УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 2- ПРЕДАВАЊА

Академска 2017/2018

ТЕМА 3: ВИШЕСТРУКИ ИНТЕГРАЛИ

3.1. Двојни интеграли

3.2. Тројни интеграл

ЛИТЕРАТУРА: **Момир В. Ћелић, Математика II,** Машински факултет, Бања Лука, 1997[1]

Наставник: Биљана Војводић

[1] У припреми предавања коришћена је и књига **Математичка анализа 2, Душан Аднађевић и Зоран Каделбург** (Наука, Београд 1998)

ТЕМА 3: ВИШЕСТРУКИ ИНТЕРАЛИ

3.1. ДВОЈНИ ИНТЕГРАЛ

Док је код одређеног интеграла

$$\int_a^b f(x)dx$$

интегранд функција једне промјенљиве дефинисана на сегменту $[a,b]$, код двојних интеграла интегранд је функција двије промјенљиве $f(x,y)$, дефинисана на затвореној и ограниченој области D из xy −равни.

Да бисмо дефинисали двојни интеграл по произвољној затвореној и ограниченој области D из xy −равни, прво дефинишемо двојни интеграл по правоугаонику.

3.2.1. Двојни интеграл по правоугаонику

Нека је функција $f(x, y)$ дефинисана на правоугаонику

$$R = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq x \leq d\} = [a, b] \times [c, d].$$

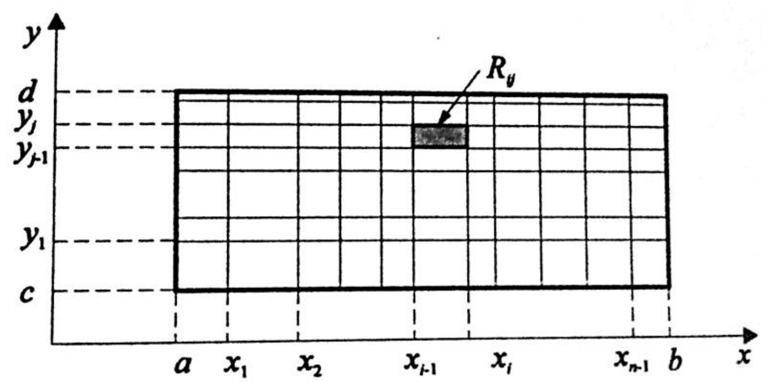
Ако су $P_1 = \{x_0, \dots, x_m\}$ и $P_2 = \{y_0, \dots, y_n\}$ подјеле интервала $[a, b]$ и $[c, d]$ респективно, тада је

$$P = P_1 \times P_2$$

подјела правоугаоника R. Нека су

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], i = 1, \dots, m, j = 1, \dots n$$

правоугаоници који се добијају подјелом P (Слика 3.1).



Слика 3.1.

Нека је даље $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, d_{ij} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + \left(\Delta y_j\right)^2}$ и

$$\lambda(P) = \max_{i,j} d_{ij}\, , i = 1, \dots, m, j = 1, \dots n$$

дијаметар или норма подјеле P.

Изаберимо на сваком правоугаонику R_{ij} произвољну тачку $\left(\xi_i, \eta_j\right)$ и формирајмо суму

$$\sigma(f, P, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_j\right) \Delta x_i\, \Delta y_j \tag{3.1}$$

која одговара датој подјели правоугаоника R и датом избору тачака $\left(\xi_i, \eta_j\right)$. Сума (3.1) се назива **(Риманова) интегрална сума** функције f.

Дефиниција 3.1. *Ако постоји коначна гранична вриједност*

$$I = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi, \eta) \tag{3.2}$$

независно од подјеле P и избора тачака (ξ_i, η_j), тада се број I назива ***двојни интеграл*** *функције $f(x,y)$ по правоугаонику R и означава са*

$$I = \iint_R f(x,y)dxdy. \tag{3.3}$$

Дакле,

$$I = \iint_R f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi, \eta)$$

За функцију $f(x,y)$ чија интегрална сума има коначну граничну вриједност када параметар подјеле тежи нули, кажемо да је **интеграбилна** на R.

Као и код функција једне промјенљиве, показује се да је **ограниченост функције потребан услов за њену интеграбилност,** тј. ако је функција $f(x,y)$ интеграбилна на правоугаонику R, онда је она на том правоугаонику ограничена. Зато у даљим разматрањима претпостављамо да је функција $f(x,y)$ ограничена на R.

Као и код одређеног интеграла, поред интегралних сума посматрамо и **доњу и горњу Дарбуову суму** функције $f(x, y)$ на R:

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, \Delta x_i\, \Delta y_j, \qquad S(f, P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\, \Delta x_i\, \Delta y_j,$$

гдје је

$$m_{ij} = \inf_{(x,y)\in R_{ij}} f(x, y), \quad M_{ij} = \sup_{(x,y)\in R_{ij}} f(x, y), \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots n.$$

Вриједи сљедећа теорема: [2]

Теорема 3.1. *Ограничена функција $f(x, y)$ на правоугаонику R је интеграбилна на R ако и само ако вриједи*

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \left(S(f, P) - s(f, P) \right) = 0$$

независно од подјеле P. □

[2] Видјети одговарајућу теорему за одређени интеграл, Теорема 1.6, Поглавље 1.3 (стр. 42)

Показали смо да је непрекидност функције довољан услов за интеграбилност на сегменту $[a, b]$. [3] Аналоган резултат имамо и у случају двојног интеграла по правоугаонику. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 3.2. *Свака непрекидна функција $f(x, y)$ на правоугаонику R је интеграбилна на том правоугаонику.*

И у случају двојног интеграла, непрекидност функције јесте довољан, али не и потребан услов за њену интеграбилност. Дакле, класа интеграбилних функција је шира од класе непрекидних функција. У случају одређеног интеграла, показали смо да ако функција f има коначно много тачака прекида прве врсте на $[a, b]$, тада је f интеграбилна на $[a, b]$. [4]

У случају двојног интеграла, услов коначно много тачака прекида прве врсте замјењујемо условом скупа тачака прекида ограничене функције који има површину нула. [5]

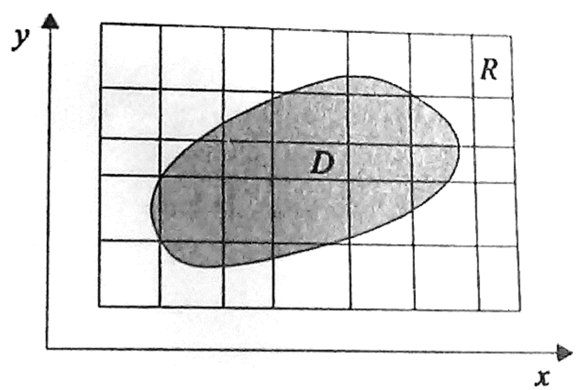
Теорема 3.3. *Нека је функција $f(x, y)$ дефинисана и ограничена на правоугаонику R. Ако скуп тачака прекида функције f има површину нула, тада је функција интеграбилна на том правоугаонику.*

[3] Теорема 1.7 Поглавље 1.3. Одређени интеграл (стр. 43)
[4] Теорема 1.8 Поглавље 1.3. Одређени интеграл (стр. 44)
[5] Показује се да површину нула имају: коначан скуп тачака равни, унија коначног броја ограничених скупова површине нула, подскуп скупа површине нула, дуж, као и график реалне функције дефинисане и непрекидне на $[a, b]$. Такође се показује се да постоје раванске фигуре које немају површину, те да је потребан и довољан услов да би раванска фигура имала површину да њена граница има површину нула.

3.2.2. Двојни интеграл по области

Помоћу дефиниције двојног интеграла по правоугаонику, дефинишемо двојни интеграл по произвољној области.

Нека је D затворена ограничена област у $xy-$ равни чија се граница састоји од коначно много непрекидних кривих облика $y = \varphi(x)$ и $x = \psi(y)$. Тада област D има површину.[6] Нека је на области D дефинисана ограничена функција $f(x, y)$. Посматрајмо произвољан правоугаоник R описан око области D чије су стране паралелне координатним осама (Слика 3.2).



Слика 3.2.

[6] У том случају граница области D има површину нула па област D има површину (видјети претходну фусноту)

Дефинишимо на правоугаонику R функцију

$$\check{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), (x,y) \in D \\ 0, (x,y) \in R \setminus D \end{cases}. \tag{3.4}$$

Дефиниција 3.2. *Ако је функција* $\check{f}$ *интеграбилна на правоугаонику* R, *онда кажемо да је функција* f *интеграбилна на* D *и дефинишемо* ***двојни интеграл на области D*** *са*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_R \check{f}(x,y)dxdy. \tag{3.4$_1$}$$

Показује се да овако дефинисан двојни интеграл функције f по области D не зависи од правоугаоника R.

Сада се из Теореме 3.3 лако добијају довољни услови интеграбилности функције по области D.

Теорема 3.4. *Нека је функција* $f(x,y)$ *дефинисана и ограничена на области* D. *Ако скуп тачака прекида функције* f *на* D *има површину нула, тада је функција* $f(x,y)$ *интеграбилна на* D.

3.2.3. Особине двојног интеграла

Особине двојног интеграла су аналогне особинама одређеног интеграла.

1. Нека је $\mu(D)$ површина области D. Тада је
$$\iint_D dxdy = \mu(D).$$
2. Ако је $D^* \subset D$ и ако је функција f интеграбилна на D, тада је функција f интеграбилна и на D^*.
3. Ако је функција f интеграбилна на области D која је подијељена на двије области D_1 и D_2 које немају заједничких унутрашњих тачака, тада је функција f интеграбилна и на областима D_1 и D_2 и вриједи
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$
4. Ако су функције f и g интеграбилне на области D, тада је функција $\alpha f + \beta g$, гдје су α и β произвољни реални бројеви, такође интеграбилна на D и вриједи
$$\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)dxdy + \beta \iint_D g(x,y)dxdy.$$

5. Ако су функције f и g интеграбилне на области D, тада су и функције fg и $\frac{f}{g}, g \neq 0$ интеграбилне на D.

6. Ако су функције f и g интеграбилне на области D и ако је за $(x, y) \in D$

$$f(x, y) \leq g(x, y),$$

тада је

$$\iint_D f(x, y) dxdy \leq \iint_D g(x, y) dxdy.$$

7. Ако је функција f интеграбилна на D, тада је и функција $|f|$ интеграбилна на D и вриједи

$$\left| \iint_D f(x, y) dxdy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dxdy.$$

8. Ако је функција f ненегативна и интеграбилна на области D и ако је $D^* \subset D$, тада је

$$\iint_{D^*} f(x, y) dxdy \leq \iint_D f(x, y) dxdy.$$

Као и код одређеног интеграла, за двојни интеграл вриједи **теорема о средњој вриједности**.

Теорема 3.5. (Теорема о средњој вриједности) *Нека је функција* f *интеграбилна на* D *и нека је* $m = \inf_{x \in D} f(x, y)$ *и* $M = \sup_{x \in D} f(x, y)$. *Тада постоји* $\lambda, m \leq \lambda \leq M$, *такав да је*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lambda \mu(D). \tag{3.5}$$

Ако је функција f *непрекидна на* D, *тада постоји тачка* $(\xi, \eta) \in D$ *таква да је* $\lambda = f(\xi, \eta)$ *па је*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \mu(D). \tag{3.6}$$

3.2.4. Рачунање двојног интеграла

Рачунање двојног интеграла се своди на рачунање два узастопна одређена интеграла. За рачунање двојног интеграла по правоугаонику вриједи сљедећа теорема.

Теорема 3.6. *Нека је функција* $f(x,y)$ *интеграбилна на правоугаонику* $R=[a,b]\times[c,d]$. *Ако за свако* $x\in[a,b]$ *постоји одређени интеграл*

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)dy$$

тада постоји и интеграл

$$\int_a^b I(x)dx=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

и при томе је

$$\iint_R f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx. \tag{3.7}$$

Аналогно, ако за свако $y \in [c, d]$ постоји одређени интеграл

$$J(y) = \int_a^b f(x, y)dx,$$

тада постоји и интеграл

$$\int_c^d J(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

и вриједи

$$\iint_R f(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy. \tag{3.8}$$

Примјер 3.1. Израчунати интеграл

$$\iint_R x^2 y dxdy$$

гдје је R правоугаоник $2 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 4$.

Рјешење:

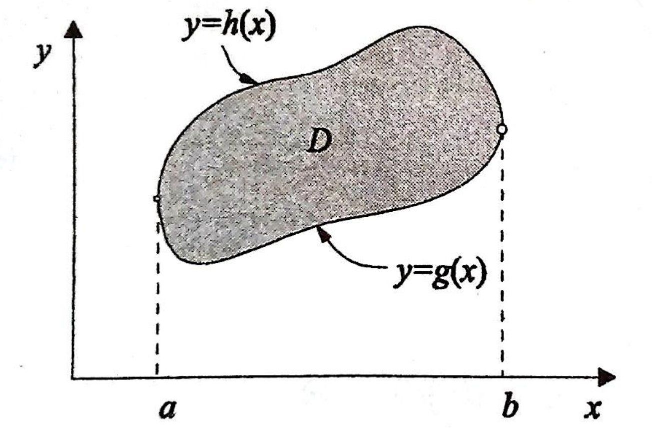
$$\iint_R x^2 y dxdy = \int_2^4 \left(\int_1^4 x^2 y dy \right) dx = \int_2^4 x^2 \left(\frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_1^4 dx =$$

$$\frac{15}{2} \int_2^4 x^2 \, dx = \frac{15}{2} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_2^4 = 140. \square$$

Посматрајмо сада ограничену затворену област D која се може представити у облику

$$D = \{(x, y): a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\} \tag{3.9}$$

гдје су g и h непрекидне функције на сегменту $[a, b]$ (Слика 3.3).



Слика 3.3.

Правило за рачунање интеграла функције $f(x, y)$ по области D даје сљедећа теорема.

Теорема 3.7. *Нека је функција* $f(x,y)$ *интеграбилна на области* D. *Ако за свако* $x \in [a,b]$ *постоји интеграл*

$$I(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

тада постоји и интеграл

$$\int_a^b I(x)dx = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

и при томе је

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy\right)dx. \tag{3.10}$$

Доказ: Нека је $R = [a,b] \times [c,d]$ правоугаоник који садржи област D и нека је $\check{f}(x,y)$ функција дефинисана на R са (3.4). Користећи дефиницију двојног интеграла (3.4_1) и Теорему 3.6 добијамо

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d \check{f}(x,y)dy\right)dx.$$

Даље је

$$\int_c^d \check{f}(x,y)dy = \int_c^{g(x)} \check{f}(x,y)dy + \int_{g(x)}^{h(x)} \check{f}(x,y)dy + \int_{h(x)}^d \check{f}(x,y)dy = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

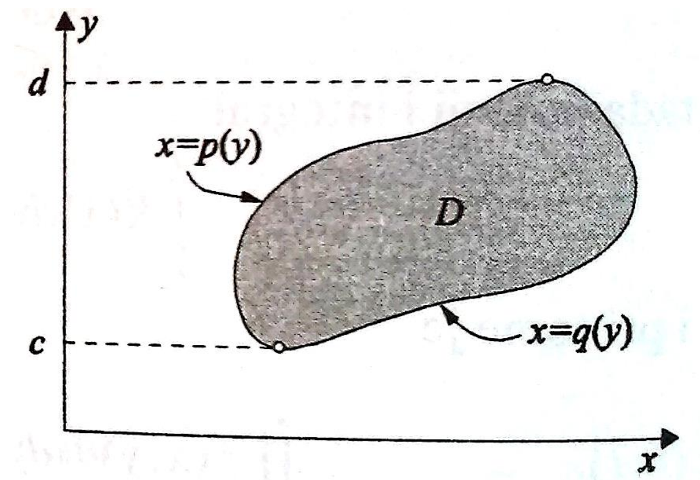
одакле добијамо формулу (3.10). Теорема је доказана. □

Слично, ако се област D може представити у облику (Слика 3.4)

$$D = \{(x, y): c \leq y \leq d, p(y) \leq x \leq q(y)\} \tag{3.11}$$

тада је

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y)dx \right) dy. \tag{3.12}$$



Слика 3.4.

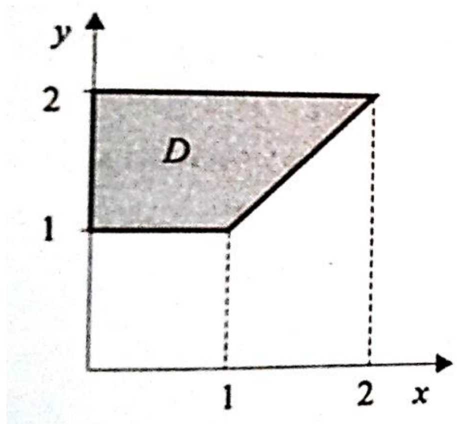
Уколико се област D не може представити на један од два наведена начина, тада је треба подијелити на коначно много области облика (3.9) или (3.11). У том случају интеграл по области D се добија као збир интеграла по подобластима добијеним таквом подјелом области D.

Примјер 3.2. Израчунати интеграл

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy$$

гдје је област D ограничена линијама $y = x, x = 0, y = 1, y = 2$.

Рјешење: Област D је представљена на Слици 3.5.



Слика 3.5.

$$I = \int_0^1 \left(\int_1^2 (x^2 + y^2)dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_x^2 (x^2 + y^2)dy \right) dx =$$

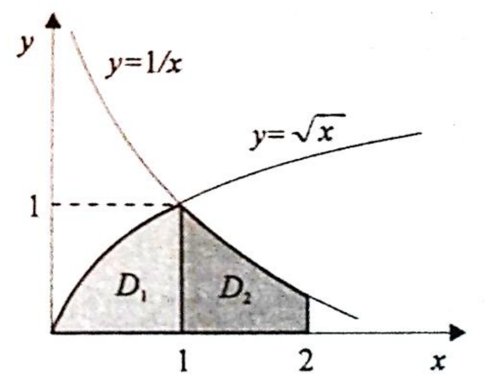
$$\int_1^2 \left(\int_0^y (x^2 + y^2)dx \right) dy = 5. \square$$

Примјер 3.3. Израчунати интеграл

$$I = \iint_D x^2 y dx dy$$

гдје је област D ограничена линијама $yx = 1, y = \sqrt{x}, x = 2$.

Рјешење: Област D је представљена на Слици 3.6.



Слика 3.6.

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} x^2 y dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{1}{x}} x^2 y dy \right) dx =$$

$$\int_0^{1/2} \left(\int_{y^2}^2 x^2 y dx \right) dy + \int_{1/2}^1 \left(\int_{y^2}^{\frac{1}{y}} x^2 y dx \right) dy = \frac{5}{8}. \square$$

Примјер 3.4. Израчунати интеграл

$$I = \iint_D (x-y)dxdy$$

гдје је област D ограничена линијама $y = 2 - x^2$, $y = 2x - 1$.

Рјешење: Пресјечне тачке параболе и праве су $(-3,7)$ и $(1,1)$. Имамо

$$I = \int_{-3}^{1} \left(\int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)dy \right) dx = \int_{-3}^{1} \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{2x-1}^{2-x^2} dx =$$

$$\int_{-3}^{1} \left(x(2 - x^2 - 2x + 1) - \frac{(2-x^2)^2 - (2x-1)^2}{2} \right) dx = \frac{64}{15}.$$

Задатак можемо урадити и промјеном поретка интеграције. У том случају из једначина параболе и праве изражавамо x као функцију промјенљиве y. Из једначине праве добијамо

$$x = \frac{y+1}{2}$$

и из једначине параболе

$$x = -\sqrt{2-y}, x \leq 0 \text{ и } x = \sqrt{2-y}, x \geq 0.$$

Тада је

$$I = \int_{-7}^{1}\left(\int_{-\sqrt{2-y}}^{\frac{y+1}{2}}(x-y)dx\right)dy + \int_{1}^{2}\left(\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}}(x-y)dx\right)dy =$$

$$\int_{-7}^{1}\left(\frac{x^2}{2}-xy\right)\Bigg|_{-\sqrt{2-y}}^{\frac{y+1}{2}}dy + \int_{1}^{2}\left(\frac{x^2}{2}-xy\right)\Bigg|_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}}dy =$$

$$\int_{-7}^{1}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{(y+1)^2}{4}-(2-y)\right)-y\left(\frac{y+1}{2}+\sqrt{2-y}\right)\right)dy - 2\int_{1}^{2}y\sqrt{2-y}\,dy = \frac{64}{15}.\ \square$$

3.2.5. Смјена промјенљиве у двојном интегралу

Рачунање двојних интеграла помоћу формула (3.10) и (3.12) може да буде компликовано, па се уводе смјене промјенљивих како би се поједноставила подинтегрална функција или област интеграције. Код одређених интеграла уводили смо смјену промјенљиве да бисмо поједноставили подинтегралну функцију, док нам је код двојних интеграла углавном циљ прелазак на једноставнију област интеграције.

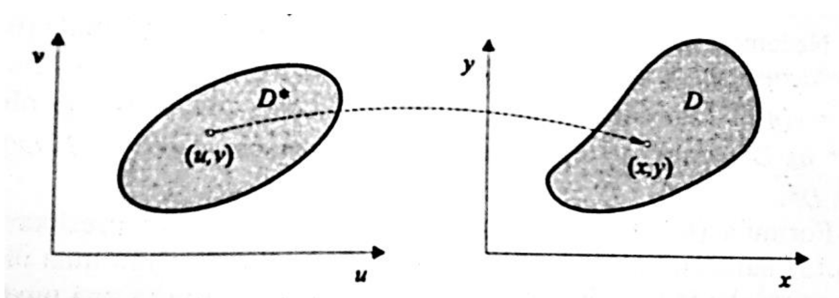
Нека је дато пресликавање

$$x = x(u, v), y = y(u, v) \tag{3.13}$$

и нека је D^* област у uv −равни која се добија као слика области D при пресликавању (3.13).

Претпостављамо да је пресликавање (3.13) **обострано једнозначно**, па је из (3.13) могуће изразити u и v помоћу x и y:

$$u = u(x, y), v = v(x, y) \tag{3.14}$$



Слика 3.7.

Пресликавање (3.14) је инверзно пресликавање пресликавања (3.13), Слика 3.7.

Посматраћемо пресликавања код којих функције $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ имају непрекидне парцијалне изводе првог реда на D^*. У том случају кажемо да су функције $x(u,v)$ и $y(u,v)$ **непрекидно-диференцијабилне** на D^*.

Функционална детерминанта

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \tag{3.15}$$

се назива **Јакобијева детерминанта** [7] или **јакобијан** пресликавања (3.13).

Јакобијан можемо израчунати и помоћу формуле

$$\frac{1}{J(u,v)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}. \tag{3.15$_1$}$$ [8]

[7] Carl Gustav Jacobi (1804-1851), њемачки математичар

[8] Формулу (3.15$_1$) можемо користити уколико уочимо пресликавање (3.14) $u = u(x,y), v = v(x,y)$, а за рјешавање двојног интеграла није нужно одређивање инверзног пресликавања $x = x(u,v), y = y(u,v)$.

Без доказа наводимо формулу којом се успоставља везу између интеграла функције $f(x, y)$ на области D и функције $f\big(x(u, v), y(u, v)\big)$ на области D^*.

Теорема 3.8. (Формула за смјену промјенљивих у двојном интегралу) *Нека је* $f(x, y)$ *интеграбилна на затвореној и ограниченој области D и нека су испуњени сљедећи услови:*

1. *пресликавање (3.13) области* D *у област* D^* *је обострано једнозначно,*
2. *функције* $x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ *су непрекидно-диференцијабилне на* D^* *и*
3. $J(u, v) \neq 0$ *на* D^*.

Тада је

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D^*} f\big(x(u, v), y(u, v)\big)|J(u, v)|dudv \tag{3.16}$$

Показује се да се формула (3.16) може користити и ако је услов једнозначности пресликавања (3.13) нарушен на неком скупу из D^* који има површину једнаку нули или ако је јакобијан једнак нули на неком скупу из D^* површине нула.

Примјер 3.5. Израчунати интеграл

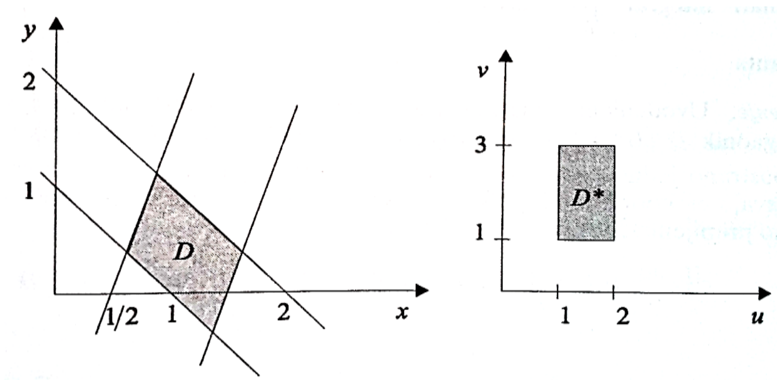
$$I = \iint_D (2x - y)dxdy$$

гдје је област D ограничена линијама

$$x + y = 1, \qquad x + y = 2, \qquad 2x - y = 1, \qquad 2x - y = 3.$$

Рјешење: Уведимо смјену

$$x + y = u,\ 2x - y = v.$$



Слика 3.8.

Тада је

$$f\big(x(u,v), y(u,v)\big) = 2x - y = v.$$

и област D се слика у правоугаоник

$D^* = \{(u,v) : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 3\}$, Слика 3.8.

За одређивање јакобијана користимо (3.15_1).

$$\frac{1}{J(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow |J(u,v)| = \frac{1}{3}.$$

Дакле,

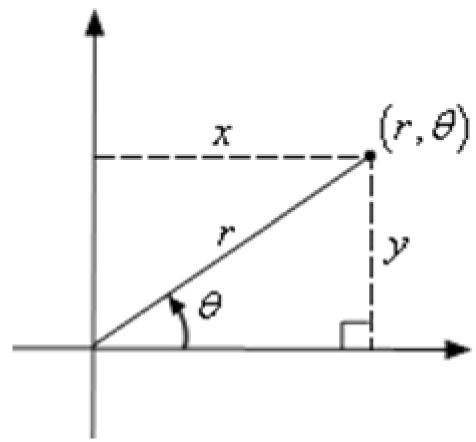
$$I = \frac{1}{3}\iint_{D^*} v\, dudv = \frac{1}{3}\int_1^2 \left(\int_1^3 vdv\right) du = \frac{4}{3}. \square$$

3.2.5.1. Поларне координате

Ако подинтегрална функција или једначина границе области садржи израз $x^2 + y^2$, рачунање двојног интеграла често се поједностављује увођењем **поларних координата** r и θ.

Веза између правоуглих и поларних координата је дата једначинама (Слика 3.9)

$$x = rcos\theta, y = rsin\theta. \tag{3.17}$$



Слика 3.9.

Из значења поларних координата r и θ јасно је да се круг $x^2 + y^2 \leq a^2$ слика на правоугаоник $0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq a$.

Пресликавање дато са (3.17) је обострано једнозначно ако је $r > 0$ и ако θ ограничимо на интервал облика $\theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi$.

Функције $x(r,\theta) = rcos\theta$, $y(r,\theta) = rsin\theta$ су непрекидно-диференцијабилне и јакобијан је

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & -rsin\theta \\ sin\theta & rcos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Из формуле (3.16) добијамо формулу за смјену промјенљивих у поларним координатама

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(rcos\theta, rsin\theta)rdrd\theta. \tag{3.18}$$

Јакобијан је једнак нули ако је $r = 0$, али то не утиче на ваљаност формуле (3.18) јер је скуп тачака за које је $r = 0$ површине нула.

Ако подинтегрална функција или једначина границе области садржи израз $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, рачунање двојног интеграла се поједностављује увођењем **уопштених поларних координата** r и θ

$$x = arcos\theta, y = brsin\theta. \tag{3.18$_1$}$$

Тада је $J(r,\theta) = abr$, а област ограничена елипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ се слика у правоугаоник

$$0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 1.$$

Примјер 3.6. Израчунати интеграл

$$\iint_D \ln(x^2+y^2)dxdy$$

гдје је D: $e^2 \leq x^2+y^2 \leq e^4$.

Рјешење: Уводимо поларне координате: $x = rcos\theta,\ y = rsin\theta,\ J(r,\theta) = r$. Област интеграције је кружни прстен, па је $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и $e \leq r \leq e^2$. Дакле

$$I = \iint_{D^*} r\ln r^2\, drd\theta = 2\int_0^{2\pi}\left(\int_e^{e^2} r\ln r dr\right)d\theta = 4\pi\int_e^{e^2} r\ln r dr = \pi e^2(3e^2-1). \square$$

Примјер 3.7. Израчунати интеграл

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy$$

гдје је D: $x^2+y^2 \leq 4x$.

Рјешење: Уводимо поларне координате: $x = rcos\theta,\ y = rsin\theta,\ J(r,\theta) = r$. Уврштавањем у једначину кружнице $x^2+y^2 = 4x$, добијамо

$$r = 4cos\theta.$$

Пошто је $r \geq 0$, одавде добијамо $cos\theta \geq 0$ тј. $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Уочимо да смо исти закључак могли извести и на основу слике области D, јер је D помјерени круг са центром у тачки (2,0) и полупречника 2 који се налази у области $x \geq 0$. Дакле, границе за θ и r су:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 4cos\theta.$$

Имамо

$$I = \iint_{D^*} r^3\, drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{4cos\theta} r^3 dr \right) d\theta = 64 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^4\theta d\theta =$$

$$16 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + cos2\theta)^2 d\theta = 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2cos2\theta + \frac{1 + cos4\theta}{2} \right) d\theta = 32 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 24\pi.$$

Задатак смо могли урадити и увођењем **помјерених поларних координата**:

$$x - 2 = rcos\theta, \;\; y = rsin\theta, \;\; J(r, \theta) = r.$$

У том случају је $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и $0 \leq r \leq 2$ па имамо

$$I = \iint_{D^*} ((2 + rcos\theta)^2 + r^2 sin^2\theta) r\, drd\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (4 + 2rcos\theta + r^2) rdr \right) d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(8 + \frac{8}{3} cos\theta + 4 \right) d\theta = 24\pi. \square$$

3.2.6. Примјене двојних интеграла

3.2.6.1. Рачунање површине раванске фигуре

Из особина двојног интеграла имамо да је

$$\iint_D dxdy = \mu(D)$$

гдје је D ограничена област у xy −равни која има површину.

Примјер 3.8. Израчунати површину области ограничене линијама

$$x = 4y - y^2, x + y = 6.$$

Рјешење:

$$\mu(D) = \iint_D dxdy = \int_2^3 \left(\int_{6-y}^{4y-y^2} dx \right) dy = \int_2^3 (5y - y^2 - 6) dy = \frac{1}{3}. \square$$

Примјер 3.9. Израчунати површину области ограничене линијама

$$xy = 1, xy = 3, y^2 = x, y^2 = 2x.$$

Рјешење: Уводимо смјену промјенљивих

$$xy = u, \qquad \frac{y^2}{x} = v.$$

Тада је слика области D правоугаоник $D^*: 1 \leq u \leq 3, 1 \leq v \leq 2$.

Даље је

$$\frac{1}{J(u,v)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{3y^2}{x} = 3v \Rightarrow |J(u,v)| = \frac{1}{3v}.$$

Имамо

$$\mu(D) = \iint_D dxdy = \frac{1}{3}\iint_{D^*} \frac{1}{v} dudv = \frac{1}{3}\int_1^3 \left(\int_1^2 \frac{1}{v} dv\right) du = \frac{2}{3}\ln 2. \square$$

Примјер 3.10. Израчунати површину области ограничене елипсом

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Рјешење: Уводимо уопштене поларне координате (3.19) за $a = 2$ и $b = 1$:

$$x = 2r cos\theta, y = r sin\theta.$$

Тада је $J(r,\theta) = abr = 2r$ и добијамо

$$\mu(D) = \iint_D dxdy = 2\iint_{D^*} r dr d\theta = 2\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r dr\right) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \square$$

3.2.6.2. Рачунање запремине тијела

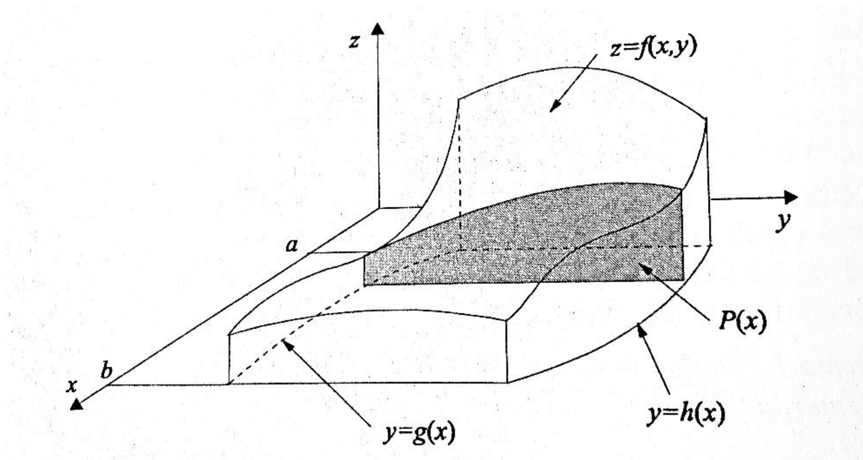
Нека је T тијело које се може представити у облику

$$T = \{(x, y, z): 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in D\}$$

гдје је f ненегативна и непрекидна функција на области

$$D = \{(x, y): a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

(Слика 3.10).



Слика 3.10

На основу Теореме 3.5 имамо

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)dy\right) dx.$$

Даље је

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy = P(x)$$

гдје је $P(x)$ површина попречног пресјека $P(x)$ тијела T пресјеченог са равни која је паралелна yz −равни. Према томе добијамо

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b P(x)\, dx$$

што представља запремину тијела T.[9] Дакле, **запремина тијела** $\mu(T)$ је дата са

$$\mu(T) = \iint_D f(x,y)dxdy. \tag{3.19}$$

Формула (3.19) важи и у случају да је D произвољна затворена област.

Ако су функције f и g непрекидне на D и ако је $f \leq g$ на D, тада двојни интеграл

$$\iint_D (f(x,y) - g(x,y))dxdy \tag{3.19_1}$$

представља запремину тијела ограниченог графицима функција f и g.

[9] Показује се да постоје тијела која немају запремину. Потребан и довољан услов да би тијело имало запремину јесте да његова граница има запремину нула. Уколико се граница тијела састоји од коначно много површи облика $z = f(x,y), x = g(y,z)$ и $y = h(x,z)$, гдје су f, g и h непрекидне функције, тада тијело има запремину.

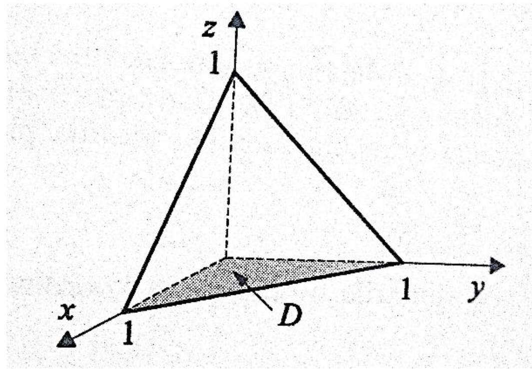
Примјер 3.11. Израчунати запремину тијела ограниченог равнима

$$x = 0, y = 0, z = 0, \qquad x + y + z = 1.$$

Рјешење: Тијело је приказано на Слици 3.11. Имамо

$$\mu(T) = \iint_D (1 - x - y)dxdy =$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1 - x - y)dy \right) dx = \frac{1}{6}. \square$$

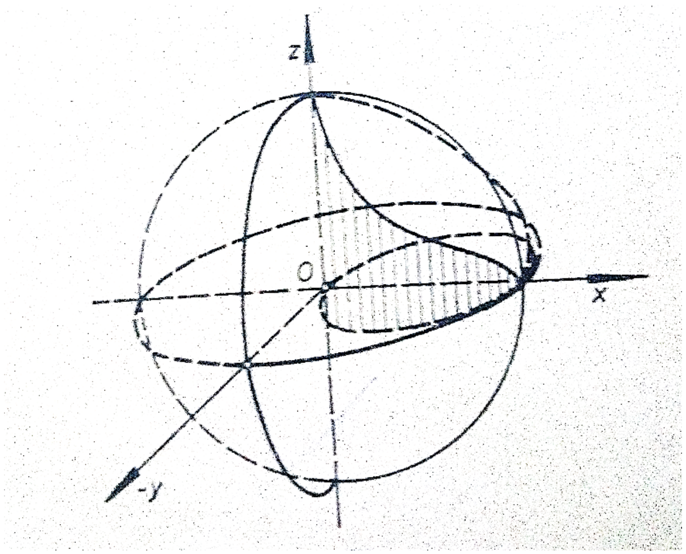


Слика 3.11

Примјер 3.12. Израчунати запремину Виванијевог тијела ограниченог површима

$$x^2 + y^2 = ax, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = a^2 .$$

Рјешење: Тијело се састоји од 4 једнака дијела, од којих је су два приказана на Слици 3.12. Имамо



Слика 3.12

$$\mu(T) = 2\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy$$

гдје је D круг

$$x^2 + y^2 \leq ax.$$

Уводећи поларне координате

$$x = rcos\theta, \;\; y = rsin\theta, \;\; J(r,\theta) = r$$

добијамо

$$\mu(T) = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{acos\theta}\sqrt{a^2 - r^2}rdr\right)d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{acos\theta}\sqrt{a^2 - r^2}rdr\right)d\theta =$$

$$\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - sin^3\theta)\,d\theta = \frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right). \square$$

3.2.6.3. Рачунање масе плоче, координата центра теже и момената инерције плоче

Посматрамо танку плочу која има облик раванске фигуре D са густином материје размазане по тој плочи $\rho(x,y)$. Ако је плоча хомогена, тј. ако је њена густина константна, тада је маса материје размазане на D једнака производу површине плоче и константне густине.

Ако густина није константна, тада се **маса плоче** рачуна по формули

$$m(D) = \iint_D \rho(x,y)dxdy. \tag{3.20}$$

Центар теже плоче D која има густину $\rho(x,y)$ је тачка $(\bar{x},\bar{y})$ чије су координате

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)dxdy\,, \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)dxdy\,. \tag{3.21}$$

Ако је плоча хомогена, тада је

$$\bar{x} = \frac{\iint_D xdxdy}{\iint_D dxdy}, \qquad \bar{y} = \frac{\iint_D ydxdy}{\iint_D dxdy}.$$

Моменат инерције материјалне тачке у односу на тачку (праву, раван) је једнак производу масе тачке (праве, равни) и квадрата њеног растојања од те тачке (праве, равни). Моменат инерције система материјалних тачака једнак је збиру момената инерције тих тачака.

Показује се да су **моменти инерције плоче D у односу на x, односно y −осу** једнаки

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y)dxdy\,,$$

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)dxdy. \qquad (3.22)$$

Моменат инерције у односу на координатни почетак је једнак збиру момената инерције у односу на x и y −осу, тј.

$$I_0 = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy. \qquad (3.22_1)$$

Примјер 3.13. Одредити координате центра теже плоче $D: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ која има густину $\rho(x, y) = x^2 + y^2$.

Рјешење: Имамо

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_D x(x^2 + y^2) dxdy, \qquad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D y(x^2 + y^2) dxdy$$

гдје је

$$m = \iint_D (x^2 + y^2) dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r^3 dr \right) d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

Дакле,

$$\bar{x} = \frac{8}{\pi} \iint_D x(x^2 + y^2) dxdy = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r^4 cos\theta dr \right) d\theta = \frac{8}{5\pi}$$

и

$$\bar{y} = \frac{8}{\pi} \iint_D y(x^2 + y^2) dxdy = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r^4 sin\theta dr \right) d\theta = \frac{8}{5\pi}. \square$$

3.2. ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛИ

3.2.1. Тројни интеграл по области

Нека је функција $f(x, y, z)$ ограничена и дефинисана на затвореној ограниченој области T која има запремину. Подијелимо област T на n дијелова $T_1, T_2, \dots, T_n$ тако да скупови T_i имају запремину, да је пресјек свака два од тих скупова запремине нула и да је

$$\mu(T) = \sum_{i=1}^{n} \mu(T_i).$$

Изаберимо у сваком скупу T_i произвољну тачку (ξ_i, η_i, ζ_i) и формирајмо суму

$$\sigma(f, P, \xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \mu(T_i) \tag{3.23}$$

која одговара датој подјели области T и избору тачака $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i), i = 1, \dots, n$. Сума (3.23) се назива **(Риманова) интегрална сума** функције f.

Нека је $d(T_i)$ дијаметар скупа T_i, тј. највеће растојање између двије тачке тог скупа и нека је

$$\lambda(P) = \max_{i} d(T_i)$$

дијаметар или норма подјеле P.

Дефиниција 3.3. *Ако постоји коначна гранична вриједност*

$$I = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi, \eta, \zeta) \tag{3.24}$$

независно од подјеле области T и избора тачака (ξ_i, η_i, ζ_i), *тада се број I назива* ***тројни интеграл*** *функције* $f(x, y, z)$ *по области T и означава са*

$$I = \iiint_T f(x, y, z)dxdydz \tag{3.25}$$

Дакле,

$$I = \iiint_T f(x, y, z)dxdydz = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi, \eta, \zeta)\,.$$

За функцију $f(x, y, z)$ чија интегрална сума има коначну граничну вриједност када параметар подјеле тежи нули, кажемо да је **интеграбилна** на T.

Услови интеграбилности функције $f(x, y, z)$ су слични условима интеграбилности функције $f(x, y)$ код двојних интеграла.

Тако је о**граниченост функције** $f(x, y, z)$ **потребан услов за њену интеграбилност,** тј. ако је функција интеграбилна на T, онда је она на T ограничена.

Услов непрекидности је довољан за интеграбилност функције, тј. свака непрекидна функција $f(x, y, z)$ на T је интеграбилна на T.

3.2.2. Особине тројног интеграла

Особине тројних интеграла су сличне особинама двојних интеграла.

1. Нека је $\mu(T)$ запремина области T. Тада је

$$\iiint_T dxdydz = \mu(T).$$

2. Ако је $T^* \subset T$ и ако је функција f интеграбилна на T, тада је функција f интеграбилна на T^*.

3. Ако је функција f интеграбилна на области T која је подијељена на двије области T_1 и T_2 које немају заједничких унутрашњих тачака, тада је функција f интеграбилна и на областима T_1 и T_2 и вриједи

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{T_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{T_2} f(x,y,z)dxdydz.$$

4. Ако су функције f и g интеграбилне на области T, тада је функција $\alpha f + \beta g$, гдје су α и β произвољни реални бројеви, такође интеграбилна на T и вриједи

$$\iiint_T (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))dxdydz = \alpha \iiint_T f(x,y,z)dxdydz + \beta \iiint_T g(x,y,z)dxdydz.$$

5. Ако су функције f и g интеграбилне на области T, тада су и функције fg и $\frac{f}{g}, g \neq 0$ интеграбилне на T.

6. Ако су функције f и g интеграбилне на области T и ако је за $(x, y, z) \in T$

$$f(x, y, z) \leq g(x, y, z),$$

тада је

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_T g(x, y, z) dx dy dz.$$

7. Ако је функција f интеграбилна на T, тада је и функција $|f|$ интеграбилна на T и вриједи

$$\left| \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz \right| \leq \iiint_T |f(x, y, z)| dx dy dz.$$

8. Ако је функција f ненегативна и интеграбилна на области T и ако је $T^* \subset T$, тада је

$$\iiint_{T^*} f(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz.$$

Као и код двојног интеграла, за тројни интеграл вриједи **теорема о средњој вриједности**.

Теорема 3.9. (Теорема о средњој вриједности) *Нека је функција* f *интеграбилна на* T *и нека је* $m = \inf_{(x,y,z)\in T} f(x,y,z)$ *и* $M = \sup_{(x,y,z)\in T} f(x,y,z)$. *Тада постоји* λ, $m \leq \lambda \leq M$, *такав да је*

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \lambda\mu(T). \tag{3.26}$$

Ако је функција f *непрекидна на* T, *тада постоји тачка* $(\xi,\eta,\zeta) \in T$ *таква да је*

$$\lambda = f(\xi,\eta,\zeta)$$

па је

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = f(\xi,\eta,\zeta)\mu(T). \tag{3.26$_1$}$$

3.2.3. Рачунање тројног интеграла

Рачунање тројног интеграла се своди на рачунање три узастопна одређена интеграла. За рачунање тројног интеграла по паралелепипеду вриједи сљедећа теорема.

Теорема 3.10. *Нека је функција* $f(x,y,z)$ *интеграбилна на паралелепипеду*

$$T = \{(x,y,z): a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2, c_1 \leq z \leq c_2\}.$$

Тада је

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \int_{a_1}^{a_2}\left(\int_{b_1}^{b_2}\left(\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx =$$
$$\int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz. \tag{3.27}$$

Ако се област T може представити у облику

$$T = \{(x, y, z): h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y), (x, y) \in D\}$$

гдје је D ограничена затворена област у xy −равни, онда је

$$\iiint_T f(x, y, z)dxdzdy = \iint_D \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right)dxdy. \tag{3.28}$$

Ако се притом област D може представити у облику

$$D = \{(x, y): a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

формула (3.28) постаје

$$\iiint_T f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)dz. \tag{3.28$_1$}$$

Примјер 3.14. Израчунати интеграл

$$I = \iiint_T z dx dy dz$$

гдје је T тијело ограничено површима $x = 0,\ x = \frac{1}{2},\ y = x, y = 2x,\ z = 0$ и $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Рјешење:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{2x} dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z dz = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \left(\int_x^{2x} \left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dy =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{2x} (x^2 + y^2)\, dy = \frac{5}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} x^3 dx = \frac{5}{192}. \square$$

3.2.4. Смјена промјенљиве у тројном интегралу

Нека је дато пресликавање

$$x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w) \tag{3.29}$$

и нека је T^* област у uvw −простора која се добија као слика области T при пресликавању (3.29).

Претпостављамо да је пресликавање (3.29) **обострано једнозначно**, па је из (3.29) могуће изразити u, v, w помоћу x, y, z:

$$u = u(x, y, z), v = v(x, y, z), w = w(x, y, z) \tag{3.29$_1$}$$

Посматраћемо пресликавања код којих су функције $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$ непрекидно-дифернцијабилне на T^*. Нека је

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \tag{3.30}$$

јакобијан пресликавања (3.29) и нека је $J(u, v, w) \neq 0$ на T^*.

Вриједи сљедећа формула којом се успоставља везу између интеграла функције $f(x,y,z)$ на области T и интеграла функције $f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))$ на области T^*.

Теорема 3.11. (Формула за смјену промјенљивих у тројном интегралу) *Нека је* $f(x,y,z)$ *интеграбилна на затвореној и ограниченој области T и нека су испуњени сљедећи услови:*

1. *пресликавање (3.29) области T у област* T^* *је обострано једнозначно,*
2. *функције* $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$ *су непрекидно-диференцијабилне на* T^* *и*
3. $J(u,v,w) \neq 0$ *на* T^*.

Тада је

$$\iiint\limits_{T} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{T^*} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J(u,v,w)|dudvdw \quad (3.31)$$

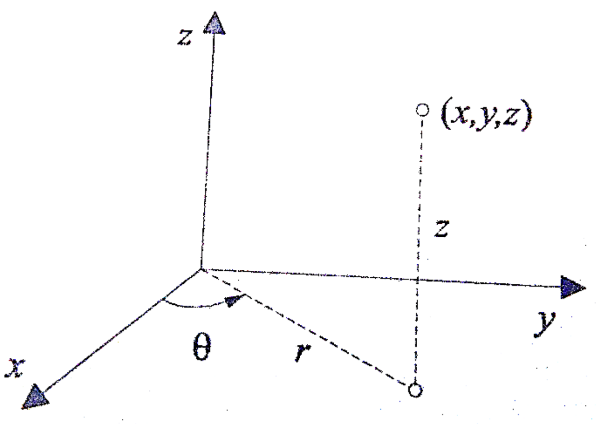
Показује се да се формула (3.31) може користити и ако је услов једнозначности пресликавања (3.29) нарушен на неком скупу из T^* који има запремину једнаку нули или ако је јакобијан једнак нули на неком скупу из T^* запремине нула.

3.2.4.1. Цилиндричне координате

Ако пројекција границе тијела T у xy −раван садржи израз $x^2 + y^2$, рачунање тројног интеграла се поједноставља увођењем **цилиндричних координата** r, θ и z.

Веза између правоуглих и цилиндричних координата је дата једначинама (Слика 3.13)

$$x = rcos\theta, y = rsin\theta, \qquad z = z \tag{3.32}$$



Слика 3.13.

Пресликавање дато са (3.32) је обострано једнозначно ако је $r > 0$ и ако θ ограничимо на интервал облика $0 \leq \theta < 2\pi$.

Функције $x(r,\theta,z) = rcos\theta, y(r,\theta,z) = rsin\theta, z(r,\theta,z) = z$ су непрекидно-диференцијабилне и јакобијан је

$$J(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & -rsin\theta & 0 \\ sin\theta & rcos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & -rsin\theta \\ sin\theta & rcos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Из формуле (3.31) добијамо формулу за смјену промјенљивих у цилиндричним координатама

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{T^*} f(rcos\theta, rsin\theta, z) r dr d\theta dz. \tag{3.33}$$

Јакобијан је једнак нули ако је $r = 0$, али то не утиче на ваљаност формуле (3.33) јер је скуп тачака за које је $r = 0$ запремине нула.

Из значења цилиндричних координата r, θ и z, јасно је да се ваљак

$$x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h$$

слика на квадар

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a, 0 \leq z \leq h.$$

Примјер 3.15. Израчунати интеграл

$$I = \iiint_T (x^2 + y^2)dxdydz$$

гдје је T тијело ограничено површима $x^2 + y^2 = 2z$ и $z = 2$.

Рјешење: Пројекција пресјечне криве параболоида и равни је кружница $x^2 + y^2 = 4$. Зато је пројекција тијела T у xy −раван круг $x^2 + y^2 \leq 4$. Ако уведемо цилиндричне координате

$$x = rcos\theta, y = rsin\theta, \qquad z = z, \qquad J(r,\theta,z) = r,$$

добијамо да се тијело T слика на

$$T^*: 0 \leq \theta \leq 2\pi, \qquad 0 \leq r \leq 2, \qquad \frac{r^2}{2} \leq z \leq 2.$$

Дакле

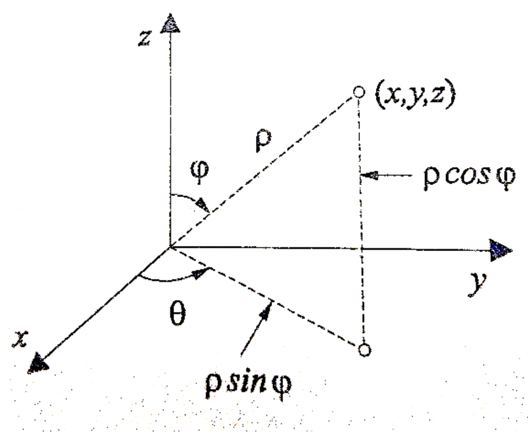
$$I = \iiint_T (x^2 + y^2)dxdydz = \iiint_{T^*} r^2 \cdot rd\theta drdz =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 dz = 2\pi \int_0^2 r^3 \left(2 - \frac{r^2}{2}\right) dr = \frac{16\pi}{3}. \square$$

3.2.4.2. Сферне координате

Веза између правоуглих и сферних координата је дата једначинама (Слика 3.14)

$$x = rcos\theta sin\varphi, \qquad y = rsin\theta sin\varphi, \qquad z = rcos\varphi. \tag{3.34}$$



Слика 3.14.

Пресликавање дато са (3.34) је обострано једнозначно ако је $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 \leq \varphi < \pi$.

Јакобијан пресликавања (3.33) је

$$J(r,\theta,\varphi)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}cos\theta sin\varphi & -rsin\theta sin\varphi & rcos\theta cos\varphi\\ sin\theta sin\varphi & rcos\theta sin\varphi & rsin\theta cos\varphi\\ cos\varphi & 0 & -rsin\varphi\end{vmatrix}=-r^2 sin\varphi.$$

Дакле,

$$|J(r,\theta,\varphi)|=r^2 sin\varphi$$

Из формуле (3.31) добијамо формулу за смјену промјенљивих у сферним координатама

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdzdy=\iiint_{T^*} f(rcos\theta sin\varphi, rsin\theta sin\varphi, rcos\theta)r^2 sin\varphi drd\theta d\varphi. \tag{3.35}$$

Јакобијан је једнак нули ако је $r=0$ или $\varphi=0$ али то не утиче на ваљаност формуле (3.35) јер су скупови тачака за које вриједе ови услови запремине нула.

Из значења сферних координата r,θ и φ јасно је да се кугла $x^2+y^2+z^2\leq a^2$ слика на квадар $0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq\varphi\leq\pi, 0\leq r\leq a$.

Примјер 3.16. Израчунати интеграл

$$I = \iiint_T \frac{dxdydz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

гдје је $T = \{(x, y, z): 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$.

Рјешење: Ако уведимо сферне координате

$$x = rcos\theta sin\varphi, \qquad y = rsin\theta sin\varphi, \qquad z = rcos\varphi, \qquad |J(r, \theta, \varphi)| = r^2 sin\varphi$$

добијамо да се тијела T слика на

$$T^*: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2.$$

Дакле

$$I = \iiint_T \frac{dxdydz}{x^2 + y^2 + z^2} = \iiint_{T^*} \frac{r^2 sin\varphi}{r^2} drd\theta d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\varphi d\varphi \int_1^2 dr = 2\pi. \square$$

Примјер 3.17. Израчунати интеграл

$$I = \iiint_T z^2 dxdydz$$

гдје је T ограничено површима $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z = h, h > 0$.

Рјешење: Пројекција пресјечне криве параболоида и равни је кружница $x^2 + y^2 = h^2$. Ако уведемо цилиндричне координате

$$x = rcos\theta, \qquad y = rsin\theta, \qquad z = z, \qquad J(r, \theta, z) = r.$$

добијамо да се тијело T слика на

$$T^*: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, \qquad r \leq z \leq h.$$

Дакле

$$I = \iiint_T z^2 dxdydz = \iiint_{T^*} z^2 \cdot rd\theta drdz =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 rdr \int_r^h z^2 dz = \frac{\pi h^5}{5}.$$

Задатак можемо урадити и помоћу сферних координата. Слика тијела T у сферним координатама је

$$T^{*}: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq \frac{h}{cos\varphi}.$$

Дакле

$$I = \iiint_{T} z^2 dxdydz = \iiint_{T^{*}} r^2 cos^2\varphi \cdot r^2 sin\varphi dr d\theta d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2\varphi sin\varphi d\varphi \int_0^{\frac{h}{cos\varphi}} r^4 dr = 2\pi \cdot \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2\varphi sin\varphi \, \frac{h^5}{cos^5\varphi} d\varphi =$$

$$\frac{2\pi h^5}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sin\varphi}{cos^3\varphi} d\varphi = \frac{2\pi h^5}{5} \cdot \frac{1}{2cos^2\varphi}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi h^5}{5}. \square$$

3.2.5. Примјене тројних интеграла

3.2.5.1. Рачунање запремине тијела

Из особина тројних интеграла добијамо да је **запремина тијела** T једнака

$$\iiint_T dxdydz = \mu(T). \tag{3.36}$$

Примјер 3.18. Израчунати запремину тијела ограниченог површима

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ и } z = x^2 + y^2.$$

Рјешење: Пројекцију пресјечне криве параболоида и конуса одређујемо из система

$$z^2 = x^2 + y^2 \text{ и } z = x^2 + y^2 \Rightarrow z^2 = z \Rightarrow z = 0 \vee z = 1.$$

Одавде добијамо $x^2 + y^2 = 1$. Ако уведимо цилиндричне координате

$$x = rcos\theta, y = rsin\theta, \qquad z = z, \qquad J(r, \theta, z) = r,$$

добијамо да се тијело T слика на

$$T^*: 0 \le \theta \le 2\pi, \qquad 0 \le r \le 1, \qquad r^2 \le z \le r.$$

Имамо

$$\mu(T) = \iiint_T dxdzdy = \iiint_{T^*} rdrd\theta dz =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rdr \int_{r^2}^{r} dz = 2\pi \int_0^1 r(r - r^2)dr = 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}. \square$$

3.2.5.2. Рачунање масе тијела, координата центра теже и момената инерције тијела

Ако је позната густина $\rho(x,y,z)$ тијела T, тада је његова **маса** једнака

$$m(T) = \iiint_T \rho(x,y,z)dxdydz. \tag{3.37}$$

Центар теже тијела која има густину $\rho(x,y,z)$ је тачка $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ чије су координате

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m}\iiint_T x\rho(x,y,z)dxdydz\,, \\ \bar{y} &= \frac{1}{m}\iiint_T y\rho(x,y,z)dxdydz, \\ \bar{z} &= \frac{1}{m}\iiint_T z\rho(x,y,z)dxdydz \end{aligned} \tag{3.38}$$

Ако је тијело хомогено, тада је

$$\bar{x} = \frac{\iiint_T xdxdydz}{\iiint_T dxdydz}, \qquad \bar{y} = \frac{\iiint_T ydxdydz}{\iiint_T dxdydz}, \qquad \bar{z} = \frac{\iiint_T zdxdydz}{\iiint_T dxdydz}.$$

Моменти инерције тијела T у односу на xy, xz и yz равни су једнаки

$$I_{xy} = \iiint_T z^2 \rho(x,y,z)dxdydz,$$
$$I_{xz} = \iiint_T y^2 \rho(x,y,z)dxdydz, \qquad (3.39)$$
$$I_{yz} = \iiint_T x^2 \rho(x,y,z)dxdydz.$$

Моменати инерције у односу на координатне осе су:

$$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz\,,$$
$$I_y = \iiint_T (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz, \qquad (3.40)$$
$$I_z = \iiint_T (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dxdydz.$$

Примјер 3.19. Израчунати моменат инерције хомогене сфере полупречника a масе m у односу на дијаметар.

Рјешење: Нека је центар сфере у координатном почетку и нека је дијаметар сфере одређен z −осом. Тада је моменат инерције у односу на дијаметар заправо моменат инерције у односу на z −осу. Дакле,

$$I_d = \iiint_T (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dxdydz.$$

Из $\rho(x, y, z) = K$ добијамо

$$m = K \iiint_T dxdydz = K \cdot \frac{4}{3}a^3\pi \Rightarrow K = \frac{3m}{4a^3\pi}.$$

Увођењем сферних координата добијамо

$$I_d = \iiint_T (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dxdydz = \frac{3m}{4a^3\pi} \iiint_{T^*} r^2 sin^2\varphi \cdot r^2 sin\varphi drd\theta d\varphi =$$

$$\frac{3m}{4a^3\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} sin^3\varphi d\varphi \int_0^{a} r^4 dr = \frac{3m}{4a^3\pi} 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{3m}{4a^3\pi} \cdot \frac{8a^5\pi}{15} = \frac{2a^2m}{5}. \square$$