УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 2- ПРЕДАВАЊА

Академска 2017/2018

ТЕМА 4: ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

4.1. Увод

4.2. Диференцијалне једначине првог реда

4.3. Диференцијалне једначине вишег реда

ЛИТЕРАТУРА: **Милан Јањић, Математика I, ПМФ, Бања Лука, 2001**

Момир В. Ћелић, Математика II, Машински факултет, Бања Лука, 1997[1]

Наставник: Биљана Војводић

[1] У припреми предавања коришћене су и књиге **Математичка анализа 1, Душан Аднађевић и Зоран Каделбург** (Наука, Београд 1998), **Математичка анализа**, **Милан Меркле**, Електротехнички факултет (Београд 1997) и **Математика, Милош Томић** (Свјетлост, Сарајево, 1988)

ТЕМА 4: ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

4.1. УВОД

Диференцијална једначина је једначина која садржи један или више извода непознате функције, а може садржавати и непознату функцију, као и познате функције независне промјењљиве.

Ред највишег извода који се појављује у једначини представља **ред диференцијалне једначине**.

Дефиниција 4.1. Диференцијална једначина $\boldsymbol{n}$ **−тог реда** је једначина облика

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{4.1}$$

гдје је F дата функција од $(n+2)$ промјењљиве, x независна промјењљива, $y = y(x)$ непозната функција и $y', y'', \dots, y^{(n)}$ њени изводи.

Уколико је непозната функција функција једне промјењљиве, кажемо да је диференцијална једначина **обична диференцијална једначина.** Уколико пак непозната функција зависи од двије или више промјењљивих, кажемо да је диференцијална једначина **парцијална диференцијална једначина.** У наставку разматрамо само обичне диференцијалне једначине.

Примјер 4.1. Једначина

$$xy'' + 2y' + 4xy = (5x - 2)e^{-x}$$

је обична диференцијална једначина другог реда. □

Ако се диференцијална једначина (4.1) може ријешити по $y^{(n)}$, тада се она може записати у облику

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right) \tag{4.1$_1$}$$

који називамо **нормални облик** једначине (4.1).

За једначину из Примјера 4.1 нормални облик гласи

$$y'' = -\frac{2}{x}y' - 4y + \left(5 - \frac{2}{x}\right)e^{-x}, \qquad x \neq 0.$$

Рјешење диференцијалне једначине је свака функција која ту једначину претвара у идентитет.

Дефиниција 4.2. Кажемо да функција $y = g(x)$ **рјешење** диференцијалне једначине (4.1) на интервалу I ако је она дефинисана и n пута непрекидно-диференцијабилна на I и ако вриједи

$$F\left(x, g, g', g'', \dots, g^{(n)}\right) = 0, x \in I. \tag{4.2}$$

Примјер 4.2. Функција $y = g(x) = e^{-x}$ је рјешење једначине из Примјера 4.1 на $(-\infty, +\infty)$ јер

$$g(x) = e^{-x}, \qquad g'(x) = -e^{-x}, \qquad g''(x) = e^{-x}$$

и након увршатавања добијамо

$$xe^{-x} - 2e^{-x} + 4xe^{-x} = (5x - 2)e^{-x},$$

тј. добијамо идентитет. □

За рјешење једначине облика

$$y = g(x)$$

кажемо да је **експлицитно рјешење** диференцијалне једначине (4.1).

Функција $y = e^{-x}$ је рјешење диференцијалне једначине из Примјера 4.1 у експлицитном облику.

Често се рјешење диференцијалне једначине добија у облику

$$G(x, y) = 0$$

који називамо **имплицитни** облик рјешења диференцијалне једначине (4.1).

Примјер 4.3. Рјешење диференцијалне једначине

$$yy' + x = 0$$

на интервалу $-1 < x < 1$ је функција $y = y(x)$ које је за задата имплицитно у облику

$$G(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Рјешења ове једначине можемо записати и експлицитно у облику

$$y = \sqrt{1 - x^2} \text{ и } y = -\sqrt{1 - x^2}, -1 < x < 1. \square$$

Рјешење диференцијалне једначине се може добити и у **параметарском облику:**

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \quad a < t < b.$$

Примјер 4.4. Рјешење диференцијалне једначине

$$y = (y' - 1)e^{y'}$$

је дато параметарски у облику

$$x = e^t + 1, \qquad y = (t-1)e^t, \qquad t \in (-\infty, +\infty).$$

Наиме, диференцирањем функције дате параметарски и уврштавањем у једначину добијамо

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{te^t}{e^t} = t \Rightarrow (t-1)e^t = (t-1)e^t.$$

Уочимо да се рјешење једначине може записати и експлицитно у облику

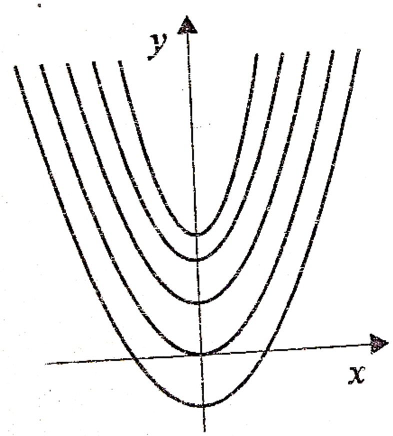
$$y = (x-1)(\ln(x-1) - 1), x > -1. \square$$

Теорија диференцијалних једначина се бави одређивањем свих рјешења једначине и испитивањем њихових особина. Поступак рјешавања диференцијалних једначина назива се **интеграција,** јер се одређивање рјешења обично своди на рачунање интеграла.

График рјешења диференцијалне једначине се назива **интегрална крива.**

Примјер 4.5. Одредити криву која пролази кроз тачку $M_0(0,1)$ и која има особину да је у свакој њеној тачки коефицијент правца тангенте једнак двострукој вриједности апсцисе тачке додира.

Рјешење: Нека је $y = y(x)$ једначина криве која има особину да је у свакој њеној тачки коефицијент правца тангенте једнак двострукој вриједности апсцисе тачке додира. Пошто је коефицијент правца тангенте једнак $tg\alpha,$ гдје је α угао који тангента на криву заклапа са позитивним дијелом x −осе, из услова задатка добијамо $tg\alpha = 2x$.



Слика 4.1

С друге стране, из геометријског значења извода, имамо да је $tg\alpha = y'(x)$.

Према томе, добијамо диференцијалну једначину

$$y' = 2x. \tag{4.3}$$

Рјешење ове једначине је фамилија кривих

$$y = x^2 + C \tag{4.3_1}$$

гдје је C произвољан реалан број, Слика 4.1.

Да бисмо из фамилије парабола (4.3_1) издвојили интегралну криву која пролази кроз тачку $M_0(0,1)$, уврстићемо почетне услове

$$x = 0 \text{ и } y = 1$$

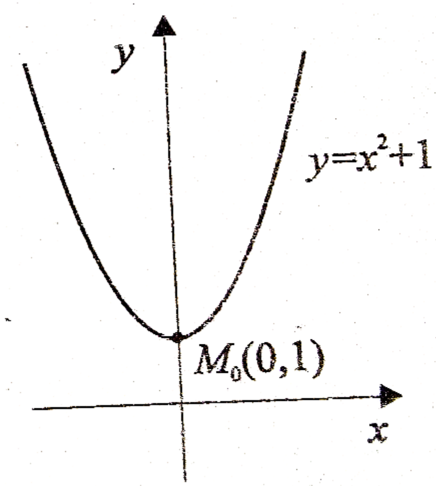
у (4.3_1). Добијамо

$$1 = C$$

па је тражена интегрална крива парабола

$$y = x^2 + 1$$

Слика 4.2.□



Слика 4.2

Ако се сва рјешења диференцијалне једначине могу изразити помоћу елементарних функција, кажемо да се та једначина може **ријешити помоћу елементарних функција**. Једначине из претходних примјера су примјери једначина које се могу ријешити помоћу елементарних функција.

Уколико се нека диференцијална једначина не може ријешити помоћу елементарних функција, али се сва њена рјешења могу изразити помоћу неодређених интеграла елементарних функција, онда кажемо да је та једначина **ријешена у квадратурама**.

Примјер 4.6. Рјешења диференцијалне једначине

$$y' = e^{-x^2}$$

нису елементарне функције, [2] али се могу изразити у облику

$$y = \int e^{-x^2} dx$$

па се дата једначина може ријешити у квадратурама. □

Ако се нека једначина може ријешити помоћу елементарних функција или у квадратурама, кажемо да се та једначина **може ријешити у коначном облику.**[3]

Посебно су нам интересантне тзв. **линеарне диференцијалне једначине** и њима ће бити посвећена посебна пажња.

Дефиниција 4.3. Линеарна диференцијална једначина $n-$тог реда је диференцијална једначина облика

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = r(x) \tag{4.4}$$

гдје су $p_k(x), k = 1,2, \dots n$ и $r(x)$ познате функције.

[2] Видјети Поглавље 1.2.4. Интеграли који нису елементарне функције у Теми 1

[3] У пракси се чешће појављују једначине које се не могу ријешити у коначном облику и за њихово рјешавање се користе приближни методи којима се бави нумеричка математика.

Многе физичке које укључују брзину промјене неке функције описују се помоћу диференцијалних једначина које представљају **математичке моделе** тих физичких појава.

Примјер 4.7. Претпоставимо да је позната количина радиоактивне материје у неком тренутку нпр. за $t = 0,$ и да треба одредити количину радиоактивне материје у неком каснијем тренутку. Ако је $m = m(t)$ количина радиоактивне материје у тренутку $t,$ тада је брзина распада материје једнака $\frac{dm}{dt}$. Експерименти показују да је брзина распада радиоактивне материје пропорционална количини те материје, па се ова законитост може записати у облику

$$\frac{dm}{dt} = km \tag{4.5}$$

гдје је k коефицијент пропорционалности који карактерише врсту радиоактивне материје. Једначина (4.5) представља математички модел процеса радиоактивног распада. Показује се да функције

$$m(t) = Ce^{kt}, C \in \mathbb{R} \tag{4.5_1}$$

представаљају рјешење једначине (4.5). Претпоставимо да је количина радиоактивне материје у тренутку $t = 0$ једнака m_0, тј. $m_0 = m(0)$. Уврштавањем овог услова у рјешење (4.5_1) добијамо $C = m_0$. Дакле функција

$$m(t) = m_0 e^{kt} \tag{4.5_2}$$

представља рјешење једначине (4.5) које задовољава почетни услов $m_0 = m(0)$. Функција (4.5_2) описује количину радиоактивне материје у произвољном тренутку t. □

4.2. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГ РЕДА

Диференцијална једначина првог реда је једначина облика

$$F(x, y, y') = 0 \tag{4.6}$$

при чему се извод y' обавезно јавља у диференцијалној једначини.

Ако се једначина (4.6) може ријешити по y', записујемо је у **нормалном облику**

$$y' = f(x, y). \tag{4.7}$$

Диференцијалне једначине првог реда могу имати више од једног рјешења. Видјели смо да диференцијална једначина првог реда из Примјера 4.5 има бесконачно много рјешења облика $y = x^2 + C$, гдје је C произвољан реалан број.

Могућност да се сва рјешења једначине запишу помоћу једне формуле доводи до појма општег рјешења једначине, које би требало да садржи сва рјешења те једначине. Показује се међутим да је често немогуће доказати да нека формула укључује сва рјешења једначине. Зато се уводе разне дефиниције општег рјешења једначине.

Дефиниција 4.4. Кажемо да је фамилија функција

$$y = g(x, C)$$

опште рјешење диференцијалне једначине (4.6) ако постоји скуп $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ такав да за сваку фиксирану вриједност $C \in A$ функција

$$y = \tilde{g}(x) = g(x, C)$$

представља рјешење диференцијалне једначине (4.6).

Дакле, опште рјешење диференцијалне једначине првог реда представља фамилију рјешења која зависе од једног параметра.

Рјешење диференцијалне једначине из Примјера 4.5 дато са (4.3_1) је опште рјешење једначине (4.3), при чему је $A = \mathbb{R}$. Обично ће скуп вриједности параметра C бити скуп $\mathbb{R}$ и говорићемо да је C произвољан реалан број.

Често се опште рјешење диференцијалне једначине може добити само у **имплицитном облику**

$$G(x, y, C) = 0$$

или у **параметарском облику**

$$x = x(t, C), \quad y = y(t, C), \qquad a < t < b.$$

Дефиниција 4.5. Рјешење диференцијалне једначине које се добија из општег рјешења за неку вриједност параметра C (укључујући и $C = \pm\infty$) се назива **партикуларно рјешење.**

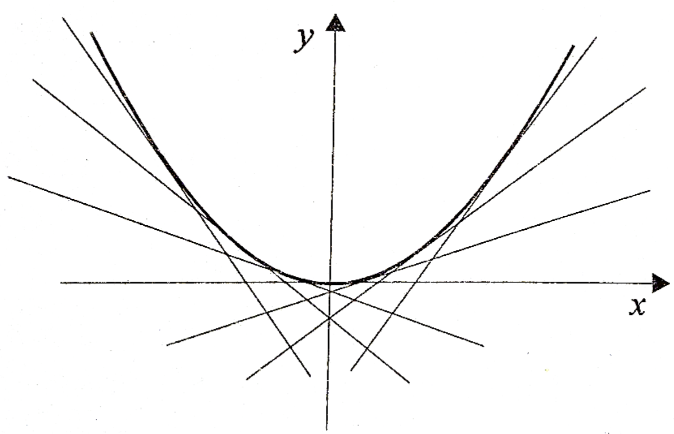
Рјешење диференцијалне једначине из Примјера 4.5 дато са (4.3_1) је опште рјешење једначине које садржи сва рјешења те једначине. Међутим, **опште рјешење не мора да садржи сва рјешења једначине**.

Примјер 4.8. Опште рјешење једначине

$$y'^2 - xy' + y = 0$$

је фамилија правих

$$y = Cx - C^2.$$



Слика 4.3

Рјешење ове једначине је и функција

$$y = \frac{x^2}{4}$$

која се не може добити из општег рјешења ни за једну вриједност параметра C, укључујући и $C = \pm\infty$, Слика 4.3. □

Зато уводимо појам сингуларног рјешења.

Дефиниција 4.6. Рјешење једначине које се не може добити из општег ни за једну вриједност параметра C, укључујући и $C = \pm\infty$, назива се **сингуларно рјешење једначине**.

Рјешење

$$y = \frac{x^2}{4}$$

је сингуларно рјешење диференцијалне једначине из Примјера 4.8.

Сингуларна рјешења се ријетко јављају у инжењерским задацима. Тако нпр. линеарне диференцијалне једначине немају сингуларних рјешења.

При рјешавању диференцијалних једначина обично тражимо неко партикуларно рјешење које има одређену вриједност за дату вриједност независне промјенљиве. Такав задатак се назива **Кошијев задатак.**

Дефиниција 4.7. Кошијев задатак за диференцијалну једначину првог реда у нормалном облику гласи:

Наћи оно рјешење диференцијалне једначине

$$y' = f(x, y) \tag{4.8}$$

које задовољава додатни услов

$$y(x_0) = y_0 \tag{4.8$_1$}$$

гдје су x_0 и y_0 дате вриједности.

Услов (4.8$_1$) се назива **почетни услов,** [4] а цијели задатак се назива **почетни задатак**.

Геометријски, ријешити Кошијев задатак (4.8)-(4.8$_1$) значи одредити интегралну криву диференцијалне једначине (4.8) која пролази кроз тачку (x_0, y_0).

Посебно ће нас занимати услови за постојање и јединственост рјешења Кошијевог задатка. Прије тога размотрићемо методе за рјешавање диференцијалних једначина првог реда које се могу ријешити у коначном облику. При томе, не постоји универзалан метод за рјешавање већ је начин рјешавања условљен типом диференцијалне једначине.

[4] Услов (4.8$_1$) представља стање неке појаве описане функцијом $y(x)$ у **почетном тренутку** $x = x_0$ и зато се назива почетни услов.

4.2.1. Непотпуне једначине

Непотпуна диференцијална једначина је једначина облика

$$y' = f(x) \tag{4.9}$$

гдје је f дата непрекидна функција на интервалу I.

Сва рјешења једначине (4.9) се могу записати у облику

$$y = \int f(x)dx,$$

односно у облику

$$y = F(x) + C \tag{4.9$_1$}$$

гдје је F примитивна функција функције f и C произвољана реалан број.

Формулом (4.9$_1$) је дато **опште рјешење** једначине (4.9).

Ако за примитивну функцију узмемо интеграл са промјенљивом горњом границом, добијамо опште рјешење једначине (4.9) у облику

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C \tag{4.9$_2$}$$

гдје је x_0 фиксиран број из интервала I.

Пошто из (4.9$_2$) за $x = x_0$ добијамо $y(x_0) = C$, опште рјешење једначине (4.9) можемо писати у облику

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + y_0 \tag{4.9$_3$}$$

гдје је $y(x_0) = y_0$.

Примјер 4.9. Одредити опште рјешење једначине

$$y' = 1 + cosx.$$

Рјешење: Функција $f(x) = 1 + cosx$ је непрекидна за свако x па је и интеграбилна на $\mathbb{R}$. Опште рјешење једначине је

$$y = \int (1 + cosx)dx = x + sinx + C, C \in \mathbb{R}. \square$$

4.2.2. Диференцијалне једначине са раздвојеним промјенљивим

Једначина облика

$$g(y)dy = f(x)dx \tag{4.10}$$

се назива **диференцијална једначина са раздвојеним промјенљивим**.

Интеграцијом лијеве и десне стране једначине (4.10) добијамо

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C. \tag{4.10_1}$$

Ако претпоставимо да су функције f и g непрекидне, тада постоје интеграли у (4.10_1) и њиховим израчунавањем се добија опште рјешење једначине (4.10).

Примјер 4.10. Одредити опште рјешење једначине

$$y' = -2xy.$$

Рјешење: Имамо

$$\frac{dy}{y} = -2xdx, y \neq 0$$

одакле интеграцијом добијамо

$$\ln|y| = -x^2 + \tilde{C}, \tilde{C} \in \mathbb{R}.$$

Одавде је

$$|y| = e^{-x^2+\tilde{C}}.$$

Ако ставимо $e^{\tilde{C}} = |C|, C \neq 0$ добијамо

$$|y| = |C|e^{-x^2},$$

тј.

$$y = Ce^{-x^2}, \ \ C \neq 0.$$

Пошто смо у току рјешавања диференцијалне једначине претпоставили да је $y \neq 0$, провјеравамо да ли је $y = 0$ рјешење једначине.

Уврштавањем $y = 0$ у диференцијалну једначину добијамо идентитет, што значи да је $y = 0$ такође рјешење једначине. Ово рјешење добијамо из рјешења $y = Ce^{-x^2}$ за $C = 0$. Према томе, опште рјешење једначине је

$$y = Ce^{-x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}. \square$$

Примјер 4.11. Ријешити Кошијев задатак

$$(1 + x^2)dy + ydx = 0, \qquad y(1) = 1.$$

Рјешење: Раздвајањем промјенљивих добијамо

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2}, y \neq 0.$$

Одавде је

$$\ln|y| = -arctgx + \tilde{C}, \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

односно

$$|y| = e^{-arctgx+\tilde{C}}.$$

Као и претходном примјеру, стављајући $e^{\tilde{C}} = |C|,\ C \neq 0$ добијамо опште рјешење

$$y = Ce^{-arctgx}, \qquad C \neq 0.$$

Уврштавањем $y = 0$ у једначину добијамо да је и функција $y = 0$ рјешење једначине, па је опште рјешење једначине

$$y = Ce^{-arctgx}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Уврштавајући у опште рјешење почетне услове $x = 1, y = 1$ добијамо

$$1 = Ce^{-arctg1} = Ce^{-\frac{\pi}{4}} \Rightarrow C = e^{\frac{\pi}{4}}.$$

Према томе, партикуларно рјешење које задовољава услов $y(1) = 1$ је

$$y = e^{\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-arctgx} = e^{\frac{\pi}{4}-arctgx}. \ \square$$

Примјер 4.12. Одредити партикуларна рјешења једначине

$$y' sinx = y\ln y$$

која задовољавају почетне услове

а) $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e,$ б)$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Рјешење: Раздвајањем промјенљивих добијамо

$$\frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{sinx}, y > 0.$$

Даље је

$$\ln|\ln y| = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \ln|C|, C \neq 0,$$

одакле добијамо опште рјешење

$$\ln y = Ctg\frac{x}{2}, C \neq 0.$$

Ако је $C = 0$ добијамо $\ln y = 0 \Rightarrow y = 1$ и уврштавањем у диференцијалну једначину добијамо да је $y = 1$ такође рјешење дате диференцијалне једначине. Дакле,

$$\ln y = Ctg\frac{x}{2}, C \in \mathbb{R}$$

је опште рјешење једначине.

а) Уврштавајући у опште рјешење почетне услове $x = \frac{\pi}{2}, y = e$ добијамо

$$1 = Ctg\frac{\pi}{4} \Rightarrow C = 1.$$

Партикуларно рјешење које задовољава почетни услов $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$ је

$$\ln y = tg\frac{x}{2} \Rightarrow y = e^{tg\frac{x}{2}}.$$

б) Уврштавајући у опште рјешење почетне услове $x = \frac{\pi}{2}, y = 1$ добијамо

$$0 = Ctg\frac{\pi}{4} \Rightarrow C = 0.$$

Партикуларно рјешење које задовољава почетни услов $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ је

$$\ln y = 0 \Rightarrow y = 1. \square$$

4.2.3. Једначине које се своде на једначине са раздвојеним промјенљивим

I Једначина облика $\boldsymbol{y' = f(ax + by + c)}$

Једначина облика
$$y' = f(ax + by + c) \tag{4.11}$$
гдје су a, b, c константе, своди се на једначину са раздвојеним промјенљивим.

Ако је $a = 0$ или $b = 0$ једначина (4.11) је једначина са раздвојеним промјенљивим. Зато претпостављамо да је $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Уводимо смјену
$$ax + by + c = u \tag{4.11$_1$}$$
гдје је $u = u(x)$ функција промјенљиве x. Диференцирањем у (4.11_1) добијамо
$$a + by' = u' \Rightarrow y' = \frac{u' - a}{b}.$$
Увртавањем у (4.11) добијамо
$$\frac{u' - a}{b} = f(u)$$
тј. једначину са раздвојеним промјенљивим
$$u' = bf(u) + a. \tag{4.11$_2$}$$

Из (4.11$_2$) добијамо

$$\frac{du}{bf(u)+a} = dx, \;\; bf(u)+a \neq 0$$

одакле интеграцијом долазимо до општег рјешења.

Ако је

$$bf(u)+a=0$$

тада једначина (4.11$_2$) постаје

$$u' = 0$$

одакле добијамо

$$u = C.$$

Из услова

$$bf(u)+a=0$$

добијамо да је

$$bf(C)+a=0.$$

Према томе, рјешење једначине (4.11) у том случају је

$$y = \frac{C-c}{b} - \frac{a}{b}x$$

гдје је

$$bf(C)+a=0.$$

Примјер 4.13. Одредити опште рјешење једначине

$$y' = 2\sqrt{y-x} + 1, \qquad y \geq x, \qquad y' \geq 1\,.$$

Рјешење: Ово је једначина облика (4.11) за $a = -1, b = 1, c = 0$. Уводимо смјену

$$y - x = u \Rightarrow y' = u' + 1.$$

Увршттавањем у диференцијалну једначину добијамо једначину са раздвојеним промјенљивим

$$u' = 2\sqrt{u}, \qquad u \geq 0, \qquad u' \geq 0.$$

Имамо

$$\frac{du}{2\sqrt{u}} = dx, \qquad u \neq 0$$

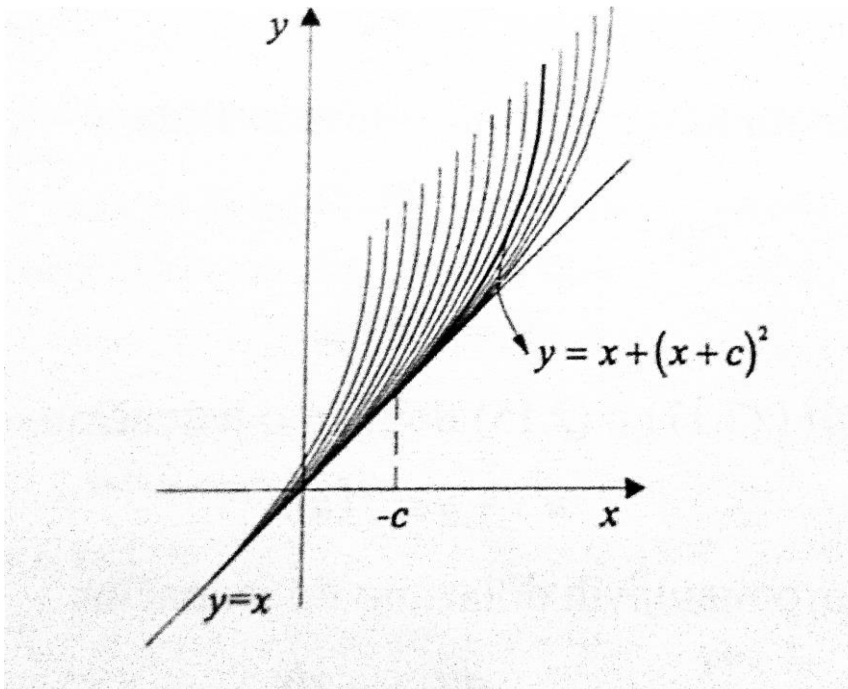
одакле добијамо

$$\sqrt{u} = x + C$$

тј. опште рјешење једначине

$$u = (x + C)^2, \qquad x \geq -C.$$

Ако је $u = 0$ увршттавањем у једначину добијамо идентитет. Дакле, $u = 0$ јесте рјешење једначине, али се ово рјешење не може добити из општег ни за једну вриједност константе C, укључујући и $C = \pm\infty$. Зато је $u = 0$ сингуларно рјешење једначине.



Слика 4.4.

Враћањем на промјенљиву y добијамо **опште рјешење** једначине

$$y = (x + C)^2 + x, \qquad x \geq -C,$$

и **сингуларно рјешење**

$$y = x,$$

Слика 4.4.□

II Хомогена једначина

Једначина облика

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4.12}$$

се назива **хомогена једначина.**

За рјешавање једначине (4.12) уводимо смјену

$$\frac{y}{x} = u \tag{4.12$_1$}$$

гдје је $u = u(x)$ функција промјенљиве x. Из $y = ux$ добијамо

$$y' = u + u'x.$$

Уврштавањем у (4.12) добијамо једначину

$$u'x = f(u) - u. \tag{4.12$_2$}$$

Раздвајањем промјенљивих добијамо

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}, \quad x \neq 0, \qquad f(u) \neq u.$$

Рјешавањем ове једначине и враћањем на смјену (4.12_1) добијамо опште рјешење једначине (4.12).

Ако је

$$f(u) - u = 0$$

тада је

$$u'x = 0 \Rightarrow u = c.$$

У овом случају опште рјешење једначине је

$$y = Cx.$$

Ако је $f(u) - u = 0$ за $u = u_0 = const,$ тада је $u = u_0$ рјешење једначине (4.12_2), па је тада

$$y = u_0 x$$

рјешење једначине (4.12).

Примјер 4.14. Наћи опште рјешење диференцијалне једначине

$$y' = \frac{2x + y}{x - 2y}.$$

Одредити оно рјешење диференцијалне једначине које задовољава почетни услов $y(1) = 0$.

Рјешење: Пошто је

$$y' = \frac{2 + \frac{y}{x}}{1 - 2\frac{y}{x}}$$

дата једначина је хомогена. Увођењем смјене

$$\frac{y}{x} = u, \qquad y' = u + u'x$$

добијамо

$$u + u'x = \frac{2 + u}{1 - 2u} \Rightarrow u'x = 2\frac{1 + u^2}{1 - 2u},$$

тј.

$$\frac{1 - 2u}{1 + u^2} du = 2\frac{dx}{x}, \quad x \neq 0.$$

Рјешење ове једначине је

$$e^{arctgu} = Cx^2(1 + u^2), C > 0.$$

Дакле, опште рјешење једначине је

$$e^{arctg\frac{y}{x}} = C(x^2 + y^2), x \neq 0, C > 0.$$

Уврштавањем почетних услова $x = 1, y = 0$ у опште рјешење добијамо $C = 1$ па је партикуларно рјешење једначине

$$e^{arctg\frac{y}{x}} = x^2 + y^2, x \neq 0. \square$$

III Једначине које се своде на хомогене

Једначина облика

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{dx + ey + f}\right) \tag{4.13}$$

гдје су a, b, c, d, e, f реалне константе, одговарајућим смјенама своди се или на једначину облика (4.11) или на хомогену једначину.

Ако је $c = f = 0$ тада је (4.13) хомогена једначина. Зато разматрамо случај када је бар једна од константи c и f различита од нула ($|c| + |f| \neq 0$).

Разликујемо два случаја:

1. Нека је $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = 0.$

Претпостављамо да је бар једна од константи a и d различита од нула и бар једна од константи b и e различита од нула. Ако је нпр. $a \neq 0$ и $b \neq 0,$ тада из особина детерминанти добијамо

$$\frac{d}{a} = \frac{e}{b}$$

па је $d = ta$ и $e = tb$ за неко $t \in \mathbb{R}$. Одавде добијамо да је $dx + ey = t(ax + by)$.

Тада једначина (4.13) има облик

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{t(ax + by) + f}\right) = g(ax + by).$$

Према томе у овом случају се једначина (4.13) своди на једначину облика (4.11), која се даље смјеном

$$u = ax + by$$

$u = u(x)$ функција промјењљиве x, своди на једначину са раздвојеним промјенљивим.

2. Нека је $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0.$

Тада систем

$$ax + by + c = 0$$

$$dx + ey + f = 0$$

има јединствено рјешење (α, β). Уводимо смјену

$$x = u + \alpha, \qquad y = v + \beta$$

и једначину (4.13) сводимо на једначину

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv}{du + ev}\right) = g\left(\frac{u}{v}\right)$$

тј. на хомогену једначину.

Примјер 4.15. Наћи опште рјешење диференцијалне једначине

$$y' = -\frac{x+y+2}{2x+2y-1}.$$

Рјешење: Пошто је $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, уводимо смјену $y + x = u$. Тада је

$$y' = -1 + u'$$

па добијамо

$$u' = \frac{u-3}{2u-1}.$$

Раздвајањем промјенљивих добијамо

$$\frac{2u-1}{u-3}du = dx, u \neq 3.$$

Рјешење ове једначине је

$$2u + 5\ln|u-3| = x + C, C \in \mathbb{R}, u \neq 3.$$

Уврштавањем у једначину добијамо и да је $u = 3$ рјешење једначине. Ово рјешење се добија из општег за $C = -\infty$. Према томе, опште рјешење једначине је

$$5\ln|x+y-3| + x + 2y = C, C \in \mathbb{R}$$

док се рјешење $y = 3 - x$ добија из општег за $C = -\infty$.

Примјер 4.16. Одредити интегралну криву једначине

$$y' = \frac{x+y-2}{y-x-4}$$

која пролази кроз тачку $M(1,1)$.

Рјешење: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Рјешење система

$$x+y-2=0$$

$$y-x-4=0$$

je $(\alpha,\beta)=(-1,3)$ па уводимо смјену

$$x=u-1, \qquad y=v+3.$$

Одавде је

$$dx=du, dy=dv \Rightarrow \frac{dv}{du}=\frac{dy}{dx}.$$

Уврштавањем добијамо хомогену једначину

$$\frac{dv}{du}=\frac{u+v}{v-u}=\frac{1+\frac{v}{u}}{\frac{v}{u}-1}.$$

Смјеном

$$\frac{v}{u} = t, \qquad v' = t + ut'$$

$t = t(u)$ функција промјенљиве u, добијамо једначину

$$ut' = \frac{-t^2 + 2t + 1}{t - 1}.$$

Раздвајањем промјенљивих добијамо

$$\frac{t-1}{t^2 - 2t - 1}dt = -\frac{du}{u}, \qquad t^2 - 2t - 1 \neq 0, \qquad u \neq 0.$$

Опште рјешење ове једначине је

$$(t^2 - 2t - 1)u^2 = C, C \neq 0.$$

За $C = 0$ добија се $t = 1 \pm \sqrt{2}$ и лако се провјерава да су ове функције такође рјешење једначине. Према томе опште рјешење једначине је

$$v^2 - 2uv - u^2 = C, C \in \mathbb{R},$$

односно

$$y^2 - x^2 - 2xy - 8y + 4x = C, C \in \mathbb{R}.$$

За $x = 1, y = 1$ добијамо $C = -6$ па је партикуларно рјешење

$$y^2 - x^2 - 2xy - 8y + 4x + 6 = 0. \square$$

4.2.4. Једначине са тоталним диференцијалом

Једначина облика

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{4.14}$$

се назива **једначина са тоталним диференцијалом** ако израз $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ представља тотални диференцијал неке функције $u = u(x,y)$, тј. ако је

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du,$$

гдје је тотални диференцијал функције u

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Ако је (4.14) једначина са тоталним диференцијалом, тада је можемо записати у облику

$$du = 0$$

па је њено опште рјешење

$$u(x,y) = C, C \in \mathbb{R}.$$

Према томе, рјешавање једначине са тоталним диференцијалом се своди на одређивање функције $u(x,y)$.

Примјер 4.17. Једначина

$$(y^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$$

је једначина са тоталним диференцијалом јер је израз

$$(y^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2xy)dy$$

тотални диференцијал функције

$$u(x, y) = x^2y + xy^2,$$

тј.

$$(y^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2xy)dy = d(x^2y + xy^2).$$

Према томе једначину записујемо у облику

$$d(x^2y + xy^2) = 0$$

па је опште рјешење једначине

$$x^2y + xy^2 = C, \qquad C \in \mathbb{R}. \square$$

Сада разматрамо услове под којим ће диференцијална једначина бити једначина са тоталним диференцијалом. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 4.1. *Нека су функције* $M(x,y)$ и $N(x,y)$ *непрекидно-диференцијабилне у области* D. *Да би једначина (4.14) била једначина са тоталним диференцијалом, потребно је и довољно да вриједи*

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (4.14_1)$$

Доказ: 1) Покажимо да је услов (4.14_1) потребан, тј. претпоставимо да је једначина (4.14) једначина са тоталним диференцијалом. Тада је

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=du$$

за неку функцију u. Тада је

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)\text{ и }\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y).$$

Одавде добијамо

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\quad\text{и}\quad\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

Пошто претпостављамо да су функције $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$ непрекидне, то значи да су мјешовити изводи функције u једнаки. Према томе, вриједи услов (4.14_1) па смо доказали да је он потребан.

2) Покажимо да је услов (4.14_1) довољан. Дакле претпостављамо да вриједи (4.14_1) и треба показати да постоји функција u таква да је

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du.$$

Нека је (x_0, y_0) фиксирана и (x,y) произвољна тачка из области D. Интеграцијом у једнакости $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$ по првој промјенљивој у границама од x_0 до x добијамо

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + g(y) \tag{4.14_2}$$

гдје је g произвољна функција од y. Ову функцију одређујемо из услова $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$. Диференцирањем по y у (4.14_2) добијамо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(t,y)}{\partial y} dt + g'(y).$$

Из услова (4.14_1) добијамо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(t,y)}{\partial t} dt + g'(y) = N(x,y) - N(x_0,y) + g'(y).$$

Према томе имамо

$$N(x,y) - N(x_0,y) + g'(y) = N(x,y) \Rightarrow g'(y) = N(x_0,y).$$

Одавде добијамо

$$g(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, t)dt + C.$$

Дакле, за функцију

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt + C \tag{4.14$_3$}$$

вриједи

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du$$

па смо показали смо да је једначина (4.14) једначина са тоталним диференцијалом. Теорема је доказана.□

Примјер 4.18. Наћи опште рјешење једначине

$$(e^x + y + siny)dx + (e^y + x + xcosy)dy = 0.$$

Рјешење: Из

$$M(x,y) = e^x + y + siny, \quad N(x,y) = e^y + x + xcosy.$$

добијамо

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + cosy \;\; \text{и} \;\; \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + cosy.$$

Испуњен је услов (4.14_1) па је на основу Теореме 4.1 дата једначина једначина са тоталним диференцијалом. Дакле постоји функција u таква да је

$$(e^x + y + siny)dx + (e^y + x + xcosy)dy = du.$$

Функцију u одређујемо из (4.14_3), при чему можемо узети $x_0 = y_0 = 0$. Дакле,

$$u(x,y) = \int_0^x (e^t + y + siny)dt + \int_0^y e^t dt + C,$$

тј.

$$u(x,y) = e^x - 1 + yx + xsiny + e^y - 1 + C.$$

Опште рјешење једначине је

$$e^x + e^y + xy + xsiny = C. \square$$

Интеграциони фактор

У неким случајевима се диференцијална једначина

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{4.15}$$

која није једначина са тоталним диференцијалом, може множењем са погодно изабраном функцијом $\lambda(x,y)$ свести на диференцијалну једначину са тоталним диференцијалом.

У том случају се функција $\lambda(x,y)$ зове **интеграциони фактор** једначине (4.15).

Примјер 4.19. Једначина

$$\frac{x}{y}dx + dy = 0$$

није једначина са тоталним диференцијалом. Међутим, множењем једначине са

$$\lambda(x,y) = y$$

добијамо једначину

$$xdx + ydy = 0$$

која јесте једначина са тоталним диференцијалом.□

Сада ћемо показати како одређујемо интеграциони фактор $\lambda(x, y)$.

Множењем једначине (4.15) са интеграционим фактором $\lambda(x, y)$ добијамо диференцијалну једначину са тоталним диференцијалом

$$\lambda(x, y)M(x, y)dx + \lambda(x, y)N(x, y)dy = 0.$$

Користећи Теорему 4.1 и услов (4.14_1) добијамо

$$\frac{\partial(\lambda M)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda N)}{\partial x},$$

тј.

$$\lambda\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \lambda\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \lambda}{\partial x}. \tag{4.15$_1$}$$

Дакле, да бисмо одредили интеграциони фактор, треба ријешити једначину (4.15_1) што је у неким случајевима теже него ријешити саму једначину. Зато ћемо разматрати специјалне случајеве када се рјешавање једначине (4.15_1) поједностављује.

Ако претпоставимо да је интеграциони фактор функција једне промјенљиве $\lambda = \lambda(t)$, гдје је $t = t(x, y)$ дата функција, тада једначина (4.15₁) постаје

$$\lambda \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial t}{\partial y} = \lambda \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial t}{\partial x},$$

односно

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N \dfrac{\partial t}{\partial x} - M \dfrac{\partial t}{\partial y}}. \tag{4.15$_2$}$$

Ако је израз са десне стране у (4.15₂) функција промјенљиве t, нпр. $\mu(t)$ тада се може одредити интеграциони фактор λ. Тада имамо диференцијалну једначину

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \mu(t) dt$$

па је

$$\lambda = e^{\int \mu(t) dt}. \tag{4.15$_3$}$$

Специјално, ако је $t = x$ тада из (4.15_2) добијамо

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} \tag{4.15$_4$}$$

па једначина има **интеграциони фактор облика $\boldsymbol{\lambda = \lambda(x)}$** ако је десна страна једначине (4.15_4) функција промјенљиве x.

Ако је $t = y$ тада из (4.15_2) добијамо

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dy} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}. \tag{4.15$_5$}$$

па једначина има **интеграциони фактор облика $\boldsymbol{\lambda = \lambda(y)}$** ако је десна страна једначине (4.15_5) функција промјенљиве y.

Примјер 4.20. Ријешити једначину

$$(4x+3y^2)dx+2xydy=0.$$

Рјешење: Пошто је

$$\frac{\partial M}{\partial y}=6y,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=2y$$

дата једначина није са тоталним диференцијалом. Провјеримо да ли она има интеграциони фактор облика $\lambda=\lambda(x)$. Уврштавањем у (4.15_4) добијамо

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dx}=\frac{4y}{2xy}=\frac{2}{x}.$$

Рјешавањем ове диференцијалне једначине добијамо

$$\lambda=Cx^2, C\in\mathbb{R}\,.$$

Довољно је узети једно партикуларно рјешење, нпр.

$$\lambda=x^2.$$

Према томе, диференцијална једначина

$$(4x^3+3x^2y^2)dx+2x^3ydy=0$$

је једначина са тоталним диференцијалом. Њено опште рјешење је

$$x^4+x^3y^2=C.\square$$

4.2.5. Линеарне диференцијалне једначине

Једначина облика

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{4.16}$$

гдје су $p(x)$ и $q(x)$ дате функције, назива се **линеарна диференцијална једначина**.

Ако је $q(x) = 0$ кажемо да је једначина (4.16) **хомогена.** У супротном, кажемо да једначина (4.16) **нехомогена.**

За одређивање општег рјешења једначине (4.16) прво одређујемо рјешење хомогене једначине

$$y' + p(x)y = 0. \tag{4.16$_1$}$$

Раздвајањем промнјељивих добијамо

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx, y \neq 0$$

тј.

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|, C \neq 0.$$

Одавде је

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, C \neq 0.$$

Пошто је и $y = 0$ рјешење једначине (4.16_1), њено опште рјешење записујемо у облику

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, C \in \mathbb{R}. \tag{4.16_2}$$

Формула (4.16_2) садржи сва рјешења једначине (4.16_1) тако да она нема сингуларних рјешења.

Опште рјешење једначине (4.16) одређујемо **Лагранжовим методом или методом варијације параметра.** То значи да опште рјешење једначине тражимо у облику

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{4.16_3}$$

гдје је $C(x)$ непрекидно-диференцијабилна функција.

Диференцирањем у (4.16_3) и уврштавањем у једначину (4.16) добијамо

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

па је

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Према томе

$$C(x) = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C. \qquad (4.16_4)$$

Опште рјешење линеарне диференцијалне једначине (4.16) је

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx\right), C \in \mathbb{R}. \qquad (4.17)$$

Примјер 4.21. Ријешити Кошијев задатак

$$y' sinx - ycosx = 1, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Рјешење: Имамо

$$y' - yctgx = \frac{1}{sinx}.$$

Из формуле (4.17) добијамо опште рјешење

$$y = e^{\int \frac{cosx}{sinx}dx}\left(C + \int \frac{1}{sinx} e^{-\int \frac{cosx}{sinx}dx} dx\right) = e^{\ln|sinx|}\left(C + \int \frac{1}{sinx} e^{-\ln|sinx|} dx\right) =$$

$$sinx\left(C + \int \frac{1}{sin^2 x} dx\right) = sinx(C - ctgx) = Csinx - cosx, C \in \mathbb{R}.$$

Из почетног услова добијамо $C = 0$ па је рјешење Кошијевог задатка $y = -cosx.$ □

4.2.6. Једначине које се своде на линеарне диференцијалне једначине

I **Линеарна једначина у односу на инверзну функцију**

Једначина облика

$$y' = \frac{R(y)}{P(y)x + Q(y)} \tag{4.18}$$

гдје су $P(y), Q(y)$ и $R(y)$ дате функције, је **линеарна диференцијална једначина у односу на инверзну функцију** $x(y)$ (када она постоји).

Из $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ и (4.18) добијамо

$$\frac{1}{x'_y} = \frac{R(y)}{P(y)x + Q(y)} \Rightarrow x'_y - \frac{P(y)}{R(y)}x = \frac{Q(y)}{R(y)}.$$

Из (4.17) добијамо опште рјешење једначине (4.18) у облику

$$x = e^{-\int \frac{P(y)}{R(y)}dy}\left(C + \int \frac{Q(y)}{R(y)} e^{\int \frac{P(y)}{R(y)}dy} dy\right), C \in \mathbb{R}. \tag{4.18$_1$}$$

Примјер 4.22. Наћи опште рјешење једначине

$$y' = \frac{1}{2xy + y^3}.$$

Рјешење: Имамо

$$x' - 2xy = y^3$$

па је опште рјешење

$$x = e^{2\int y dy}\left(C + \int y^3 e^{\int y dy} dy\right) = e^{y^2}\left(C + \int y^3 e^{-y^2} dy\right), C \in \mathbb{R}.$$

Увођењем смјене $-y^2 = t$ у горњем интегралу, а затим парцијалне интеграције, добијамо

$$x = Ce^{y^2} - \frac{1}{2}(1 + y^2). \square$$

II Бернулијева једначина

Једначина облика

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1) \tag{4.19}$$

гдје су $p(x)$ и $q(x)$ дате функције, назива се **Бернулијева диференцијална једначина.**

Очигледно је једначина (4.19) за $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ линеарна једначина.

Дијелећи једначину (4.19) са y^{α} добијамо

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + p(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}} = q(x).$$

Уводећи смјену

$$\frac{1}{y^{\alpha-1}} = z$$

односно

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

добијамо

$$\frac{(1-\alpha)y'}{y^{\alpha}} = z' \Rightarrow \frac{y'}{y^{\alpha}} = \frac{z'}{1-\alpha}.$$

Даље је

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = \ q(x)$$

тј. линеарну диференцијалну једначину

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = \ (1-\alpha)q(x).$$

Из (4.17) добијамо да је опште рјешење ове једначине облика

$$z = CF_1(x) + F_2(x)$$

гдје су $F_1(x)$ и $F_2(x)$ одређене функције. Према томе, опште рјешење једначине (4.19) је

$$y = \left(CF_1(x) + F_2(x)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Ако је $\alpha > 0$ функција $y = 0$ је рјешење једначине (4.19), и то за $\alpha > 1$ партикуларно рјешење (добија се из општег за $C = \infty$) и за $0 < \alpha < 1$ сингуларно (не може се добити из општег ни за једну вриједност параметра C).

Примјер 4.23. Наћи опште рјешење једначине

$$y' + \frac{y}{x} = xy^2.$$

Рјешење:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x.$$

Пошто је $\alpha = 2$ уводимо смјену

$$\frac{1}{y} = z \Rightarrow -\frac{y'}{y^2} = z'.$$

Добијамо

$$z' - \frac{z}{x} = -x$$

па је

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}} \left(C - \int x e^{-\int \frac{dx}{x}} dx \right) = x(C - x) \Rightarrow y = \frac{1}{x(C - x)}. \square$$

4.2.7. Ортогоналне трајекторије

У пракси се често јавља проблем одређивања фамилије кривих чије криве сијеку сваку криве дате фамилије кривих под правим углом. Такве криве се називају **ортогоналне трајекторије** дате фамилије кривих.

Нека је дата фамилија кривих

$$F(x, y, C) = 0 \tag{4.20}$$

и нека тој фамилији кривих одговара диференцијална једначина

$$y' = f(x, y).$$

Пошто је коефицијент правца на криву из фамилије (4.20) која пролази кроз тачку (x_0, y_0) једнак $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, коефицијент правца тангенте ортогоналне трајекторије у тачки (x_0, y_0) је једнак $-\frac{1}{f(x_0,y_0)}$, па фамилији ортоганалних трајекторија одговара диференцијална једначина

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}. \tag{4.20$_1$}$$

Ортогоналне трајекторије су рјешења диференцијалне једначине (4.20$_1$).

Примјер 4.24. Одредити ортоганалне трајекторије фамилије парабола $y = Cx^2$.

Рјешење: Прво одређујемо диференцијалну једначину дате фамилије кривих. Диференцирањем добијамо

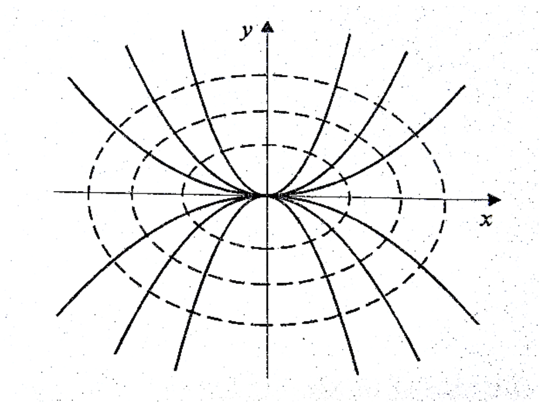
$$y' = 2Cx.$$

Елиминацијом параметра C добијамо

$$y' = 2\frac{y}{x^2}x = \frac{2y}{x}.$$

Одавде добијамо диференцијалну једначину ортогоналних трајекторија

$$y' = -\frac{x}{2y}.$$



Слика 4.5

Раздвајањем промјенљивих добијамо

$$2ydy = -xdx,$$

тј.

$$y^2 + \frac{x^2}{2} = C, C > 0.$$

Ортогоналне трајекторије су елипсе, Слика 4.5. □

4.2.8. Приближно рјешавање диференцијалних једначина

Уколико се рјешавање диференцијалних једначина неком од наведених метода сувише компликује, користе се методи за приближно рјешавање диференцијалне једначине. Навешћемо **Пикаров итерациони метод.**

У Дефиницији 4.7 дефинисали смо Кошијев задатак. Сада тражимо рјешење Кошијевог задатка

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{4.21}$$

за који знамо да има јединствено рјешење (у наредном поглављу се разматрају услови под којима Кошијев задатак има бар једно рјешење, као и услови под којима Кошијев задатак има тачно једно рјешење).

Идеја Пикаровог метода је веома једноставна. Интеграцијом у (4.21) добијамо

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt. \tag{4.21$_1$}$$

За прву апроксимацију узимамо функцију $y(x) = y_0$. Помоћу ње одређујемо другу апроксимацију $y_1(x)$:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt \tag{4.21$_2$}$$

Затим одређујемо сљедећу апроксимацију $y_2(x)$:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_1(t)\big)\, dt. \tag{4.21$_3$}$$

На n −том кораку добијамо апроксимацију

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_{n-1}(t)\big)\, dt. \tag{4.21$_4$}$$

На овај начин добијамо низ функција, односно апроксимација

$$y_0, y_1(x), \dots, y_n(x), \dots$$

Овај низ функција ће конвергирати ка рјешењу диференцијалне једначине уколико су испуњени услови који обезбјеђују јединственост рјешења (Поглавље 4.2.9).

Примјер 4.25. Користећи Пикаров итерациони метод, ријешити Кошијев задатак

$$y' = y, \qquad y(0) = 1.$$

Рјешење:

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x y_{n-1}(t)\, dt, \qquad y_0 = 1.$$

Добијамо

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x dt = 1 + x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1 + t)\, dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x (1 + t + \frac{t^2}{2})\, dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!},$$

.....

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Уочимо да је

$$\lim_{n \to \infty} y_n(x) = e^x$$

што је рјешење датог Кошијевог задатка. □

4.2.9. Теореме о егзистенцији и јединствености рјешења Кошијевог задатака

У Дефиницији 4.7 дефинисали смо Кошијев задатак. Може се десити да Кошијев задатак нема рјешење, да има тачно једно рјешење или да има више од једног рјешења. Зато се поставља питање под којим условима Кошијев задатак има бар једно рјешење, као и питање под којим условима Кошијев задатак има тачно једно рјешење.

То је посебно значајно уколико се диференцијална једначина рјешава неким нумеричким методом. Наводимо теореме о егзистенцији и јединствености рјешења.

Теорема 4.2. (Теорема о егзистенцији) *Ако је функција f непрекидна у свим тачкама правоугаоника*

$$R\colon |x - x_0| < a, \qquad |y - y_0| < b$$

и ограничена на R, тј.

$$|f(x,y)| \le K, \qquad (x,y) \in R,$$

тада Кошијев задатак

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{4.22}$$

има бар једно рјешење $y(x)$, које је дефинисано бар на интервалу $|x - x_0| < \alpha$, гдје је α мањи од бројева a и $\frac{b}{K}$.

Теорема 4.3. (Теорема о јединствености) *Ако је функције* f *и* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *непрекидне у свим тачкама правоугаоника*

$$R: |x - x_0| < a, \qquad |y - y_0| < b$$

и ограничене на R, *тј.*

$$|f(x,y)| \le K, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le L, \qquad (x,y) \in R,$$

тада Кошијев задатак (4.21) има тачно једно рјешење $y(x)$, *које је дефинисано бар на интервалу* $|x - x_0| < \alpha$, *гдје је* α *мањи од бројева* a *и* $\frac{b}{K}$.

Рјешење $y(x)$ *се може одредити помоћу Пикаровог итерационог метода, као гранична вриједност низа функција* $\left(y_n(x)\right)$ *дефинисаног са (4.21*$_4$*)*

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_{n-1}(t)\right) dt.$$

Примјер 4.26. Испитати да ли Кошијев задатак

$$y' = 1 + y^2, \qquad y(0) = 0$$

има рјешење на правоугаонику R: $|x| < 5, |y| < 3$, и ако има да ли је оно јединствено.

Рјешење: Имамо

$$|f(x,y)| = 1 + y^2 \leq 10 = K, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 2|y| \leq 6 = L$$

Функција $f(x,y) = 1 + y^2$ је непрекидна и ограничена на R па овај Кошијев задатак има бар једно рјешење које је дефинисано бар на интервалу $|x| < 0{,}3$. Пошто је и функција $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрекидна и ограничена на R, рјешење Кошијевог задатка је јединствено за $|x| < 0{,}3$. □

Уочимо да су услови у претходним теоремама довољни, али не и потребни. Зато се они могу замијенити слабијим условима.

На основу Лагранжове теореме вриједи

$$f(x,y_2)-f(x,y_1)=(y_2-y_1)\frac{\partial f(x,y_c)}{\partial y}$$

гдје су (x,y_2) и (x,y_2) тачке из R а y_c је вриједност између y_1 и y_2. Пошто претпостављамо да је функција $\frac{\partial f}{\partial y}$ ограничена на R, одавде добијамо

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2| \tag{4.22$_1$}$$

што је слабији услов од услова ограничености извода $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Услов (4.22) се назива **Липшицов [5] услов**.

Вриједи теорема о јединствености у којој се услов ограничености функције $\frac{\partial f}{\partial y}$ замјењује Липшицовим условом.

[5] Rudolf Lipschitz (1832-1903), њемачки математичар

Теорема 4.4. (Теорема о јединствености) *Нека је функција f непрекидна у свим тачкама правоугаоника*

$$R: |x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b,$$

ограничена на R, $|f(x,y)| \leq K$ и нека задовољава Липшицов услов (4.22₁). Тада Кошијев задатак (4.21) има тачно једно рјешење $y(x)$, које је дефинисано бар на интервалу $|x - x_0| < \alpha$, гдје је α мањи од бројева a и $\frac{b}{K}$.

У доказу ове теореме се користи Пикаров итерациони метод и рјешење се одређује помоћу итерација

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt, \qquad n = 1,2, \dots , \qquad y_0(x) = y_0.$$

Показује се да је низ функција $\left(y_n(x)\right)$ равномјерно конвергентан на интервалу $|x - x_0| < \alpha$ и да је рјешење Кошијевог задатка $y(x)$ једнако

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x).$$

Уколико су у некој околини тачке (x_0, y_0) испуњени услови Теореме о јединствености, онда кроз ту тачку пролази тачно једна интегрална крива. Ако услови ове теореме нису испуњени, онда се могу десити сљедећи случајеви: кроз тачку (x_0, y_0) пролази једна интегрална крива, кроз тачку (x_0, y_0) пролази више интегралних кривих или кроз тачку (x_0, y_0) не пролази ниједна интегрална крива.

Тачке у којима су нарушени услови теореме о јединствености, називају се **сингуларне тачке.**

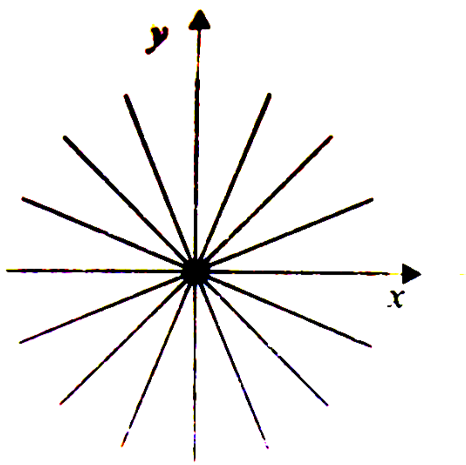
Уколико су услови теореме о јединствености нарушени у свим тачкама интегралне криве, онда ту криву називамо **сингуларном интегралном кривом**.

Примјер 4.27. Диференцијална једначина

$$xy' - y = 0$$

има опште рјешење

$$y = Cx.$$



Слика 4.6

Ако једначину запишемо у нормалном облику

$$y' = \frac{y}{x}$$

добијамо да је тачка $(0,0)$ сингуларна тачка јер функција $f(x,y) = \frac{y}{x}$ није ни дефинисана у тој тачки. Кроз тачку $(0,0)$ пролази бесконачно много интегралних кривих дате диференцијалне једначине, Слика 4.6.

Таква сингулрна тачка се назива **чвор**.

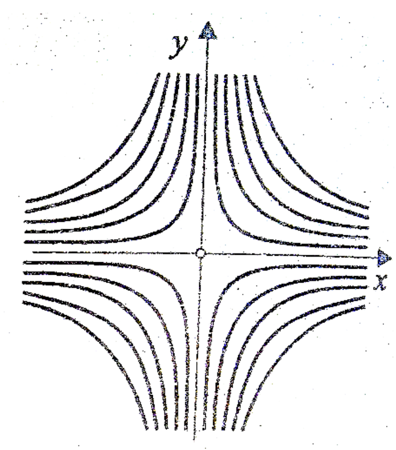
Примјер 4.28. Тачка $(0,0)$ је сингуларна тачка диференцијалне једначине

$$xy' + y = 0$$

која има опште рјешење

$$y = \frac{C}{|x|}.$$

Само једна интегрална крива пролази кроз тачку $(0,0)$, Слика 4.7
Таква сингуларна тачка се назива **седло.**



Слика 4.7

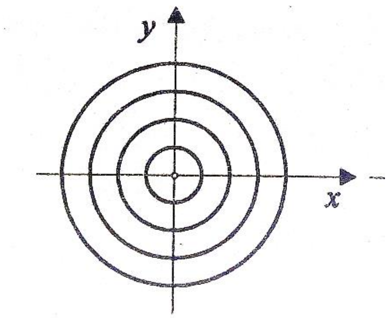
Примјер 4.29. Тачка $(0,0)$ је сингуларна тачка диференцијалне једначине

$$y' = -\frac{x}{y}$$

која има опште рјешење

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

У овом случају ниједна интегрална тачка не пролази кроз сингуларну тачку $(0,0)$, Слика 4.8 Таква сингуларна тачка се назива **центар.**

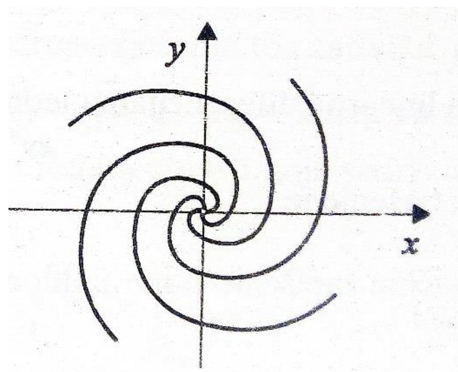


Слика 4.8

Примјер 4.30. Тачка $(0,0)$ је сингуларна тачка диференцијалне једначине

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

чије интегралне криве су логаритамске спирале, Слика 4.9 Таква сингуларна тачка се назива **фокус.**



Слика 4.9

4.2.10. Једначине које нису ријешене у односу на извод

I Лагранжова једначина

Диференцијална једначина облика

$$y = xg(y') + f(y') \tag{4.23}$$

гдје су f и g дате диференцијабилне функције, назива се **Лагранжова једначина.**

Смјеном $y' = p$ добијамо

$$y = xg(p) + f(p).$$

Диференцирамо једначину по x и добијамо

$$p = g(p) + xg'(p)p' + f'(p)p'$$

тј.

$$p - g(p) = \left(xg'(p) + f'(p)\right)\frac{dp}{dx}.$$

Узимајући x као функцију од p добијамо диференцијалну једначину

$$\big(p - g(p)\big)\frac{dx}{dp} = xg'(p) + f'(p)$$

одакле добијамо линеарну интегралну једначину

$$x_p' - \frac{g'(p)}{p - g(p)}x = \frac{f'(p)}{p - g(p)}, \qquad p - g(p) \neq 0.$$

Рјешавањем ове једначине добијамо опште рјешење $x = x(p, C)$, односно опште рјешење Лагранжове једначине у параметарском облику

$$x = x(p, C), \;\; y = x(p, C)g(p) + f(p). \tag{4.23$_1$}$$

Ако је $p - g(p) = 0$ за неку вриједност $p = p_0 = const$ тада је и функција

$$y = xg(p_0) + f(p_0)$$

рјешење Лагранжове једначине које може бити сингуларно.

Примјер 4.31. Опште рјешење једначине

$$y = 2xy' - \ln y', y' > 0$$

је

$$x = \frac{1}{p} + \frac{C}{p^2}, \qquad y = 2 - \ln p + \frac{2C}{p}, \;\; p > 0.$$

Једначина нема сингуларних рјешења. □

II Клероова једначина

Клероова једначина је специјалан случај Лагранжове једначине за $g(y') = y'$.

Диференцијална једначина облика

$$y = xy' + f(y') \tag{4.24}$$

гдје је f дата диференцијабилна функција, назива се **Клероова једначина.**

Смјеном $y' = p$ добијамо

$$y = xp + f(p).$$

Диференцирамо једначину по x и добијамо

$$p = p + xp' + f'(p)p'$$

тј.

$$0 = \left(x + f'(p)\right)\frac{dp}{dx}.$$

Ако је $\frac{dp}{dx} = 0$ тада је $p = C$ па је опште рјешење Клероове једначине фамилија правих

$$y = xC + f(C). \tag{4.24$_1$}$$

Ако је $x + f'(p) = 0$ тада је

$$x = -f'(p), y = -pf'(p) + f(p) \tag{4.24$_2$}$$

рјешење једначине (4.24). То је обично сингуларно рјешење које представља обвојницу фамилије правих (4.24$_1$) (уколико фамилија правих има обвојницу).

Примјер 4.32. Једначина из Примјера 4.8

$$y = xy' - {y'}^2$$

је Клероова једначина. Смјеном $y' = p$ добијамо

$$y = xp - p^2.$$

Диференцирамо једначину по x и добијамо

$$p = p + xp' - 2pp'$$

тј.

$$0 = (x - 2p)\frac{dp}{dx}.$$

За

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

добијамо $p = C$, па је опште рјешење једначине фамилија правих

$$y = Cx - C^2.$$

Ако је

$$x + 2p = 0$$

тада је

$$x = 2p, \qquad y = p^2$$

рјешење једначине. Елиминацијом параметра p добијамо рјешење

$$y = \frac{x^2}{4}$$

која се не може добити из општег рјешења ни за једну вриједност параметра C, укључујући и $C = \pm\infty$. Ово је сингуларно рјешење које представља обвојницу фамилије правих из општег рјешења, Слика 4.3. □

4.3. ЛИНЕАРНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ВИШЕГ РЕДА

4.3.1. Хомогена линеарна једначина другог реда

Диференцијална једначина другог реда може се записати у облику

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

гдје је F дата функција и y'' се обавезно јавља у једначини. Ако је ту једначину могуће ријешити у односу на y'' онда се она може записати у нормалном облику

$$y'' = f(x, y, y')$$

гдје је f одговарајућа функција.

Диференцијална једначина другог реда облика

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{4.25}$$

гдје су p, q и r дате функције, назива се **линеарна диференцијална једначина другог реда.**

Ако је у (4.25) $r(x) = 0$ добијамо једначину

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{4.26}$$

коју називамо **хомогеном линеарном диференцијалном једначином другог реда.**

Ако је $r(x) \neq 0$ кажемо да је једначина (4.25) **нехомогена.**

На почетку одређујемо рјешење хомогене једначине (4.26). Претпостављаћемо да су функције p и q непрекидне на наком интервалу I и да су и рјешења једначине која добијамо такође дефинисана на том интервалу.

Разматрамо особине рјешења хомогене једначине.

Теорема 4.5. *Ако је* $y = y_1(x)$ *рјешење једначине (4.26), онда је и функција* $y = Cy_1(x)$, *гдје је* C *произвољан реалан број, такође рјешење те једначине.*

Доказ: Уврштавањем функције $y = Cy_1(x)$ у једначину (4.26) добијамо

$$(Cy_1)'' + p(x)(Cy_1)' + q(x)(Cy_1) = C(y_1'' + p(x){y_1}' + q(x)y_1) = 0$$

тј. функција $y = Cy_1(x)$ је такође рјешење једначне (4.26).□

Теорема 4.6. *Ако су функције* $y = y_1(x)$ *и* $y = y_2(x)$ *рјешења једначине (4.26), онда је и функција* $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, *гдје су* C_1 *и* C_2 *произвољне реалане константе, такође рјешење те једначине.*

Доказ: Уврштавањем функције $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ у једначину (4.26) добијамо

$$(C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + p(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + q(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$

$$C_1({y_1}'' + p(x){y_1}' + q(x)y_1) + C_2({y_2}'' + p(x){y_2}' + q(x)y_2) = 0$$

тј. функција $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ је такође рјешење једначне (4.26).□

Из Теореме 4.6 закључујемо да је свака **линерана комбинација рјешења** хомогене једначине такође рјешење те једначине. Оваква тврдња не вриједи за нехомогене једначине.

Лако се показује да линеарне једначине имају и сљедеће особине.

Лема 4.1.

1) *Функција* $y = 0$ *је рјешење хомогене једначине (4.26) али није рјешење нехомогене једначине (4.25). Ово рјешење хомогене једначине се назива* ***тривијално рјешење***.

2) *Разлика два рјешења нехомогене једначине (4.25) је рјешење хомогене једначине (4.26).*

3) *Збир рјешења нехомогене једначине (4.25) и рјешења хомогене једначине (4.26) је рјешење нехомогене једначине.*

Сада уводимо појмове линерне независности функција и фундаменталног система рјешења хомогене једначине (4.26).

Линеарну независност функција дефинишемо слично као и линерану независност вектора.

Кажемо да су функције $y_1(x)$ и $y_2(x)$ **линерано независне** на неком интервалу I ако је идентитет

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0 \text{ на } I \tag{4.27}$$

могућ само за $\alpha = \beta = 0$. Ако је идентитет (4.27) могућ и у случају када је бар један од бројева α и β различит од нула, тада кажемо да су функције **линеарно зависне** на I.

Ако су функције $y_1(x)$ и $y_2(x)$ су линерано зависне на I, то значи да се једна од њих може изразити преко друге, тј.

$$y_1 = -\frac{\beta}{\alpha} y_2 \ \text{ или } y_2 = -\frac{\alpha}{\beta} y_1$$

у зависности од тога да ли је $\alpha \neq 0$ или $\beta \neq 0$.

Дакле, ако су функције $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линеарно независне на неком интервалу I, тада је

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq k$$

на I, гдје је k константа, тј. функције $y_1(x)$ и $y_2(x)$ нису пропорционалне.

Дефиниција 4.8. Ако су $y_1(x)$ и $y_2(x)$ два линеарно независна рјешења хомогене једначине (4.26), тада кажемо да они чине **базу** или **фундаментални систем** рјешења те једначине.

Без доказа наводимо теорему која даје одговор на питање да ли хомогена једначина увијек има опште рјешење и да ли је рјешење Кошијевог задатка за хомогену једначину јединствено.

Теорема 4.7. *Ако хомогена линеарна једначина (4.26) има непрекидне коефицијенте* p и q *на неком интервалу* I*, тада она има опште рјешење на том интервалу које садржи сва њена рјешења. Осим тога, сваки Кошијев задатак за једначину (4.26) има јединствено рјешење.*

Опште рјешење једначине (4.26) је линеарна комбинација функција које чине фундаментални систем рјешења.

Дефиниција 4.9. Ако функције $y_1(x)$ и $y_2(x)$ чине фундаментални систем рјешења једначине (4.26) на I, тада је опште рјешење те једначине на I функција

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{4.28}$$

гдје су C_1 и C_2 произвољне реалане константе.

Партикуларно рјешење једначине (4.26) је рјешење једначине које се добија из општег рјешења (4.28) за неку вриједност константи C_1 и C_2.

4.3.2. Хомогена једначина другог реда са константним коефицијентима

Једначина облика

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{4.29}$$

гдје су a и b реалне константе, назива се **хомогена диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима.**

Тражимо рјешење једначине (4.27) у облику

$$y = e^{\lambda x} \tag{4.30}$$

гдје је λ реалан параметар.[6]

Увршатавањем функције (4.30) у једначину (4.29) добијамо

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0.$$

[6] Пошто је фамилија функција $y = Ce^{-kx}$ рјешење једначине $y' + ky = 0$, претпостављамо да би и једначина (4.28) могла имати рјешење у облику експоненцијалне функције.

Према томе, да би функција (4.30) била рјешење једначине (4.29), λ мора бити рјешење једначине

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{4.31}$$

Једначина (4.31) се назива **карактеристична једначина** једначине (4.29).

Дакле, ако су λ_1 и λ_2 рјешења карактеристичне једначине (4.31) тада су функције

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \text{ и } y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

рјешења једначине (4.29). За одређивање општег рјешења једначине (4.29) разликоваћемо три случаја, у зависности од природе коријена карактеристичне једначине (4.31).

1) Карактеристична једначина има два реална различита коријена $\boldsymbol{\lambda_1}$ и $\boldsymbol{\lambda_2}$

Рјешења једначине су $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Пошто је

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq k$$

функције y_1 и y_2 су линеарно независне и чине фундаментални систем рјешења диференцијалне једначине (4.29). Дакле, опште рјешење једначине је облика

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Примјер 4.33. Наћи опште рјешење једначине

$$y'' + 2y' - 6y = 0.$$

Рјешење: Коријени карактеристичне једначине

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0$$

су $\lambda_1 = -3$ и $\lambda_2 = 2$. Тада функције $y_1 = e^{-3x}$ и $y_2 = e^{2x}$ чине фундаментални систем рјешења па је опште рјешење

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}. \square$$

2) Карактеристична једначина има комплексне коријене $\boldsymbol{\lambda_1}$ и $\boldsymbol{\lambda_2}$

Нека су коријени карактеристичне једначине $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Тада су рјешења диференцијалне једначине функције

$$\tilde{y}_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} \text{ и } \tilde{y}_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}. \tag{4.32}$$

Ове функције можемо представити у облику

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x}(cos\beta x + isin\beta x) \text{ и } \tilde{y}_2 = e^{\alpha x}(cos\beta x - isin\beta x)$$

Да бисмо добили реална рјешења једначине (4.29) користимо Теорему 4.6, тј. да је свака линеарна комбинација рјешења хомогене једначине такође рјешење те једначине. Дакле и функције

$$y_1(x) = \frac{1}{2}(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) = e^{\alpha x}cos\beta x$$

и

$$y_2(x) = \frac{1}{2i}(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) = e^{\alpha x}sin\beta x$$

су рјешења једначине (4.29). Ове функције су линеарно независне јер је

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{cos\beta x}{sin\beta x} \neq k$$

па чине фундаментални скуп рјешења. Према томе опште рјешење једначине (4.29) је облика

$$y = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x).$$

Примјер 4.34. Наћи опште рјешење једначине

$$y'' + 4y = 0.$$

Рјешење: Корijени карактеристичне једначине

$$\lambda^2 + 4 = (\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0$$

су $\lambda_1 = 2i$ и $\lambda_2 = -2i$. Тада функције $y_1 = cos2x$ и $y_2 = sin2x$ чине фундаментални систем рјешења па је опште рјешење

$$y = C_1 cos2x \ + C_2 sin2x. \square$$

3) Карактеристична једначина има двоструки коријен $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2}$

У овом случају је

$$D = a^2 - 4b = 0 \Rightarrow b = \frac{a^2}{4}$$

па је карактеристична једначина

$$\lambda^2 + a\lambda + \frac{a^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda + \frac{a}{2}\right)^2 = 0.$$

Одавде је

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}.$$

Одавде добијамо једно рјешење једначине

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{-\frac{a}{2}x}.$$

Да бисмо добили фундаментални скуп рјешења, друго рјешење једначине одређујемо у облику

$$y_2(x) = y_1(x)u(x).$$

Уврштавањем у диференцијалну једначину (4.29) добијамо

$$u(x) = \int \frac{C}{y_1^2} e^{-\int a dx} dx = C \int \frac{1}{e^{-ax}} e^{-ax} dx = Cx.$$

Одавде за $C = 1$ добијамо

$$y_2(x) = y_1(x)x = xe^{-\frac{a}{2}x} = xe^{\lambda_1 x}.$$

Дакле, фундаментални скуп рјешења чине функције

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \text{ и } y_2 = xe^{\lambda_1 x}$$

па је опште рјешење једначине (4.29) облика

$$y = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

Примјер 4.35. Наћи опште рјешење једначине

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Рјешење: Карактеристична једначина

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 = 0$$

има један реалан коријен $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. Тада функције $y_1 = e^{-3x}$ и $y_2 = xe^{-3x}$ чине фундаментални систем рјешења па је опште рјешење

$$y = e^{-3x}(C_1 + C_2 e^{-3x}). \square$$

Примјер 4.36. Наћи рјешење једначине

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

које задовољава почетне услове $y(0) = -3, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

Рјешење: Коријени карактеристичне једначине

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

су $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Опште рјешење једначине је

$$y = e^x(C_1 cosx \ + C_2 sinx).$$

Из почетних услова $y(0) = -3, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ добијамо

$$-3 = C_1, 0 = C_2 e^{\frac{\pi}{2}}$$

па је тражено партикуларно рјешење

$$y = -3e^x cosx. \square$$

4.3.3. Примјене хомогене једначине са константним коефицијентима

Нека је тијело масе m окачено на еластичну опругу чија је маса занемарљива у односу на масу тијела. Ако тијело повучемо надоле из положаја равнотеже па га пустимо, оно ће почети да се креће. То кретање ће бити праволинијско. На тијело дјелује сила земљине теже

$$F_1 = mg$$

док се у опрузи јавља сила F_2 која настоји тијело вратити у равнотежни положај. Експерименти показују да је интензитет силе F_2 пропорционалан промјени дужине опруге. Та сила има смјер нагоре ако је опруга истегнута и смјер надоле ако је опруга стегнута. Према Хуковом закону је

$$F_2 = -ks$$

гдје је s вертикални помак тијела и $k > 0$ константа пропорционалности која се назива модуо опруге. Знак – означава да сила и помак нису истог знака. Када тијело мирује, резултанта сила је једнака нули, тј.

$$F_1 + F_2 = mg - ks_0 = 0$$

гдје је s_0 помак који одговара том положају који се назива положај статичке равнотеже.

Нека је $y = y(t)$ помак тијела у тренутку t, тј. удаљеност од положаја статичке равнотеже $y = 0$. Овом помаку одговара додатна сила у опрузи $-ky$ која дјелује на тијело па је резултантна сила која дјелује на тијело у положају $y(t)$ једнака

$$F_1 + F_2 - ky = -ky.$$

Пошто је према другом Њутновом закону сила једнака производу масе и убрзања, при чему је убрзање други извод помака $y(t)$, добијамо диференцијалну једначину

$$my'' = -ky.$$

Дакле, кретање тијела под дејством силе у опрузи се описује линеарном диференцијалном једначином

$$my'' + ky = 0.$$

Овој диференцијалној једначини одговара карактеристична једначина

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

гдје је $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Коријени једначине су $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ па је опште рјешење једначине

$$y = Acos\omega_0 t + Bsin\omega_0 t, A, B \in \mathbb{R}.$$

Вриједности параметара A, B једнозначно су одређене почетним помаком $y(0)$ и почетном брзином $y'(0)$ па је

$$A = y(0), B = \frac{y'(0)}{\omega_0}.$$

Према томе слободне непригушене осцилације описује крива

$$y = y(0)cos\omega_0 t + \frac{y'(0)}{\omega_0} sin\omega_0 t = Ccos(\omega_0 t - \delta)$$

гдје је

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \delta = arctg\frac{B}{A}.$$

4.3.4. Хомогене једначине n −тог реда са константним коефицијентима

Једначина n −тог реда са константним коефицијентима је једначина облика

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{4.33}$$

гдје су $a_1, a_2, \dots, a_n$ реалне константе.

Рјешење једначине одређујемо као и случају једначине другог реда, тј. у облику

$$y = e^{\lambda x}$$

гдје је λ реалан параметар.

Увршатавањем у једначину (4.33) добијамо карактеристичну једначину

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{4.34}$$

једначине (4.33). И у овом случају за одређивање општег рјешења једначине (4.33) разликоваћемо три случаја, у зависности од природе коријена карактеристичне једначине (4.34).

1) Корijени карактеристичне једначине су реални и различити

Ако карактеристична једначина има n различитих корijена $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, тада њима одговарају рјешења $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$. Ове функције чине фундаментални скуп рјешења па је опште рјешење облика

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

Примјер 4.37. Наћи опште рјешење једначине

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0.$$

Рјешење: Корijени карактеристичне једначине

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$$

су $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$. Тада функције $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}, y_3 = e^{3x}$ чине фундаментални систем рјешења па је опште рјешење

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}. \square$$

2) **Корijени карактеристичне једначине су различити, али међу њима има и комплексних**

Нека су $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ прости коријени карактеристичне једначине. Тада њима одговарају рјешења

$$y_1(x) = e^{\alpha x} cos\beta x \text{ и } y_2(x) = e^{\alpha x} sin\beta x.$$

Фундаментални систем рјешења у овом случају чине рјешења која одговарају свим паровима коњуговано-комплексних бројева и рјешења која одговарају реалним коријенима.

Примјер 4.38. Наћи опште рјешење једначине

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0.$$

Рјешење: Коријени карактеристичне једначине

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i) = 0$$

су $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$. Тада функције $y_1 = e^x, y_2 = e^x cosx, y_3 = e^x sinx$ чине фундаментални систем рјешења па је опште рјешење

$$y = C_1 e^x + C_2 e^x cosx + C_3 e^x sinx. \square$$

3) Међу коријенима карактеристичне једначине има вишеструких коријена

Слично као у случају једначине другог реда, показује се да вишеструком коријену λ карактеристичне једначине реда m одговарају m рјешења једначине

$$y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}, \dots, y_m = x^{m-1}e^{\lambda x} \,.$$

Ако је $\lambda = \alpha + i\beta$ комплексан коријен вишеструкости m, онда је и $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ коријен вишеструкости m. Овим комплексним коријенима одговара $2m$ рјешења једначине облика

$$y_1(x) = e^{\alpha x} cos\beta x, y_2(x) = xe^{\alpha x} cos\beta x, \dots, y_m(x) = x^{m-1}e^{\alpha x} cos\beta x,$$

$$y_{m+1}(x) = e^{\alpha x} sin\beta x, y_{m+2}(x) = xe^{\alpha x} sin\beta x, \dots y_{2m}(x) = x^{m-1}e^{\alpha x} sin\beta x.$$

Фундаментални систем рјешења чине рјешења која одговарају вишеструким коријенима и осталим коријенима карактеристичне једначине.

4.3.5. Нехомогене једначине другог реда са константним коефицијентима

Једначина облика

$$y'' + ay' + by = r(x) \tag{4.35}$$

гдје су a и b реалне константе, назива се **нехомогена диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима.**

Да бисмо одредили опште рјешење нехомогене једначине, доказујемо везу између рјешења хомогене и нехомогене једначине.

Теорема 4.8. *1) Ако су $y_1(x)$ и $y_2(x)$ рјешења нехомогене једначине (4.35) на неком интервалу I, тада је $y_1(x) - y_2(x)$ рјешење хомогене једначине (4.29) на том интервалу.*

2) Ако су y^* и $\tilde{y}$ рјешења нехомогене једначине (4.35) и (4.29) на неком интервалу I респективно, тада је збир $y^* + \tilde{y}$ рјешење нехомогене једначине (4.35) на том интервалу.

Доказ: Пошто је

$$y_1'' + ay_1' + by_1 = r(x) \text{ и } y_2'' + ay_2' + by_2 = r(x)$$

добијамо

$$(y_1 - y_2)'' + a(y_1 - y_2)' + b(y_1 - y_2) = 0$$

па је $y_1 - y_2$ рјешење хомогене једначине (4.29). На исти начин из

$$y^{*''} + ay^{*'} + by^* = r(x) \text{ и } \tilde{y}'' + a\tilde{y}' + b\tilde{y} = 0$$

добијамо

$$(y^* + \tilde{y})'' + a(y^* + \tilde{y})' + b(y^* + \tilde{y}) = r(x)$$

и теорема је доказана. □

Из претходне теореме добијамо да се **опште рјешење нехомогене једначине** (4.35) на неком интервалу I може представити у облику

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) \tag{4.35$_1$}$$

гдје је $y_p(x)$ партикуларно рјешење нехомогене једначине (4.35) и $y_h(x)$ опште рјешење хомогене једначине (4.29).

У Поглављу 4.3.2 видјели на који начин се одређује опште рјешење хомогене једначине. Опште рјешења нехомогене једначине можемо одредити помоћу општег рјешења хомогене једначине на два начина.

Први начин је да методом неодређених коефицијената одредимо партикуларно рјешење $y_p(x)$ нехомогене једначине и тада је опште рјешење нехомогене једначине дато са (4.35$_1$).

Други начин је да методом варијације параметра из општег рјешења хомогене једначине одредимо опште рјешење нехомогене једначине.

I Метод неодређених коефицијената

У зависности од облика функције $r(x)$, у неким случајевима можемо одредити партикуларно рјешење нехомогене једначине методом неодређених коефицијената.

1) Нека је

$$r(x) = P_m(x)$$

гдје је $P_m(x)$ полином степена m. Тада је партикуларно рјешење облика

$$y_p(x) = x^k Q_m(x)$$

гдје је k вишеструкост нуле као коријена карактеристичне једначине и $Q_m(x)$ полином степена m чије коефицијенте треба одредити из услова да је $y_p(x)$ рјешење једначине (4.35). Уколико нула није коријен карактеристичне једначине тада је $k = 0$.

Примјер 4.39. Наћи опште рјешење једначине

$$y'' + y = x^2 + x.$$

Рјешење:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

па је

$$y_h(x) = C_1 cosx \ + C_2 sinx.$$

Даље је

$$r(x) = x^2 + x = P_2(x)$$

па је

$$y_p(x) = x^k Q_2(x).$$

Пошто нула није коријен карактеристичне једначине $k = 0$ имамо

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Уврштавањем у једначину добијамо

$$2A + Ax^2 + Bx + C = x^2 + x$$

одакле је

$$A = 1, B = 1, C = -2$$

па је

$$y_p(x) = x^2 + x - 2$$

партикуларно рјешење једначине. Опште рјешење једначине је

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = C_1 cosx\ + C_2 sinx + x^2 + x - 2. \square$$

2) Нека је

$$r(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$$

гдје је $P_m(x)$ полином степена m и реалан број α коријен карактеристичне једначине вишеструкости k. Тада је партикуларно рјешење облика

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x} Q_m(x)$$

гдје је $Q_m(x)$ полином степена m који треба одредити из услова да је $y_p(x)$ рјешење једначине (4.35).

Примјер 4.40. Наћи опште рјешење једначине

$$y'' + y' - 2y = 3e^x.$$

Рјешење:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$$

па је

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Даље је

$$r(x) = 3e^x = P_0(x) e^x$$

па је

$$y_p(x) = x^k e^x Q_0(x).$$

Пошто је $\lambda_1 = 1$ прост коријен карактеристичне једначине имамо $k = 1$ па је

$$y_p(x) = Axe^x.$$

Уврштавањем у једначину добијамо

$$A(x+2)e^x + A(x+1)e^x - 2Axe^x = 3e^x$$

одакле је

$$A = 1$$

па је

$$y_p(x) = xe^x$$

партикуларно рјешење једначине.

Опште рјешење једначине је

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x} + xe^x. \square$$

3) Нека је

$$r(x) = e^{\alpha x}[P_m(x) cos\beta x + Q_n(x) sin\beta x]$$

гдје су $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ полиноми степена m и n, и $\alpha + i\beta$ комплексан коријен карактеристичне једначине вишеструкости k. Тада је партикуларно рјешење облика

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x}[R_s(x) cos\beta x + T_s(x) sin\beta x]$$

гдје су $R_s(x)$ и $T_s(x)$ полиноми степена $s = \max\{m, n\}$ које треба одредити из услова да је $y_p(x)$ рјешење једначине (4.35).

Примјер 4.41. Наћи опште рјешење једначине

$$y'' + y' - 6y = 52cos2x.$$

Рјешење: $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + sin2x - 5cos2x$.

II Метод варијације параметара

Нека је

$$y_h(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

опште рјешење хомогене једначине (4.29). Рјешење нехомогене једначине (4.35) тражимо у облику

$$y(x) = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 \tag{4.36}$$

гдје су $C_1(x)$ и $C_2(x)$ два пута непрекидно-диференцијабилне функције. Диференцирањем у (4.36) добијамо

$$y'(x) = C_1{}'(x) y_1 + C_2{}'(x) y_2 + C_1(x) y_1{}' + C_2(x) y_2{}'$$

одакле постављамо први услов

$$C_1{}'(x) y_1 + C_2{}'(x) y_2 = 0$$

што нам поједностављује први извод. Значи

$$y'(x) = C_1(x) y_1{}' + C_2(x) y_2{}'$$

па је

$$y''(x) = C_1{}'(x) y_1{}' + C_2{}'(x) y_2{}' + C_1(x) y_1{}'' + C_2(x) y_2{}''.$$

Уврштавањем у (4.35) добијамо

$$C_1{}'(x)y_1{}' + C_2{}'(x)y_2{}' + C_1(x)y_1{}'' + C_2(x)y_2{}'' +$$

$$a(C_1{}'(x)y_1 + C_2{}'(x)y_2) + b(C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2) = r(x).$$

Пошто је

$$y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

рјешење хомогене једначине, имамо

$$C_1(x)y_1{}'' + C_2(x)y_2{}'' + a(C_1{}'(x)y_1 + C_2{}'(x)y_2) + b(C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2) = 0,$$

па је

$$C_1{}'(x)y_1{}' + C_2{}'(x)y_2{}' = r(x).$$

Дакле, добијамо систем

$$C_1{}'(x)y_1 + C_2{}'(x)y_2 = 0$$

$$C_1{}'(x)y_1{}' + C_2{}'(x)y_2{}' = r(x)$$

из којег одређујемо функције $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

Примјер 4.42. Наћи опште рјешење једначине

$$y'' + y = \frac{1}{cosx}.$$

Рјешење:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

па је

$$y_1 = cosx, \qquad y_2 = sinx$$

и

$$y_h(x) = C_1 cosx \ + C_2 sinx.$$

Добијамо систем

$$C_1{}'(x)cosx \ + C_2{}'(x)sinx = 0$$

$$-C_1{}'(x)sinx \ + C_2{}'(x)cosx = \frac{1}{cosx}.$$

Рјешавањем система добијамо

$$C_1{}'(x) = -tgx, \qquad C_2{}'(x) = 1$$

па је

$$C_1(x) = ln|cosx| + D_1, \qquad C_2 = x + D_2.$$

Опште рјешење једначине је

$$y(x) = D_1 cosx \ + D_2 sinx + cosxln|cosx| + xsinx. \square$$