{R} \text{ рационална функција}$$

Овај интеграл се своди на интеграл рационалне функције помоћу смјене

$$t = tg\frac{x}{2}.$$

Тада је

$$sinx = \frac{2t}{1+t^2}, cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

- Ако је

$$R(-sinx, cosx) = -R(sinx, cosx)$$

  може се увести смјена

$$cosx = t.$$

- Ако је
$$R(sinx, -cosx) = -R(sinx, cosx)$$
може се увести смјена
$$sinx = t.$$

- Ако је
$$R(-sinx, -cosx) = R(sinx, cosx)$$
може се увести смјена
$$tgx = t \ \ (\text{или } ctgx = t).$$
Тада је
$$sinx = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, cosx = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Примјер 1.14. Израчунати интеграл

$$\int \frac{dx}{sin^3x}.$$

Рјешење:

$$\int \frac{dx}{sin^3x} = \left| \begin{matrix} t = tg\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} = \frac{1}{4}\int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^3} dt =$$

$$\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} + t\right) dt = -\frac{1}{8t^2} + \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{8}t^2 + C =$$

$$-\frac{1}{8}ctg^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}tg^2\frac{x}{2} + C = -\frac{1}{2}ctgx + \frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

Може се увести и смјена $cosx = t$ и тада добијамо

$$\int \frac{dx}{sin^3x} = \int \frac{sinxdx}{sin^4x} = \int \frac{sinxdx}{(1-cos^2x)^2} = \left| \begin{matrix} cosx = t \\ sinxdxdx = -dt \end{matrix} \right| = -\int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt.$$

У овом случају подинтегралну функцију би требало представити у облику збира четири елементарна разломка.□

1.2.4. Интеграли који нису елементарне функције

Ако је f елементарна функција, њена примитивна функција F не мора да буде елементарна.

За неке интеграле је доказано да се не могу изразити помоћу елементарних функција и то су тзв. **„нерјешиви“ интеграли.**

То су интеграли:

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int \frac{e^x}{x^n}dx, \int \frac{x^n}{\ln x}dx, \int \frac{sinx}{x^n}dx, \int \frac{cosx}{x^n}dx, \int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2sin^2x}}, k \in (0,1).$$

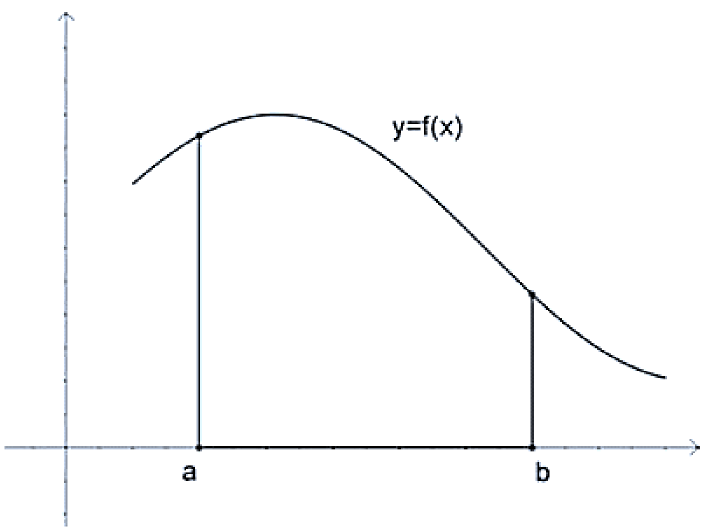
Нееелементарне функције су и интеграли биномног диференцијала осим у три случаја када се могу свести на интеграл рационалне функције. [5]

[5] Видјети Поглавље 1.2.2, Интеграција неких ирационалних функција, стр. 30

1.3. ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

До појма **одређеног интеграла** доводи нас проблем одређивања површине фигуре у равни.

Нека је функција f позитивна и непрекидна на $[a, b]$. Површина ограничена кривом $y = f(x)$, правим $x = a, x = b$ и $y = 0$ назива се **криволинијски трапез** над $[a, b]$, Слика 1.1.



Слика 1.1

Подијелимо интервал $[a, b]$ тачкама

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Тачкама x_k, $k = 0,1, \dots n$ дефинисана је једна **подјела интервала** $[a, b]$, коју означавамо са P.

Са Δx_k означимо дужину интервала $[x_k, x_{k+1}]$, тј.

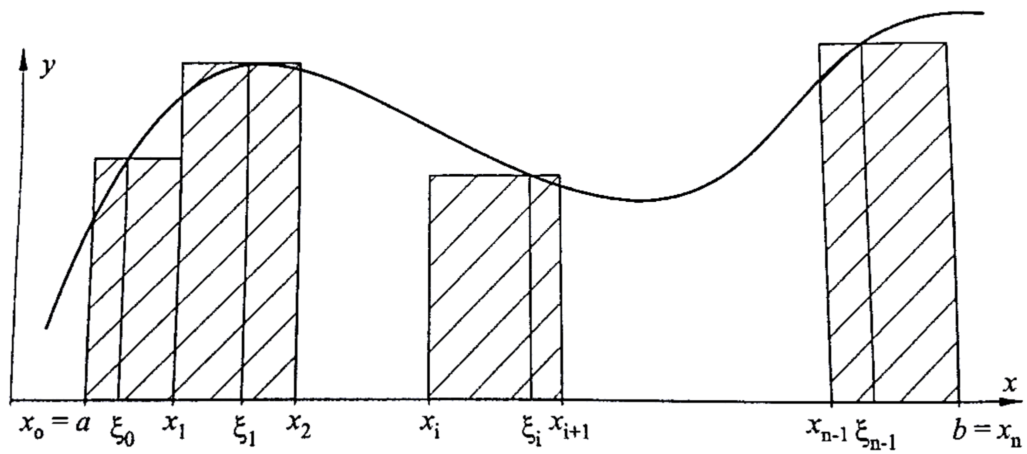
$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, k = 0,1, \dots n - 1.$$

Изаберимо у сваком сегменту $[x_k, x_{k+1}]$ произвољну тачку ξ_k, $k = 0,1, \dots n - 1$. На овај начин се добија подјела са изабраним тачкама коју означавамо са (P, ξ).

Формирајмо суму

$$\sigma(f,P,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{1.8}$$

Сума (1.8) се назива **Риманова**[6] **интегрална сума** функције f у односу на подјелу (P,ξ). Ова сума је приближно једнака површини криволинијског трапеза над $[a,b]$, Слика 1.2. Јасно је да што су разлике Δx_k мање, то интегрална сума (1.8) боље апроксимира површину криволинијског трапеза.



Слика 1.2

Зато уводимо број

$$\lambda(P)=\max_{k=0,1,\dots,n-1} \Delta x_k$$

који називамо **нормом (параметром) подјеле** P.

[6] Georg Friedrich Bernhard Riemman (1826-1866), њемачки математичар

Дефиниција 1.3. *Ако постоји гранична вриједност*

$$I = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi) \tag{1.9}$$

независно од подјеле (P, ξ), *тада се број* I *назива* ***одређеним или Римановим интегралом*** *функције* f *на* $[a, b]$ *и означава са*

$$I = \int_a^b f(x)dx. \tag{1.10}$$

За функцију f *за коју постоји одређени интеграл на* $[a, b]$, *кажемо да је* ***интеграбилна (у Римановом смислу)*** *на* $[a, b]$.

Функцију f називамо **подинтегрална функција** одређеног интеграла (1.10).

Број a је **доња** а број b **горња граница** одређеног интеграла (1.10).

Примјер 1.15. Одредити једну Риманову интегралну суму функције $f(x) = x$ на сегменту $[1,3]$.

Рјешење: Изаберимо подјелу сегмента на n једнаких дијелова.[7] Тада је $\Delta x_k = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$, па је

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = 1 + \frac{2}{n}, \quad \ldots \quad x_{n-1} = 1 + \frac{2(n-1)}{n}, \qquad x_n = 1 + \frac{2n}{n} = 3.$$

Изаберимо $\xi_k = x_k = 1 + \frac{2k}{n}, k = 0,1,\ldots n-1$ и формирајмо интегралну суму

$$\sigma(f,P,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(1 + \frac{2k}{n}\right)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n} =$$

$$\frac{2}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k\right) = \frac{2}{n}\left(n + \frac{2}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2}\right) = \frac{2(2n-1)}{n}.$$

Из $\lambda(P) = \frac{2}{n}$ добијамо $\lambda(P) \to 0$ ако и само ако $n \to \infty$. Дакле

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,\xi) = \lim_{n\to\infty}\frac{2(2n-1)}{n} = 4,$$

тј.

$$\int_1^3 x dx = 4.$$

Овај интеграл представља **површину трапеза** са основицама дужине 1 и 3 и висином 2. □

[7] Таква подјела се назива **еквидистантна подјела** сегмента

Доказаћемо да је **ограниченост функције потребан услов за њену интеграбилност**.

Теорема 1.5. *Свака интеграбилна функција на* $[a, b]$ *је ограничена на* $[a, b]$.

Доказ: Нека је функција f интеграбилна на $[a, b]$. Из Дефиниције 1.3 то значи да постоји $\delta > 0$ тако да за сваку подјелу (P, ξ) за коју је $\lambda(P) < \delta$, вриједи

$$|\sigma(f, P, \xi) - I| < 1. \tag{1.11}$$

Претпоставимо да је (P, ξ) подјела за коју вриједи (1.11). Ако претпоставимо да је функција f неограничена на $[a, b]$, то значи да је за неко $i \in \{0,1, \dots n - 1\}$ функција f неограничена на интервалу $[x_i, x_{i+1}]$. Према томе, за свако $K > 0$ постоји $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$ такво да је

$$|f(t_i)| > K.$$

Нека је

$$K = \frac{2}{\Delta x_i} + |f(\xi_i)|$$

и $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$ такво да је

$$|f(t_i)| > \frac{2}{\Delta x_i} + |f(\xi_i)|.$$

Нека је (P,ζ) подјела која се од подјеле (P,ξ) разликује само у избору тачке ξ_i која је замијењена тачком t_i.

Тада и за подјелу (P,ζ) вриједи (1.11), тј.

$$|\sigma(f,P,\zeta)-I|<1. \tag{1.12}$$

Користећи неједнакост троугла из (1.11) и (1.12) добијамо

$$|\sigma(f,P,\xi)-I| \geq |\sigma(f,P,\xi)-\sigma(f,P,\zeta|-|\sigma(f,P,\zeta)-I| =$$

$$\left|\big(f(t_i)-f(\xi_i)\big)\Delta x_i\right|-|\sigma(f,P,\zeta)-I| \geq 2-1=1$$

што је контрадикција са (1.11). Дакле, f је ограничена. □ [8]

Примјер 1.16. Функција

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x\in(0,1]\\ 0, x=0\end{cases}$$

није интеграбилна на $[0,1]$ јер није ограничена на $[0,1]$. □

[8]**Ограниченост функције је потребан, али не и довољан услов за њену интеграбилност.** Да би функција f која је ограничена на $[a,b]$ била интеграбилна на том интервалу, потребно је и довољно да се скуп тачака прекида функције f на $[a,b]$ за свако $\epsilon>0$ може покрити са пребројиво много отворених интервала чија укупна дужина није већа од ϵ.

У ускоj вези са Римановом интегралном сумом (1.8) су **Дарбуове** [9] **суме**.

Дефиниција 1.4. *Нека је функција f ограничена на $[a,b]$ и нека је P једна подјела сегмента $[a,b]$. Нека је*

$$m_k = \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x), \quad M_k = \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x), \quad k = 0,1,\dots n-1.$$

Суме

$$s(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k\,, \qquad S(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, \tag{1.13}$$

називају се редом ***доња и горња Дарбуова сума*** *функције f на $[a,b]$.*

Пошто на $[x_k, x_{k+1}], k = 0,1,\dots n-1$ вриједи

$$m_k \le f(\xi_k) \le M_k$$

лако се добија сљедећи **однос између интегралне и Дарбуових сума:**

$$s(f,P) \le \sigma(f,P,\xi) \le S(f,P). \tag{1.13$_1$}$$

[9] Jean-Gaston Darboux (1842 – 1917), француски математичар

Примјеном теореме о два жандара у (1.13_1) показује се да вриједи сљедећа теорема.

Теорема 1.6. *1) Ограничена функција f је интеграбилна на $[a, b]$ ако и само ако вриједи*

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} s(f, P) = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f, P) = I \tag{1.14}$$

независно од подјеле P. При томе је $I = \int_a^b f(x)dx$.

2) Ограничена функција f је интеграбилна на $[a, b]$ ако и само ако вриједи

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} (S(f, P) - s(f, P)) = 0 \tag{1.15}$$

независно од подјеле P. □

Непрекидне функције су интеграбилне, тј. непрекидност је довољан услов за интеграбилност функције. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 1.7. *Свака непрекидна функција на* $[a,b]$ *је интеграбилна на* $[a,b]$.

Доказ: Пошто је функција f непрекидна на $[a,b]$, постоје тачке $u_k, v_k \in [x_k, x_{k+1}]$ такве да су

$$m_k = f(u_k), \qquad M_k = f(v_k),$$

најмања, односно највећа вриједност функције на $[x_k, x_{k+1}], k = 0,1,\dots,n-1$.[10] Пошто је f и равномјерно непрекидна на $[a,b]$ [11] добијамо

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall u, v \in [a,b])|u - v| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Нека је P подјела интервала $[a,b]$ таква да вриједи $\lambda(P) < \delta$. Тада је

$$|S(f,P) - s(f,P)| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)\Delta x_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}|f(v_k) - f(u_k)|\Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\epsilon}{b-a}\Delta x_k = \epsilon.$$

Одавде добијамо да је

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}(S(f,P) - s(f,P)) = 0$$

па на основу Теореме 1.6 добијамо да је функција интеграбилна. □

[10] Вајерштрасова теорема 5.20 (Математика 1, Тема 5, Поглавље 5.3: Непрекидне функције)

[11] Теорема 5.23 (Математика 1, Тема 5, Поглавље 5.3: Непрекидне функције)

Непрекидност функције јесте довољан, али не и потребан услов за њену интеграбилност. Показује се да је и функција која има коначно много тачака прекида прве врсте на $[a,b]$ интеграбилна на $[a,b]$. Вриједи сљедећа теорема. [12]

Теорема 1.8. *Ако функција f има коначно много тачака прекида прве врсте на $[a,b]$, тада је f интеграбилна на $[a,b]$.* □

[12] Доказ ове теореме се заснива на сљедећим особинама одређеног интеграла:

1) Нека су $x_1, x_2, \dots, x_k$ тачке сегмента $[a,b]$ и функција f дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} f(x_i) \neq 0, i = 1,2, \dots k \\ 0, \text{иначе} \end{cases}.$$

Тада је $\int_a^b f(x)dx = 0$.

2) Ако је функција f интеграбилна на сегменту $[a,b]$ и ако се функција g разликује од функције f у коначно много тачака сегмента $[a,b]$, тада је и функција g интеграбилна и вриједи $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Коришћењем Теореме 1.6 лако се показује да су и **монотоне функције интеграбилне**.

Теорема 1.9. *Нека је* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *монотона функција. Тада је* f *интеграбилна на* $[a,b]$.

Доказ: Нека је функција f монотоно неопадајућа на $[a,b]$. Тада је

$$\inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)\ = f(x_k)\ \text{и}\ \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)\ = f(x_{k+1}).$$

и имамо

$$|S(f,P)-s(f,P)| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x_{k+1})-f(x_k)\big)\Delta x_k\right| \le$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x_{k+1})-f(x_k)\big)\max_{k=0,1,\ldots n-1}\Delta x_k =$$

$$\lambda(P)\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x_{k+1})-f(x_k)\big) = (f(b)-f(a))\lambda(P)$$

па је

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}(S(f,P)-s(f,P)) = 0,$$

односно f је интеграбилна функција на основу Теореме 1.6. Слично се доказује да је монотоно нерастућа функција такође интеграбилна. □

Особине одређеног интеграла даје сљедећа теорема:

Теорема 1.10. *1)* ***Особина линеарности****: ако су функције f и g интеграбилне на $[a,b]$ тада је на $[a,b]$ интеграбилна и функција $\alpha f+\beta g, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ и вриједи*

$$\int_a^b \big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

2) ***Особина адитивности****: ако је функција f интеграбилна на $[a,b]$ и $c\in(a,b)$ тада је*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

3) Ако је f интеграбилна на $[a,b]$ и $f(x)\geq 0$ за $x\in[a,b]$ тада је

$$\int_a^b f(x)dx\geq 0.$$

4) Ако су f и g интеграбилне на $[a,b]$ и ако је $f(x)\leq g(x)$ за $x\in[a,b]$, тада је

$$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx.$$

5) Ако је f интеграбилна на $[a,b]$ тада је

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx\,.$$

Доказ: 1) Линеарност одређеног интеграла слиједи из линеарности интегралних сума.

2) Ако је функција f интеграбилна на $[a,b]$, онда је она интеграбилна и на интервалима $[a,c]$ и $[c,b]$, $c \in (a,b)$.[13] Нека је дат низ подјела интервала $[a,b]$ такав да свака подјела (P,ξ) садржи c као тачку подјеле. Тада постоји $i \in \{1,2,\dots,n\}$ тако да је $c = x_i$ па за интегралну суму вриједи

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{i-1} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=i}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{1.16}$$

Прва интегрална сума на десној страни у једнакости (1.16) одговара интегралу функције f на $[a,c]$ а друга интегралу функције f на $[c,b]$, па из (1.16) слиједи особина адитивности интеграла.

3) Ако је $f(x) \geq 0$ за $x \in [a,b]$, тада су све интегралне суме ненегативне па је и њихова гранична вриједност кад норма подјеле тежи нули, такође ненегативна.

4) Из особине линеарности и особине 3) добијамо

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow g(x) - f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx.$$

[13] Ако је функција интеграбилна на сегменту $[a,b]$, онда је она интеграбилна на сваком сегменту $[\alpha,\beta]$ који је подскуп од $[a,b]$. Наиме, ако је функција интеграбилна на $[a,b]$ тада $(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)$ тако да за сваку подјелу P за коју је $\lambda(P) < \delta$ вриједи $S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$. Ако подјели P додамо тачке α и β, добијамо нову подјелу P' за коју је такође $\lambda(P') < \delta$. Ако посматрамо Дарбуове суме на $[\alpha,\beta]$, јасно је да је разлика горње и доње Дарбуове суме на $[\alpha,\beta]$ мања од ϵ, па је функција интеграбилна на $[\alpha,\beta]$.

5) Пошто је

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

из линеарности и особине 3) добијамо

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

тј.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx\,.\square$$

Примједба 1.2. У Теореми 1.10 показали смо да је интеграл ненегативне функције на $[a,b]$ такође ненегативан. Може се показати да у случају непрекидне и ненегативне функције за коју постоји тачка $c \in [a,b]$ у којој је $f(c) > 0$ вриједи

$$\int_a^b f(x)dx > 0.\square$$

Примјер 1.17. Доказати да вриједи

$$1 < \int_0^1 e^{x^2}dx < e.$$

Доказ: Пошто је $1 < e^{x^2} < e$ за $x \in (0,1)$, из Теореме 1.10 и Примједбе 1.2 добијамо

$$\int_0^1 dx < \int_0^1 e^{x^2}dx < e\int_0^1 dx \Rightarrow 1 < \int_0^1 e^{x^2}dx < e.\square$$

1.4. ТЕОРЕМА О СРЕДЊОЈ ВРИЈЕДНОСТИ. ЊУТН-ЛАЈБНИЦОВА ФОРМУЛА

1.4.1. Теорема о средњој вриједности интегралног рачуна

Теорема 1.11. (Теорема о средњој вриједности интегралног рачуна) *Нека је f непрекидна на $[a,b]$. Тада постоји $c \in (a,b)$ такво да је*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \tag{1.17}$$

Доказ: Пошто је функција f непрекидна на $[a,b]$, на основу Вајерштрасове теореме [14] постоје тачке $u, v \in [a,b]$ такве да је $m = f(u), M = f(v)$, гдје су m и M најмања, односно највећа вриједност функције на $[a,b]$, тј. за $x \in [a,b]$ је

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Из особина одређеног интеграла одавде добијамо

$$m\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\int_a^b dx \Rightarrow f(u)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(v)(b-a).$$

Ако је

$$f(u)(b-a) = \int_a^b f(x)dx \text{ или } \int_a^b f(x)dx = f(v)(b-a)$$

тада је доказ завршен.

[14] Вајерштрасова теорема 5.20 (Математика 1, Тема 5, Поглавље 5.3 Непрекидне функције)

У супротном дефинишемо функцију

$$g: [a, b] \to \mathbb{R}$$

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Функција g је непрекидна и вриједи

$$g(u) = f(u) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{f(u)(b-a) - \int_a^b f(x)dx}{b-a} < 0$$

и

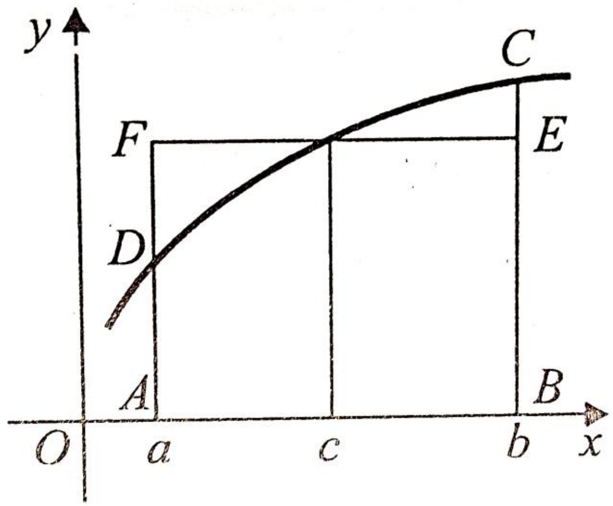
$$g(v) = f(v) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{f(v)(b-a) - \int_a^b f(x)dx}{b-a} > 0,$$

тј. функција g узима вриједности различитог знака на интервалу чије су крајње тачке u и v. На основу Теореме 5.21 [15] то значи да између тачака u и v постоји тачка c таква да је $g(c) = 0$. Одавде добијамо

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

и теорема је доказана.□

[15] Видјети Поглавље 5.3 *Непрекидне функције*, стр. 42.



Слика 1.3.

Теорема о средњој вриједности има једноставно геометријско тумачење.

На Слици 1.3 приказан је график функције $y = f(x)$ и права $y = f(c)$, $c \in (a, b)$. Једнакост (1.17) говори да су површине криволинијског трапеза $ABCD$ и правоугаоника $ABEF$ једнаке.

Коришћењем Теореме о средњој вриједности интегралног рачуна успоставља се веза између примитивне функције и одређеног интеграла.

Теорема 1.12. *Нека је* f *непрекидна на* $[a, b]$. *Тада је функција* F *дефинисана на* $[a, b]$ *са*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{1.18}$$

примитивна функција функције f.

Доказ: Из особина одређеног интерала имамо

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Коришћењем Теореме 1.11 добијамо да је

$$\int_x^{x+h} f(t)dt=(x+h-x)f(x+\theta h),\theta\in(0,1),$$

тј.

$$F(x+h)-F(x)=hf(x+\theta h).$$

Одавде добијамо

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x),$$

тј.

$$F'(x)=f(x).\square$$

1.4.2. Њутн-Лајбницова формула

Теорема 1.13. *Нека је функција* f *непрекидна на* $[a, b]$ *и* F *њена примитивна функција на* $[a, b]$. *Тада је*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{1.19}$$

Доказ: Из Теореме 1.12 добијамо да свака примитивна функција функције f има облик

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C, x \in [a, b],$$

гдје је C произвољна константа. Одавде за $x = a$ добијамо $F(a) = C$ и за $x = b$

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + C = \int_a^b f(t)dt + F(a)$$

тј. формулу (1.19).□

Примједба 1.3. Формула (1.19) обично се записује у облику

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b. \tag{1.19$_1$}$$

Примјер 1.18. Израчунати интеграле:

а) $\int_{-1}^{1} x^2 dx$, б) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx$.

Рјешење:

а) $\int_{-1}^{1} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

б) Формалном примјеном Њутн-Лајбницове формулу добили бисмо

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx = \ln|x|\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Међутим, услови за примјену ове формуле нису испуњени јер подинтегрална функција има прекид у тачки $x = 0$. Функција $f(x) = \frac{1}{x}$ није интеграбилна на $[-1,1]$ јер на том сегменту није ограничена. [16] □

[16] Видјети Примјер 1.16

1.3.3. Смјена промјенљиве у одређеном интегралу

Као и код неодређеног интеграла, основне методе интеграције у одређеном интегралу су метод смјене промјенљиве и метод парцијалне интеграције.

Теорема 1.14. (Смјена $\boldsymbol{x=\varphi(t)}$) *Нека су испуњени сљедећи услови:*

- *функција* f *непрекидна на* $[a,b]$,
- $\varphi\colon[\alpha,\beta]\to[a,b],\ \varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$,
- *функције* φ и φ' *су непрекидне на* $[\alpha,\beta]$ *и*
- *функција* $t\to f\big(\varphi(t)\big)$ *је дефинисана за све вриједности* $t\in[\alpha,\beta]$.

Тада је

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt. \tag{1.20}$$

Доказ: Из претпоставки теореме за функције f,φ и φ', добијамо да постоје примитивне функције за обје подинтегралне функције у (1.20). Ако је $\Phi(t)$ примитивна функција функције $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$, $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ и $x=\varphi(t)$, тада је

$$F'(x)=\Big(F\big(\varphi(t)\big)\Big)'=F'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)=\ f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\ =\Phi'(t).$$

Одавде добијамо да је

$$F(\varphi(t)) = \Phi(t) + C,\, t \in [\alpha, \beta].$$

Према томе

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(\alpha)) - F(\varphi(\beta)) = \Phi(\alpha) - \Phi(\beta) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,.\square$$

Слично се доказује и теорема о смјени промјенљиве $\varphi(x) = t$.

Теорема 1.15. (Смјена $\boldsymbol{\varphi(x) = t}$) *Нека су испуњени сљедећи услови:*

- *функција f је непрекидна на $[a, b]$,*
- $\varphi: [a, b] \to [\alpha, \beta], \varphi(a) = \alpha, \varphi(b) = \beta,$
- *φ је строго монотона на $[a, b]$ и има инверзну функцију $\varphi^{-1} = \psi: [\alpha, \beta] \to [a, b]$ и*
- *функција ψ има непрекидан извод на $[\alpha, \beta]$.*

Тада је

$$\int_a^b f(\varphi(x))dx = \int_\alpha^\beta f(t)\psi'(t)dt\,.\square \tag{1.20$_1$}$$

Примјер 1.19. Израчунати интеграл

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx.$$

Рјешење: Уведимо смјену

$$x=\varphi(t)=sint, t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

Функција $\varphi(t)$ испуњава све услове за смјену промјенљиве на интервалу $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ и добијамо

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-sin^2t}costdt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}cos^2tdt=$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+cos2t)dt=\frac{\pi}{2}.\square$$

Лема 1.2. Ако је f непрекидна функција на $[-a, a]$, тада вриједи

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, \text{ако је } f \text{ непарна} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \text{ако је } f \text{ парна} \end{cases}$$

Доказ: Коришћењем особине адитивности одређеног интеграла добијамо

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Ако у првом интегралу уведемо смјену $x = -t$ добијамо

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} (f(x) + f(-x))dx.$$

Ако је f парна тада је

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x) + f(-x) = 2f(x),$$

а ако је f непарна тада је

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x) + f(-x) = 0.$$

Лема је доказана. □

1.4.4. Парцијална интеграција за одређени интеграл

Теорема 1.16. *Ако функције* u *и* v *имају непрекидне изводе на* $[a, b]$, *тада важи*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \tag{1.21}$$

Доказ: Из

$$\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

примјеном Њутн-Лајбницове формуле добијамо

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = u(x)v(x)|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

тј. формулу (1.21).□

Примјер 1.20. Израчунати интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsin2xdx.$$

Рјешење:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsin2xdx = \begin{vmatrix} u = x & dv = sin2xdx \\ du = dx & v = -\frac{1}{2}cos2x \end{vmatrix} =$$

$$-\frac{x}{2}cos2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2xdx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}sin2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}. \square$$

1.5. НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ

Дефиниција одређеног интеграла односи се на случај ограничене функције и коначног интервала. Ако је интервал интеграције бесконачан или уколико је подинтегрална функција неограничена, тада говоримо о **несвојственом интегралу.**

Несвојствене интеграле на бесконачним интервалима дефинишемо на сљедећи начин:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx,$$
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)dx.$$

Несвојствене интеграле неограничених функција (ако је f неограничена само у околини тачке a или само у околини тачке b) дефинишемо на сљедећи начин:

$$\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$
$$\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Ако је подинтегрална функција неограничена у околини тачке $c \in (a, b)$, несвојствени интеграл дефинишемо са

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0+ \\ \mu \to 0+}} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\mu}^b f(x)dx \right)$$

Ако наведене граничне вриједности постоје и коначне су, кажемо да је одговарајући интеграл конвергентан. У супротном кажемо да је интеграл дивергентан.

Примјер 1.21. Испитати конвергенцију интеграла

а) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$,   б) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Рјешење:

а) $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1.$$

б) $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} (\ln x)\Big|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \ln b = +\infty. \square$$

Примјер 1.22. Испитати конвергенцију интеграла

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, б) $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$.

Рјешење:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$

б) $\int_1^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon \to 0+} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = +\infty.$ □

Примјер 1.23. Испитати конвергенцију интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}.$$

Рјешење:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} (arctgb - arctga) = \pi.$$

Дакле, интеграл је конвергентан и вриједност му је π. □

За испитивање конверегенције несвојствених интеграла користе се разни критеријуми. Без доказа наводимо један **довољан услов за конвергенцију несвојственог интеграла.**

Лема 1.3. *1) Нека је функција f неограничена за $x = b$ и нека је $|f(x)| \leq g(x), x \in [a, b)$. Ако интеграл $\int_a^b g(x)dx$ конвергира, онда конвергира и интеграл $\int_a^b f(x)dx$.*

2) Ако је $|f(x)| \leq g(x), x \in [a, +\infty)$ и ако интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ конвергира, тада конвергира и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Примјер 1.24. Испитати конверегенцију несвојственог интеграла

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Рјешење: За $1 \leq x < \infty$ вриједи неједнакост

$$e^{-x^2} \leq e^{-x}.$$

За интеграл $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ имамо

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}|_1^{\infty} = e^{-1}.$$

Одавде примјеном Леме 1.3 добијамо да и интеграл $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ конвергира.□

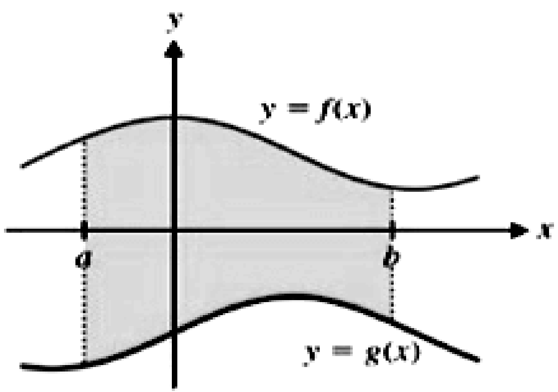
1.6. ПРИМЈЕНЕ ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

I Површина области у равни

Нека је функција f ненегативна и непрекидна на $[a,b]$. Из дефиниције одређеног интеграла видјели смо да одређени интеграл функције на $[a,b]$ представља површину криволинијског трапеза над $[a,b]$ (Слика 1.1). Дакле,

$$P = \int_a^b f(x)dx.$$

Нека су сада функције f и g непрекидне на $[a,b]$ и $g(x) \leq f(x)$ за $x \in [a,b]$, Слика 1.4. Из формуле за површину криволинијског трапеза, непосредно се добија да је површина области ограничене графицима функција $f(x)$ и $g(x)$ и правим $x = a$ и $x = b$ једнака



Слика 1.4.

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Ако је функција f дата у параметарском облику

$$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$$

тада се површина рачуна по једној од формула

$$P = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt = -\int_\alpha^\beta x(t)y'(t)dt.$$

Примјер 1.25. Израчунати површину фигуре у равни ограничену правом $y = x$ и параболом $y = 2 - x^2$.

Рјешење: Пресјечне тачке праве и параболе одређујемо из система једначина

$$y = x$$
$$y = 2 - x^2.$$

Добијамо $x_1 = -2, x_2 = 1$ и то су границе интеграције. Према томе

$$P = \int_{-2}^{1} (f(x) - g(x))dx = \int_{-2}^{1} ((2 - x^2) - x)dx = \frac{9}{2}.$$ [17] □

[17] Површину смо могли израчунати узимајући да је y независна промјенљива. Тада би било

$$P = \int_{-2}^{1} \left(y - (-\sqrt{2-y})\right) dy + \int_{1}^{2} \left(\sqrt{2-y} - (-\sqrt{2-y})\right) dy = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{2}{3}(2-y)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{-2}^{1} - \frac{4}{3}(2-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_{1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

II Дужина лука криве

Криве за које је могуће одредити дужину лука између датих тачака називају се **ректификабилне криве.**

Ако функција f има на $[a,b]$ непрекидан извод, тада је дужина лука криве између тачака чије су апсцисе a и b једнака

$$l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Ако је крива дата у параметарском облику

$$x=x(t), y=y(t), t\in[\alpha,\beta]$$

гдје су изводи $\dot{x},\dot{y}$ непрекидне функције, тада је дужина лука криве једнака

$$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt.$$

Примјер 1.26. Наћи дужину лука криве

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}.$$

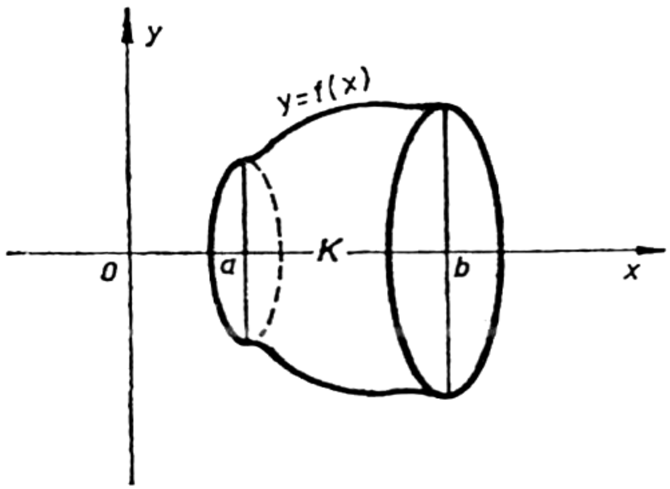
између тачака $x = 1$ и $x = e$.

Рјешење:

$$l = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^e \sqrt{x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}}\, dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right)\Bigg|_1^e = \frac{1 + e^2}{4}. \square$$

III Запремина и површина ротационог тијела



Слика 1.5

Нека је функције f непрекидна на $[a, b]$. **Запремина тијела** насталог ротацијом криве $y = f(x)$ око $x -$ осе над интервалом $[a, b]$(Слика 1.5) једнака је

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Ако је функција задата параметарски у облику

$$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$$

при чему је функција x монотона и непрекидно диференцијабилна, тада је

$$V = \pi \int_\alpha^\beta y^2(t)|\dot{x}(t)|dt.$$

Површина омотача ротационог тијела се рачуна по формули

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx,$$

а ако је функција задата у параметарском облику, при чему су функције x и y непрекидно диференцијабилне, по формули

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt.$$

Примјер 1.27. Израчунати запремину и површину лопте полупречника r.

Рјешење: Лопта настаје обртањем полукруга

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, -r \leq x \leq r$$

око $x -$ осе. Тада је

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left(r^2 x - \frac{1}{3} x^3\right)\Big|_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{1}{3} r^3\right) = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

Даље имамо

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

па је

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 4r^2 \pi . \square$$