УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 3- ПРЕДАВАЊА

Академска 2017/2018

6. ИНТЕГРАЦИЈА ФУНКЦИЈА КОМПЛЕКСНЕ ПРОМЈЕНЉИВЕ

ЛИТЕРАТУРА: **Момир В. Ћелић, Математика II,** Машински факултет, Бања Лука, 1997[1]

Наставник: Биљана Војводић

[1] У припреми предавања коришћена је и књига **Математика, Милош Томић** (Свјетлост, Сарајево, 1988)

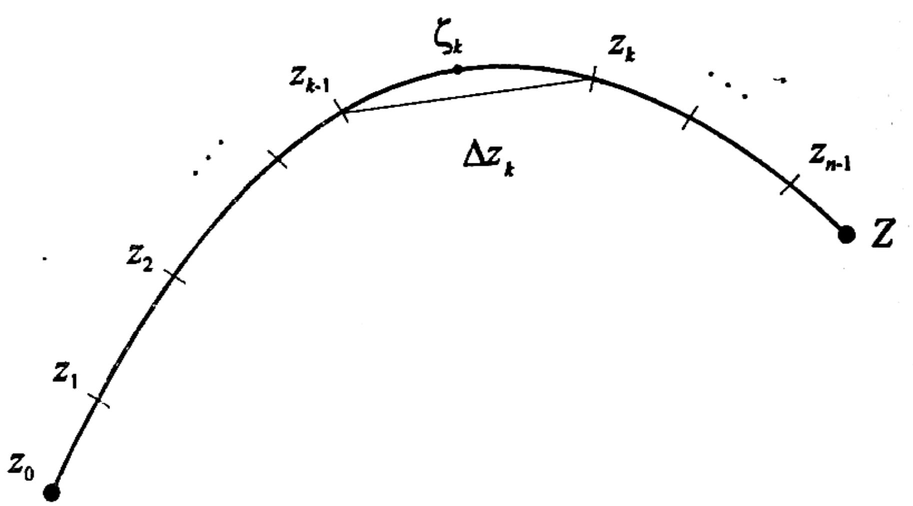
6. ИНТЕГРАЦИЈА ФУНКЦИЈА КОМПЛЕКСНЕ ПРОМЈЕНЉИВЕ

6.1. ИНТЕГРАЛ ФУНКЦИЈЕ КОМПЛЕКСНЕ ПРОМЈЕНЉИВЕ

Нека је C глатка крива у $z-$ равни представљена у облику

$$z(t) = x(t) + iy(t), \qquad a \leq t \leq b \tag{6.1}$$

и нека је $f(z)$ непрекидна функција дефинисана у некој области $z-$равни која садржи C.



Слика 6.1

Подијелимо интервал $a \leq t \leq b$ тачкама

$$a = t_0 < t_1 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

Овој подјели интервала $a \leq t \leq b$ одговара подјела криве C тачкама

$$z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = Z,$$

гдје је $z_k = z(t_k), k = 0,1,2, \dots n$, Слика 6.1.

Изаберимо на сваком дијелу криве C између тачака z_{k-1} и z_k произвољну тачку $\xi_k = z(\tau_k)$, $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k,\ k = 1,2, \dots n$.

Формирајмо интегралну суму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta z_k \tag{6.2}$$

гдје је $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}, k = 1,2, \dots n$. Означимо:

$$\lambda = \max_{k=1,2,\dots n} |\Delta z_k|.$$

Дефиниција 6.1. Ако независно од избора тачака $\xi_k, k = 1,2, \dots n$, постоји гранична вриједност низа интегралних сума $\{S_n\}$ кад $\lambda \to 0$, та гранична вриједност се назива **интеграл** функције $f(z)$ по оријентисаној кривој C и означава са

$$\int_C f(z) dz. \tag{6.3}$$

Из дефиниције 6.1 слиједе сљедеће **особине интеграла функције $\boldsymbol{f(z)}$:**

1. Интеграл линеарне комбинације функција је линеарна комбинација интеграла, тј.

$$\int_C (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_C f(z)dz + \beta \int_C g(z)dz, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

2. Ако се промијени оријентација криве C, мијења се знак интеграла, тј.

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = -\int_{Z}^{z_0} f(z)dz$$

   при чему се у интегралу на лијевој страни интеграција врши по путањи C од z_0 до $Z,$ а у интегралу на десној страни по путањи C од Z до z_0.

3. Ако је крива C подијељена на двије криве C_1 и C_2, тада је

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz.$$

Ако фукцију $f(z)$ у интегралу (6.3) представимо помоћу њеног реалног и имагинарног дијела, тј. у облику $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, онда добијамо формулу

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + iv)(dx + i\,dy) = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy. \tag{6.4}$$

Из формуле (6.4) добијамо да се **рачунање интеграла комплексне функције своди на рачунање криволинијских интеграла друге врсте, а тиме и на рачунање одређених интеграла.**

Из (6.4) и користећи репрезентацију криве (6.1) добијамо

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy =$$
$$\int_a^b \Big(u\big(x(t),y(t)\big)x'(t) - v\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)\,dt +$$
$$i\int_a^b \Big(v\big(x(t),y(t)\big)x'(t) - u\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)\,dt = \int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)dt,$$

тј. формулу којом се интеграл комплексне функције своди на одређени интеграл:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)dt. \tag{6.5}$$

Примјер 6.1. Израчунати интеграл

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}, n \in \mathbb{N},$$

гдје је C кружница са центром у тачки a и полупречника r.

Рјешење: $|z-a| = r \Rightarrow z = a + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$. Користећи формулу (6.5) добијамо

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt$$

Разликујемо случајеве $n = 1$ и $n \neq 1$. За $n = 1$ добијамо

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i,$$

док за $n \neq 1$ имамо

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \frac{1}{r^{n-1}(1-n)} e^{i(1-n)t} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Дакле,

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, n = 1 \\ 0, n \neq 1 \end{cases}. \square \tag{6.6}$$

6.2. КОШИЈЕВА ИНТЕГРАЛНА ТЕОРЕМА

Кошијева [2] интегрална теорема је један од најважнијих резултата у теорији функција комплексне промјенљиве.

У овој теореми посматрају се функције које су аналитичке у једноструко повезаној области, па уводимо појам једноструко повезане области.

Дефиниција 6.2. Кажемо да је област D из комплексне равни **једноструко повезана** ако унутрашњост сваке контуре која лежи у D чине само тачке области D. Област која није једноструко повезана назива се **вишеструко повезана област**.

Једноставна затворена крива (контура) која лежи у равни обично се назива **Жорданова крива.**

Теорема 6.1. (Коши) Ако је функција f аналитичка у једноструко повезаној области D и ако њен извод непрекидан на D, тада за сваку контуру C из D вриједи

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

[2] Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), француски математичар

Доказ: Пошто је извод функције f' непрекидан, то значи да су непрекидни и први парцијални изводи функција u и v, па можемо примијенити Гринову теорему на криволинијске интеграле у (6.4).
Добијамо

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C udx - vdy + i\oint_C vdx + udy =$$

$$\iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy. \tag{6.7}$$

Пошто је из Коши-Римановых услова

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

из (6.7) добијамо

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

и теорема је доказана. □

Претпоставка да је извод функције непрекидан се може изоставити, што је 1900. године доказао Гурса [3]. Тај доказ је сложенији па га изостављамо. Вриједи сљедећа **Кошијева интегрална теорема** која се зове и **Коши-Гурсаова теорема**.

Теорема 6.2. (Кошијева интегрална теорема) Ако је функција f аналитичка у једноструко повезаној области D, тада за сваку контуру C из D вриједи

$$\oint_C f(z)dz = 0. \tag{6.8}$$

Примјер 6.2. Функције $e^z, cosz, sinz, z^n$ су цијеле функције, па за сваку контуру из комплексне равни вриједи

$$\oint_C e^z dz = 0, \qquad \oint_C coszdz = 0, \qquad \oint_C sinzdz = 0, \qquad \oint_C z^n dz = 0. \square$$

[3] Eduard Goursat (1858-1936), француски математичар

Примјер 6.3. Пошто је функција

$$f(z) = \frac{1}{cosz}$$

аналитичка у области $D: |z| < \frac{\pi}{2}$, имамо

$$\oint_C \frac{1}{cosz} dz = 0$$

гдје је C јединична кружница. □

Примјер 6.4. Према формули (6.6) из Примјера 6.1 за $n = 2$ добијамо да је

$$\int_C \frac{1}{z^2} dz = 0,$$

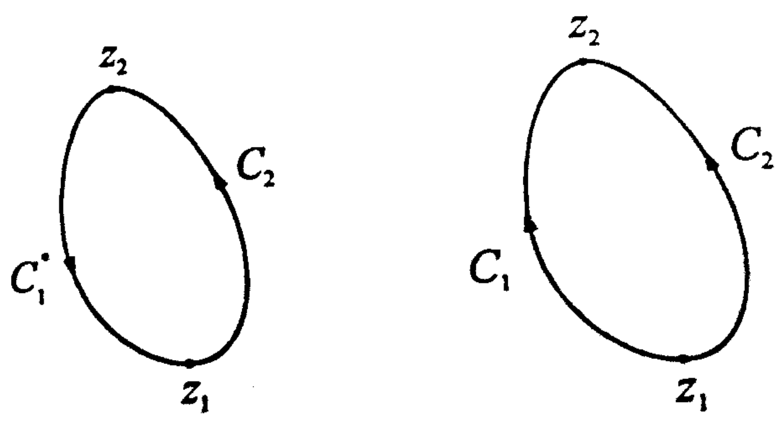
гдје је C јединична кружница. Овај резултат није посљедица Кошијеве интегралне теореме јер функција

$$f(z) = \frac{1}{z^2}$$

није аналитичка у $z = 0$.

Дакле, **услов аналитичности функције није потребан већ само довољан да би интеграл функције по произвољној контури у једноструко повезаној области био једнак нули.** □

Из Кошијеве интегралне теореме добијамо важну посљедицу која се односи на **независност интеграла аналитичке функције од путање интеграције** у једноструко повезаној области.



Слика 6.2

Ако подијелимо криву C тачкама z_1 и z_2 на криве ${C_1}^*$ и C_2 (Слика 6.2), из формуле (6.8) добијамо

$$\int_{{C_1}^*} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = 0.$$

Ако промијенимо оријентацију криве ${C_1}^*$ и са C_1 означимо нову путању, добијамо

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz.$$

Према томе, доказали смо сљедећу посљедицу.

Посљедица 6.1. Ако је функција $f(z)$ аналитичка у једноструко повезаној области D и ако су C_1 и C_2 произвољне криве из области D које имају заједничке крајње тачке z_1 и z_2, тада важи

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz\,.^{4} \tag{6.8$_1$}$$

[4] Формула (6.8$_1$) вриједи и у случају када криве C_1 и C_2 имају више заједничких тачака.

Дакле, **интеграл аналитичке функције у једноструко повезаној области не зависи од путање која спаја крајње тачке већ само до крајњих тачака** z_1 и z_2, па га можемо писати у облику

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz.$$

Одавде добијамо да за фиксирану тачку z_0 из области D, интеграл

$$\int_{z_0}^{z} f(t)dt = F(z) \tag{6.8$_2$}$$

дефинише функцију $F(z), z \in D$.

Кошијева интегрална теорема вриједи и у случају ако је контура C граница области D.

Теорема 6.3. Нека је D ограничена једноструко повезана област и нека је функција f аналитичка у D и непрекидна на $\overline{D} = D \cup C,$ гдје је C граница области $D.$ Тада је

$$\oint_C f(z)dz = 0. \square$$

Такође, Кошијева интегрална теорема вриједи и у случају када је D вишеструко повезана област.

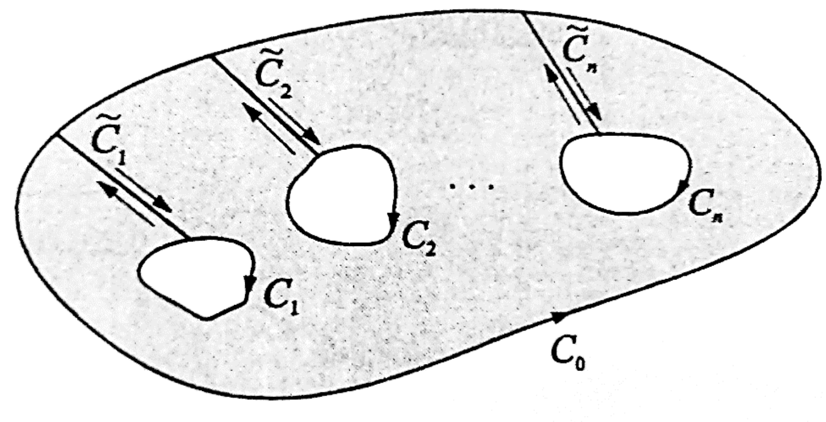
Теорема 6.4. Нека C граница вишеструко повезане области D састоји од контуре C_0 и међусобно дисјунктних контура $C_1, \dots, C_n$ које се налазе у унутрашњости контуре C_0. Ако је функција f аналитичка у D и непрекидна на $\overline{D} = D \cup C$, тада је

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_0} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz = 0, \tag{6.9}$$

при чему су контуре $C_0, C_1, \dots, C_n$ оријентисане тако да кретањем по било којој од њих тачке области D остају са лијеве стране.

Доказ: Од вишеструко повезане области D можемо „резовима“ $\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}, \dots, \widetilde{C_n}$ направити једноструко повезану област D^* чију границу C^* чине контуре $C_0, C_1, \dots, C_n$ и резови $\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}, \dots, \widetilde{C_n}$ (слика 6.3).

Примјењујући Теорему 6.5 за једноструко повезану област D^* са границом C^* добијамо



Слика 6.3.

$$\oint_{C^*} f(z)dz = 0, j = 1,2, \dots, n. \tag{6.10}$$

Пошто се интеграли по „резовима“ анулирају због супротне оријентације, из (6.10) добијамо

$$\oint_{C^*} f(z)dz = \oint_{C} f(z)dz = \oint_{C_0} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz = 0$$

тј. формулу (6.9). □

Ако промијенимо оријентацију контура $C_1, \ldots, C_n$, онда из формуле (6.9) добијамо

$$\oint_{C_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz \tag{6.11}$$

при чему су све контуре $C_0, C_1, \ldots, C_n$ оријентисане у смјеру супротном кретању казаљке на сату.

Специјално, у случају двоструко повезане области формула (6.11) постаје

$$\oint_{C_0} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz. \tag{6.11_1}$$

Користећи (6.11_1) из (6.6) добијамо

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, n = 1 \\ 0, n \neq 1 \end{cases} \tag{6.11_2}$$

гдје је C произвољна контура унутар које се налази тачка a.

Примјер 6.5. Израчунати интеграл

$$\oint_C \frac{z}{z^2+1}\,dz,$$

гдје је а) $C: |z+i| = 1$, б) $C: |z| = 2$.

Рјешење: Имамо

$$\oint_C \frac{z}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2}\oint_C \frac{1}{z-i}\,dz + \frac{1}{2}\oint_C \frac{1}{z+i}\,dz.$$

а) Ако је C кружница $|z+i| = 1$, тада је функција $\frac{1}{z-i}$ аналитичка у области $|z+i| \leq 1$, па је на основу Кошијеве интегралне теореме

$$\oint_{|z+i|=1} \frac{1}{z-i}\,dz = 0.$$

Функција $\frac{1}{z+i}$ није аналитичка у тачка $z = -i$ која се налази унутар контуре $|z+i| = 1$, па се на интеграл не може примијенити Кошијева интегрална теорема. Из (6.6) добијамо да је

$$\oint_{|z+i|=1} \frac{1}{z+i}\,dz = 2\pi i.$$

Према томе,

$$\oint_{|z+i|=1} \frac{z}{z^2+1}\,dz = \pi i.$$

б) Пошто се обе тачке $z = \pm i$ у којима функција $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ није аналитичка налазе унутар контуре $|z| = 2$, примјењујући резултат из (6.6) добијамо

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{z^2+1} dz = \frac{1}{2} \oint_{|z|=2} \frac{1}{z-i} dz + \frac{1}{2} \oint_{|z|=2} \frac{1}{z+i} dz = \pi i + \pi i = 2\pi i.$$

6.3. КОШИЈЕВА ИНТЕГРАЛНА ФОРМУЛА

Из Кошијеве интегралне теореме слиједи једна од најважнијих формула комплексне анализе - Кошијева интегрална формула.

Теорема 6.5. Нека је функција f аналитичка у једноструко повезаној области D и нека је C произвољна контура из те области оријентисана супротно кретању казаљке на сату. Тада за сваку тачку a која се налази унутар контуре C важи **Кошијева интегрална формула**

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz. \tag{6.12}$$

Доказ: Имамо

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_C \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz + f(a)\oint_C \frac{dz}{z-a}.$$

Из (6.11_2) је

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

па је

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_C \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz + 2\pi i f(a). \tag{6.13}$$

Покажимо сада да је

$$\oint_C \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = 0.$$

Нека је K кружница полупречника r са центром у тачки a оријентисана супротно кретању казаљке на сату и нека се налази у унутрашњости контуре C. Функција

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

је аналитичка у свим тачкама области D осим у тачки a, па је она аналитичка у двоструко повезаној области ограниченој контуром C и кружницом $K,$ и непрекидна је на граници те области.

Према Кошијевој интегралној теореми и формули (6.11_1) за двоструко повезане области имамо

$$\oint_C \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = \oint_K \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz. \tag{6.14}$$

Функција $f(z)$ је аналитичка па је и непрекидна, и за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да је

$$|f(z)-f(a)| < \varepsilon \text{ за све } z \text{ за које је } |z-a| < \delta.$$

Ако је K кружница чији је полупречник r мањи од δ, тада за сваку тачку кружнице K вриједи

$$\left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right| < \frac{\varepsilon}{r}$$

па је

$$\left|\oint_K \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right| \leq \frac{\varepsilon}{r}\oint_K dz = \frac{\varepsilon}{r}\cdot 2r\pi = 2\pi\varepsilon.$$

Одавде добијамо $\oint_K \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz = 0$. Сада из (6.14) и (6.13) добијамо (6.12) и теорема је доказана. □

Примјер 6.6. Израчунати

$$\oint_C \frac{tgz}{z^2-1}dz$$

гдје је $C: |z| = 3/2$.

Рјешење: Функција tgz је аналитичка у области $|z| < \pi/2$ па се може примијенити Кошијева интегрална формула за контуру $|z| = 3/2$. Имамо

$$\oint_C \frac{tgz}{z^2-1}dz = \frac{1}{2}\oint_C \frac{tgz}{z-1}dz - \frac{1}{2}\oint_C \frac{tgz}{z+1}dz = \frac{1}{2}2\pi i tg1 - \frac{1}{2}2\pi i tg(-1) = 2\pi i tg1. □$$

Кошијева интегрална формула вриједи и за вишеструко повезане области.

Нека је нпр. D двоструко повезана област чију границу чине контуре C_1 и C_2 оријентисане тако да кретањем по свакој од њих тачке области D остају са лијеве стране. Ако је функција f аналитичка у D и непрекидна на $\overline{D} = D \cup C_1 \cup C_2$, тада за сваку тачку a из D вриједи

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-a}\,dz\,. \tag{6.14$_1$}$$

6.4. ИЗВОДИ АНАЛИТИЧКИХ ФУНКЦИЈА

Сљедећа теорема представља уопштење Кошијеве интегралне формуле и изражава чињеницу да је извод аналитичке функције такође аналитичка функција, односно да **аналитичка функција има изводе произвољног реда,** те даје формулу за њихово одређивање. Теорема се може доказати математичком индукцијом и доказ не наводимо.

Теорема 6.6. Ако је функција f аналитичка у области D, тада она има изводе произвољног реда који су аналитичке функције у D. Вриједности тих извода у произвољној тачки $a \in D$ одређују се помоћу формуле

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz , \qquad n = 1,2, \dots \tag{6.15}$$

гдје је C контура из области D оријентисана супротно кретању казаљке на сату, унутар које се налази тачка $z = a$. □

Примјер 6.7. Израчунати

$$\oint_C \frac{z^3 + sinz}{(z-i)^3} dz$$

гдје је $C: |z - i| = 1$.

Рјешење: Функција $f(z) = z^3 + sinz$ је цијела функција па се на интеграл може примијенити формула (6.15) за $n = 2$. Вриједи

$$\oint_C \frac{z^3 + sinz}{(z-i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} (z^3 + sinz)''|_{z=i} = \pi(sh1 - 6).$$

6.5. ПРИМИТИВНА ФУНКЦИЈА И ИНТЕГРАЛ

Дефиниција 6.3. Кажемо да је функција $F(z)$ **примитивна функција** функције $f(z)$ у области D ако је за $z \in D$

$$F'(z) = f(z).$$

Уколико је $F(z)$ примитивна функција функције $f(z)$, онда је и функција $F(z) + c$, гдје је c произвољна константа, такође примитивна функција функције $f(z)$.

Обрнуто, уколико су $F_1(z)$ и $F_2(z)$ примитивне функције функције $f(z)$ у области D, тада је

$$F_1(z) - F_2(z) = c.$$

Заиста, ако је $F(z) = F_1(z) - F_2(z) = u + iv$, за $z \in D$ имамо

$$F'(z) = F_1{}'(z) - F_2{}'(z) = f(z) - f(z) = 0.$$

Одавде добијамо

$$F'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \ \wedge \ F'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

па је

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Према томе добијамо да је $u = c_1$ и $v = c_2$, тј. $F(z) = c_1 + ic_2 = c$.

Сада наводимо теорему која даје **везу између примитивне функције и интеграла**. Видјели смо да интеграл аналитичке функције у једноструко повезаној области зависи само од крајњих тачака криве и да за фиксирану тачку z_0 интеграл

$$\phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)dt. \tag{6.15$_1$}$$

дефинише функцију $\phi(z)$ (видјети (6.8$_2$)).

Теорема 6.7. Нека је функција f непрекидна у области D и нека интеграл функције не зависи од путање интеграције која лежи у D, већ само од крајњих тачака. Тада је функција ϕ из (6.15$_1$) аналитичка у D и за $z \in D$ вриједи

$$\phi'(z) = f(z). \square$$

Пошто интеграл аналитичке функције у једноструко повезаној области зависи само од крајњих тачака криве, из Теореме 6.7 непосредно слиједи:

Теорема 6.8. Ако је функција $f(z)$ аналитичка функција у једноструко повезаној области D, онда она има примитивну функцију у тој области. $\square$

Примитивна функција функције f на D је функција (6.15_1). Зато је

$$\phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)dt = F(z) + c \qquad (6.15_2)$$

при чему је $F(z)$ произвољна примитивна функција функције f. Стављајући у (6.15_2) $z = z_0$ добијамо $c = -F(z_0)$ па формула (6.15_2) постаје

$$\phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)dt = F(z) - F(z_0) \qquad (6.15_3)$$

Формула (6.15_3) је **проширење Њутн-Лајбницове формуле** из реалне анализе на интеграле функције комплексне промјенљиве.

Примјер 6.8. Израчунати интеграл $\int_0^{1+i} z^2 dz$.

Рјешење: Коришћењем формуле (6.15_3)добијамо

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i.$$

Сада можемо доказати доказати **обрнуто тврђење у Кошијевој интегралној теореми**.

Теорема 6.9. (Морерина теорема [5]) Ако је функција $f(z)$ непрекидна у једноструко повезаној области D и ако је

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

по свакој затвореној путањи C из D, тада је функција $f(z)$ аналитичка у D.

Доказ: Из претпоставке да је интеграл функције једнак нули по свакој затвореној путањи C из D, добија се да интеграл функције не зависи од путање интеграције већ само од крајњих тачака. Тада је на основу Теореме 6.7 функција $\phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)dt$ аналитичка и вриједи $\phi'(z) = f(z)$. Пошто је на основу теореме 6.6 извод аналитичке функције такође аналитичка функција, добијамо да је $f(z)$ аналитичка у D. □

[5] Giacinto Morera (1856-1909), италијански математичар

Помоћу Теореме 6.6 доказујемо веома значајну **Кошијеву неједнакост**. Ако у формули (6.15) за контуру C изаберемо кружницу $|z-a|=r$ и претпоставимо да је $|f(z)| \leq M$ на C, добијамо

$$\left|f^{(n)}(a)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}2r\pi$$

односно **Кошијеву неједнакост**

$$\left|f^{(n)}(a)\right| = \frac{n!\,M}{r^n}, \qquad n = 1,2,\ldots \tag{6.16}$$

Помоћу Кошијеве неједнакости доказујемо Лиувилову [6] теорему.

Теорема 6.10. (Лиувилова теорема) Ако је цијела функција f ограничена, онда је она константна.

Доказ: Пошто је f ограничена постоји константа M таква да је $|f(z)| \leq M$ за свако z. За цијелу функцију важи Кошијева неједнакост (6.16) па је

$$|f'(z)| = \frac{M}{r}$$

за свако z и свако $r > 0$. Одавде добијамо да је $f'(z) = 0$ па је $f(z) = const.$ □

[6] Joseph Liouville (1809-1882), француски математичар

6.6. ТЕЈЛОРОВ РЕД

Показаћемо да се свака аналитичка функција може представити помоћу Тејлоровог реда који има исти облик као у реалној анализи, с тим да је реална промјенљива x замијењена комплексном промјенљивом z.

Теорема 6.11. (Тејлорова теорема) Ако је функција f аналитичка у области D, онда се она може представити помоћу степеног реда са центром у произвољној тачки a из D облика

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n. \tag{6.17}$$

Развој функције (6.17) вриједи у отвореном кругу највећег полупречника са центром у тачки a који лежи у D.

Доказ: Нека је $|z-a| < R$ отворени круг највећег полупречника са центром у тачки a који лежи у D и нека је z произвољна тачка тог круга. Функција f је аналитичка у области D па је аналитичка и у кругу $|z-a| < R$. Према Кошијевој интегралној формули (6.12) тада је

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt \tag{6.18}$$

гдје је C кружница $|t-a| = r, r < R$ оријентисана супротно кретању казаљке на сату у којој се налази тачка z.

Познато је да је сума геометријског реда једнака

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}, q \neq 1$$

и да је сума првих n чланова геометријског низа

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}, q \neq 1.$$

Из ових једнакости добијмо

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q}, q \neq 1.$$

Одавде добијамо

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-a} \cdot \frac{1}{\frac{t-a+a-z}{t-a}} = \frac{1}{t-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{t-a}} =$$

$$\frac{1}{t-a}\left(1 + \frac{z-a}{t-a} + \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^n + \frac{\left(\frac{z-a}{t-a}\right)^{n+1}}{1-\frac{z-a}{t-a}}\right) =$$

$$\frac{1}{t-a}\left(1 + \frac{z-a}{t-a} + \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^n\right) + \frac{1}{t-z}\left(\frac{z-a}{t-a}\right)^{n+1},$$

тј.

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t-a}+\frac{z-a}{(t-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{(t-a)^3}+\cdots+\frac{(z-a)^n}{(t-a)^{n+1}}+\frac{1}{t-z}\left(\frac{z-a}{t-a}\right)^{n+1}. \tag{6.19}$$

Сада из (6.18) и (6.19) добијамо

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)}{t-a}+\frac{z-a}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)}{(t-a)^2}dt+$$

$$\frac{(z-a)^2}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)}{(t-a)^3}dt+\cdots+\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt+R_{n+1}(z) \tag{6.20}$$

гдје је

$$R_{n+1}(z)=\frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}(t-z)}dt.$$

Примјењујући Кошијеву интегралну формулу (6.15) из (6.20) добијамо

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+R_{n+1}(z). \tag{6.21}$$

Пошто аналитичка функција има изводе произвољног реда, број n у (6.21) је произвољан природан број.

Покажимо сада да $R_{n+1}(z)\to 0\ (n\to\infty)$. Функција $\frac{f(t)}{t-z}$ је аналитичка на C па је она и ограничена на C. Постоји константа K таква да је за све t са C

$$\left|\frac{f(t)}{t-z}\right| \leq K.$$

Сада је

$$|R_{n+1}(z)| \leq \frac{|z-a|^{n+1}}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}(t-z)}dt\right| \leq$$

$$\frac{|z-a|^{n+1}}{2\pi}\oint_C \left|\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}(t-z)}\right| dt \leq \frac{|z-a|^{n+1}}{2\pi}\cdot\frac{K}{r^{n+1}}\oint_C dt = Kr\left|\frac{z-a}{r}\right|^{n+1}.$$

Пошто се налази у кругу $|t-a| = r$ добијамо $|z-a| < r$ тј.

$$\left|\frac{z-a}{r}\right| < 1.$$

Одавде добијамо да $R_{n+1}(z) \to 0$ $(n \to \infty)$. Сада из (6.21) за $n \to \infty$ добијамо (6.17) и теорема је доказана. □

Ако је $a = 0$, тада се степени ред (6.17) назива **Маклоренов ред.**

Лако се показује да су **Маклоренови редови неких елементарних функција исти као у реалној анализи, при чему је реална промјенљива x замијењена комплексном промјенљивом z.**

- За функцију $f(z) = \frac{1}{1-z}$ је $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$, па је Маклоренов ред функције $f(z)$ геометријски ред

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \quad (|\,z| < 1). \tag{6.22}$$

Пошто функција $f(z)$ није аналитичка у тачки $z = 1$, отворени круг највећег полупречника са центром у тачки $z = 0$ у ком је функција аналитичка је круг $|\,z| < 1$, па развој (6.22) вриједи у том кругу.

- За функцију $f(z) = e^z$ је $f^{(n)}(z) = e^z$, па је Маклоренов ред функције $f(z)$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots \tag{6.22$_1$}$$

Пошто је функција $f(z)$ цијела, развој (6.22$_1$) вриједи за све z.

- Помоћу развоја (6.22$_1$) и дефиниције тригонометријских и хиперболичких функција, добијамо

$$cosz = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \qquad (6.22_2)$$

$$sinz = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \qquad (6.22_3)$$

$$chz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$shz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

- За функцију $f(z) = \mathrm{Ln}(1+z)$ је $f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(z+1)^n}$, па је Маклоренов ред функције $f(z)$

$$\mathrm{Ln}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots \quad (|z| < 1).$$

Отворени круг највећег полупречника са центром у тачки $z = 0$ у ком је функција $\mathrm{Ln}(1+z)$ аналитичка је круг $|z| < 1$, па развој вриједи у том кругу.

Примјер 6.9. Развити функцију $f(z)=\frac{1}{2z-i}$ у Тејлоров ред у околинои тачке -1.

Рјешење:

$$\frac{1}{2z-i}=\frac{1}{2z+2-2-i}=-\frac{1}{2+i}\frac{1}{1-\frac{2(z+1)}{2+i}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2+i)^{n+1}}(z+1)^n.$$

Развој вриједи за

$$\left|\frac{2(z+1)}{2+i}\right|<1\Leftrightarrow|z+1|<\left|\frac{2+i}{2}\right|\Leftrightarrow|z+1|<\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Примјер 6.10. Развити функцију $f(z)=\frac{1-cosz^2}{z^4}$ у Маклоренов ред.

Рјешење:

$$\frac{1-cosz^2}{z^4}=\frac{1}{z^4}\left(1-1+\frac{z^4}{2!}-\frac{z^8}{4!}+\frac{z^{12}}{6!}-\cdots\right)=\frac{1}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^8}{6!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{4n-4}}{(2n)!}+\cdots\square$$

6.7. ЛОРАНОВ РЕД

Поред Тејлоровог реда за функције комплексне промјенљиве посматрамо и ред облика

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \tag{6.23}$$

који се назива **Лоранов ред**. Тачка a се назива **центар** а a_n су **коефицијенти** Лорановог реда. Ред (6.23) је конвергентан у тачкама у којима су конвергентни редови

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \tag{6.24}$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}. \tag{6.25}$$

Сума реда (6.23) је једнака суми редова (6.24) и (6.25).

Теорема 6.12. (Лоранова теорема) Ако је функција $f(z)$ аналитичка у прстену

$$R_1 < |z-a| < R_2 \ \ (R_1 \geq 0, R_2 \leq \infty)$$

онда се она у том прстену може представити помоћу конвергентног реда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \tag{6.26}$$

гдје је

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt, \tag{6.27}$$

и C кружница $|t-a| = r, R_1 < r < R_2$, оријентисана супротно кретању казаљке на сату.

Доказ: Нека је z произвољна тачка из прстена

$$R_1 < |z-a| < R_2$$

и нека су

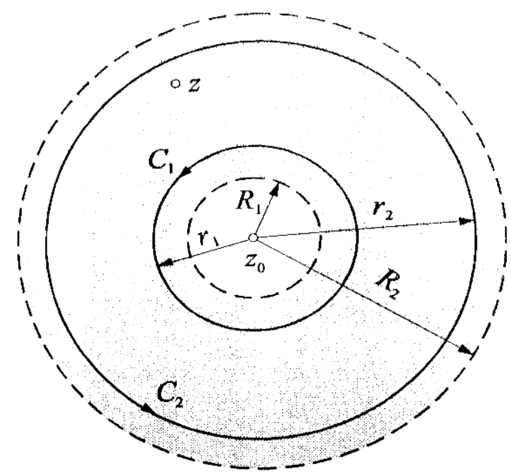
$$C_1 \colon |t-a| = r_1,$$

$$C_2 \colon |t-a| = r_2, \ (R_1 < r_1 < r_2 < R_2)$$

кружнице које формирају кружни прстен

$$r_1 < |t-a| < r_2$$

који садржи тачку z (Слика 6.4).



Слика 6.4

Према Коцијевој интегралној формули (6.14_1) тада је

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(t)}{t-z}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(t)}{t-z}\,dt \qquad (6.27_1)$$

при чему се интеграција врши у смјеру супротном кретању казаљке на сату.

Као и у доказу Тејлорове теореме добијамо

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(t)}{t-z}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad (6.27_2)$$

гдје је

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}\,dt.$$

Ако је t произвољна тачка са кружнице C_1, тада је $\left|\frac{t-a}{z-a}\right| < 1$ па развојем у геометријски ред добијамо

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{\frac{t-a+a-z}{z-a}} = -\frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{t-a}{z-a}} =$$

$$-\frac{1}{z-a}\left(1 + \frac{t-a}{z-a} + \left(\frac{t-a}{z-a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{t-a}{z-a}\right)^n\right) - \frac{1}{z-t}\left(\frac{t-a}{z-a}\right)^{n+1}.$$

Одавде добијамо

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(z-a)^{i+1}}\oint_{C_1}f(t)(t-a)^{i}dt+R_{n+1}(z)$$

гдје је

$$R_{n+1}(z)=\frac{1}{2\pi i(z-a)^{n+1}}\oint_{C_1}\frac{f(t)(t-a)^{n+1}}{z-t}dt.$$

Слично као у доказу Тејлорове теореме покаже се да $R_{n+1}(z)\to 0\ (n\to\infty)$ па добијамо

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^{n}},\qquad (6.27_3)$$

гдје је

$$a_{-n}=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(t-a)^{-n+1}}dt.$$

Из (6.27_1), (6.27_2) и (6.27_3) добијамо (6.26) и теорема је доказана.□

Примјер 6.11. Одредити Лоранов ред функције $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ по степенима z.

Рјешење: Користећи развој (6.22$_1$) добијамо

$$f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!} = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{4!\,z^2} + \cdots, |z| > 0.$$

Примјер 6.12. Одредити Лоранов ред функције $f(z) = \frac{1}{1-z}$ по степенима z у области

а)$|z| < 1$, б)$|z| > 1$.

Рјешење: а) Користећи развој (6.22) за $|z| < 1$ имамо

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \ .$$

б) За $|z| > 1$ је $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ па имамо

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \cdots \ . \square$$

6.8. ИЗОЛОВАНИ СИНГУЛАРИТЕТИ И НУЛЕ АНАЛИТИЧКИХ ФУНКЦИЈА

Ако је функција $f(z)$ аналитичка у свим тачкама круга $|z-a|<R$ осим у тачки a, кажемо да је тачка a **изолована сингуларна тачка (изоловани сингуларитет**) функције $f(z)$.

Круг $|z-a|<R$ без тачке a можемо записати у облику

$$0<|z-a|<R. \tag{6.28}$$

Према Лорановој теореми, функција $f(z)$ која је аналитичка у прстену (6.28), може се у том прстену представити помоћу конвергентног реда

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}. \tag{6.29}$$

Редови

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n\,, |z-a|<R$$

и

$$f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}, |z-a|>0$$

називају се **правилни**, односно **главни дио** Лорановог реда.

Разликујемо три врсте сингуларитета.

1. Ако главни дио Лорановог реда (6.29) нема ниједан члан, тј. ако је Лоранов ред облика

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

кажемо да је тачка a **отклоњиви сингуларитет**.

Примјер 6.13. Функција

$$f(z) = \frac{sinz}{z}$$

је аналитичка у свим тачкама комплексне равни осим у тачки $z = 0$ у којој није ни дефинисана, па је тачка $z = 0$ изолована сингуларна тачка. Лоранов ред те функције са центром у $z = 0$ је облика

$$f(z) = \frac{sinz}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots$$

Пошто главни дио Лорановог реда нема чланова, закључујемо да је тачка $z = 0$ отклоњиви сингуларитет.

2. Ако главни дио Лорановог реда (6.29) има само коначно много чланова, тада кажемо да је тачка a **пол** функције $f(z)$. Ако је при томе главни дио Лорановог реда облика

$$\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}, a_{-m}\neq 0$$

кажемо да је тачка a **пол реда $\boldsymbol{m}$**. За пол првог реда кажемо да је **прост пол**.

Примјер 6.14. Функција

$$f(z)=\frac{sinz}{z^7}$$

је аналитичка у свим тачкама комплексне равни осим у тачки $z=0$ у којој није ни дефинисана, па је тачка $z=0$ изолована сингуларна тачка. Лоранов ред те функције са центром у $z=0$ је облика

$$f(z)=\frac{sinz}{z^7}=\frac{1}{z^7}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}=\frac{1}{z^6}-\frac{1}{3!\,z^4}+\frac{1}{5!\,z^2}-\frac{1}{7!}+\frac{z^2}{9!}-\cdots$$

Главни дио Лорановог реда је

$$\frac{1}{z^6}-\frac{1}{3!\,z^4}+\frac{1}{5!\,z^2}$$

па је тачка $z=0$ пол шестог реда.

3. Ако главни дио Лорановог реда (6.29) има бесконачно много чланова, тада кажемо да је тачка a **есенцијални сингуларитет** функције $f(z)$.

Примјер 6.15. Функција $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ из Примјера 6.11 има у тачки $z = 0$ есенцијални сингуларитет. □

Понашање аналитичке функције у околинама сингуларних тачака зависи од врсте сингуларитета.

1. Ако је тачка a отклоњиви сингуларитет, онда је $\lim_{z \to a} f(z)$ коначан.
2. Ако је тачка a пол реда m, онда је $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$.
3. Ако је тачка a есенцијални сингуларитет, онда не постоји $\lim_{z \to a} f(z)$ (ни коначан ни бесконачан).

Нека је f аналитичка у области D. Тачка $a \in D$ се назива **нула** функције f ако је $f(a) = 0$.

Ако је

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0 \ \wedge f^{(m)}(a) \neq 0$$

кажемо да је тачка a **нула реда m** функције f. Нула првог реда се назива **проста нула.**

Примјер 6.16. Функција $f(z) = z^2 + 1$ има просте нуле $z = \pm i$.

Функција $f(z) = (z^2 + 4)^3(z - 1)$ има просту нулу $z = 1$ и нуле трећег реда $z = \pm 2i$.

Функција $f(z) = sinz$ има просте нуле у тачкама $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, док функција $f(z) = sin^2 z$ има нуле другог реда $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.□

Ако је тачка a нула реда m функције f тада је Тејлоров ред функције у тој тачки облика

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} (z-a)^n$$

односно функција f се може представити у облику

$$f(z) = (z-a)^m g(z) \tag{6.30}$$

гдје је $g(z)$ аналитичка функција у околини тачке a и при чему је $g(a) \neq 0$.

Сада наводимо теорему која даје везу између полова и нула функције.

Теорема 6.13. Нека је $f(z)$ аналитичка функција у околини тачке a која је нула реда m те функције. Тада функција $\frac{1}{f(z)}$ има пол реда m у тачки a.

Доказ: Лако се показује да су нуле аналитичке функције изоловане. Према томе, постоји околина тачке a у којој је функција аналитичка и у којој нема других нула функције осим тачке a. Тада се функција $f(z)$ у тој околини може представити у облику (6.30), па се функција $\frac{1}{f(z)}$ може представити у облику

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^{-m} \frac{1}{g(z)}.$$

Пошто функција $g(z)$ нема нула у посматраној околини, то је функција $\frac{1}{g(z)}$ аналитичка функција која се може развити у Тејлоров ред у тој околини:

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n.$$

Према томе добијамо да Лоранов ред функције $\frac{1}{f(z)}$ има облик

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n =$$

$$\frac{b_0}{(z-a)^m} + \frac{b_1}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + b_m + b_{m+1}(z-a) + \cdots$$

Пошто је $b_0 = \frac{1}{g(a)} \neq 0$ добијамо да је тачка a пол реда m функције $\frac{1}{f(z)}$. □

Примјер 6.17. Функција

$$f(z) = \frac{2z-1}{(z+4)^3(z^2+1)^2}$$

има пол трећег реда у тачки $z = -4$ и полове другог реда у тачкама $z = \pm i$ јер функција

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z+4)^3(z^2+1)^2}{2z-1}$$

има нулу трећег реда у тачки $z = -4$ и нуле другог реда у тачкама $z = \pm i$. □

За испитивање понашање функције $\boldsymbol{f(z)}$ за велике вриједности $|\boldsymbol{z}|$, тј. за $z \to \infty$, уводимо смјену $z = \frac{1}{\omega}$ и испитујемо понашање функције $g(\omega) = f\left(\frac{1}{\omega}\right)$ у тачки $\omega = 0$.

Кажемо да је функција f **аналитичка (сингуларна) у тачки $\boldsymbol{z} = \infty$** ако је функција g аналитичка (сингуларна) у тачки $\omega = 0$.

Кажемо да је тачка $\boldsymbol{z} = \infty$ **нула реда $\boldsymbol{m}$** функције f ако је тачка $\omega = 0$ нула реда m функције g.

Примјер 6.18. Функција $f(z) = \frac{1}{z^2}$ је аналитичка у $z = \infty$ јер је функција $g(\omega) = f\left(\frac{1}{\omega}\right) = \omega^2$ аналиттичка у $\omega = 0$. Тачка $z = \infty$ је нула другог реда функције f јер је тачка $\omega = 0$ нула другог реда функције $g(\omega) = \omega^2$.

Функција $f(z) = z^3$ је сингуларна у $z = \infty$ јер је функција $g(\omega) = f\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega^3}$ сингуларна у $\omega = 0$. Тачка $z = \infty$ је пол трећег реда функције f јер је тачка $\omega = 0$ пол трећег реда функције $g(\omega) = \frac{1}{\omega^3}$.

Функција $f(z) = e^z$ има есенцијални сингуларитет у тачки $z = \infty$ јер функција $g(\omega) = f\left(\frac{1}{\omega}\right) = e^{\frac{1}{\omega}}$ има есенцијални сингуларитет у тачки $\omega = 0$. $\square$

6.9. ИНТЕГРАЦИЈА МЕТОДОМ ОСТАТКА

Нека је функција $f(z)$аналитичка у прстену $0 < |z - a| < R$. Тада се она у том прстену може представити помоћу конвергентног Лорановог реда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

чији се коефицијенти рачунају по формули (6.27)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

За $n = -1$ добијамо

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz. \qquad (6.31)$$

Према Кошијевој интегралној теореми за путању интеграције C можемо узети произвољну контуру из прстена $0 < |z - a| < R$ у чијој се унутрашњости налази тачка a и која је оријентисана супротно кретању казаљке на сату.

С друге стране, Лоранов ред функције па и коефицијент a_{-1} можемо одредити на различите начине, без коришћења формуле (6.27).

Значи ако нам је познат коефицијент a_{-1} тада из (6.31) можемо израчунати интеграл

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1}.$$

Дакле, **међу коефицијентима Лорановог реда посебан значај има коефицијент $\boldsymbol{a_{-1}}$.**

Дефиниција 6.4. Коефицијент a_{-1} називамо **остатак** или **резидуум** функције f у тачки a и означавамо са

$$a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z). \tag{6.32}$$

Сада формулу (6.31) записујемо у облику

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=a} f(z). \tag{6.33}$$

Ако је функција аналитичка у тачки a или је тачка a отклоњиви сингуларитет, онда је јасно да је

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = 0.$$

Примјер 6.19. Израчунати $\oint_{|z|=2} \frac{sinz}{z^6} dz$.

Рјешење:

$$\frac{sinz}{z^6} = \frac{1}{z^6}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{120z} - \frac{z}{7!} + \cdots$$

Тачка $z = 0$ је пол петог реда функције

$$f(z) = \frac{sinz}{z^6}$$

и налази се унутар кружнице $|z| = 2,$ па је

$$\oint_{|z|=2} \frac{sinz}{z^6} dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{1}{120} = \frac{\pi i}{60}. \square$$

Примјер 6.20. Израчунати

$$\oint_{|z|=1/2} \frac{dz}{z^3 - z^4}.$$

Рјешење: Функција

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^4} = \frac{1}{z^3(1-z)}$$

има пол трећег реда у тачки $z = 0$ и прост пол у тачки $z = 1$. Унутар кружнице $|z| = \frac{1}{2}$ налази се само тачка $z = 0$ па је

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^3 - z^4} dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z).$$

Даље је

$$f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)} = \frac{1}{z^3}(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + \cdots$$

и добијамо

$$a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 1.$$

Дакле,

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^3 - z^4} dz = 2\pi i. \square$$

Сада ћемо показати како се може одредити остатак функције у полу без развијања функције у Лоранов ред.

Нека је тачка a пол реда m функције $f(z)$. Тада је

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots, a_{-m} \neq 0.$$

Ако помножимо $f(z)$ са $(z-a)^m$ добијамо

$$g(z) = (z-a)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{m-1} + a_0(z-a)^m + \cdots.$$

Значи, a_{-1} је коефицијент у Тејлоровом развоју фунцкије $g(z)$ који стоји уз $(z-a)^{m-1}$ и он је према Тејлоровој формули једнак $\frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$.

Према томе, ако је тачка a пол реда m функције $f(z)$, тада је

$$a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \big((z-a)^m f(z)\big) \right). \tag{6.34}$$

Ако је тачка a прост пол, тј. $m = 1$, тада формула (6.34) постаје

$$a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z). \tag{6.35}$$

Примјер 6.21. Одредити полове и одговарајуће остатке функције

$$f(z) = \frac{(z^2+2)^2}{(z-1)^2(z^2+1)}.$$

Рјешење: Функција $f(z)$ има пол другиг реда у тачки $z = 1$ и просте полове у тачкама $z = \pm i$. Тада је

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{(z^2+2)^2}{(z-1)^2(z-i)(z+i)} = \lim_{z\to i}\frac{(z^2+2)^2}{(z-1)^2(z+i)} = \frac{1}{4},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{(z^2+2)^2}{(z-1)^2(z-i)(z+i)} = \lim_{z\to -i}\frac{(z^2+2)^2}{(z-1)^2(z-i)} = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left((z-1)^2\frac{(z^2+2)^2}{(z-1)^2(z^2+1)}\right) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{(z^2+2)^2}{z^2+1}\right) = \frac{3}{2}.$$

Показаћемо сада како се може једноставно одредити **остатак функције у простом полу за функције облика $\boldsymbol{f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}}$.**

Нека је $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, гдје су φ и ψ аналитичке функције у тачки a. Ако је $\varphi(a)\neq 0$ и ако је $\psi(a)=0, \psi'(a)\neq 0$, тада је тачка a прост пол функције f. Примјењујући (6.35) добијамо

$$\underset{z=a}{Res}\, f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Дакле,

$$\underset{z=a}{Res}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{6.36}$$

Примјер 6.22. Одредити остатак функције $f(z)=\frac{sin^2z}{cosz}$ у тачки $z=\frac{\pi}{2}$.

Рјешење:

$$\varphi(z)=sin^2z \Rightarrow \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\neq 0,\ \ \psi(z)=cosz \Rightarrow\ \psi\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \text{ и } \psi'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1\neq 0.$$

$$\underset{z=\frac{\pi}{2}}{Res}\frac{sin^2z}{cosz}=\frac{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\psi'\left(\frac{\pi}{2}\right)}=-1.$$

Формула (6.33) се може примијенити ако функција има само једну сингуларну тачку унутар контуре интеграције.

Показаћемо како се рачуна интеграл у случају да функција има више сингуларних тачака унутар контуре интеграције.

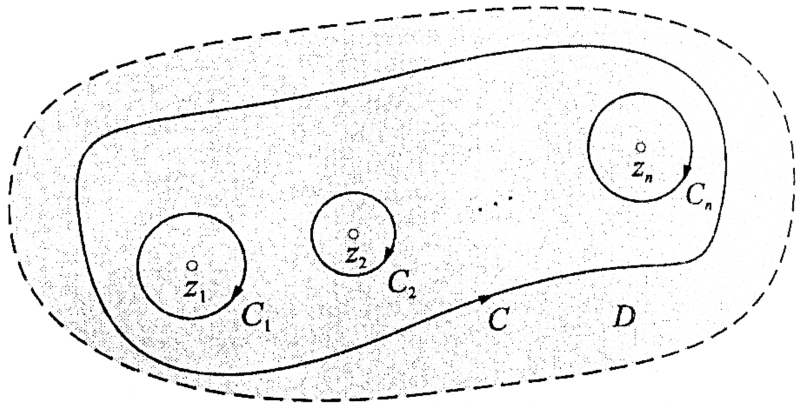
Теорема 6.14. (Теорема о остацима) Нека је функција $f(z)$ аналитичка у једноструко повезаној области D осим у коначно много сингуларних тачака $z_1, z_2, \dots, z_n$. Ако је C контура из D чија унутрашњост садржи те тачке, тада је

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{Res} f(z) \tag{6.37}$$

при чему се интеграција врши у смјеру супротном кретању казаљке на сату.

Доказ: Нека су C_k кружнице $|z - z_k| = r_k$ $(k = 1,2, \dots, n)$ оријентисане у смјеру кретања казаљке на сату које леже у унутрашњости контуре C и нека су кругови $|z - z_k| \leq r_k$ дисјунктни (Слика 6.5). Функција $f(z)$ је аналитичка у вишеструко повезаној области ограниченој са $C, C_1, \dots, C_n$ као и на граници те области па је према формули (6.9) у Кошијевој интегралној теореми за вишеструко повезане области

$$\oint_C f(z)dz + \oint_{C_1} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z)dz = 0.$$



Слика 6.5.

Промјеном оријентације кружница $C_1, \dots, C_n$ одавде добијамо

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z)dz. \tag{6.38}$$

Пошто је према (6.33)

$$\oint_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

из (6.38) добијамо (6.37) и теорема је доказана. □

Примјер 6.23. Израчунати интеграл $\oint_{|z|=3} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-2} dz$.

Рјешење:

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-2} dz = 2\pi i \left(\underset{z=2}{Res}\, f(z) + \underset{z=0}{Res}\, f(z) \right).$$

Према формули (6.35) је

$$\underset{z=2}{Res}\, f(z) = \lim_{z\to 2} (z-2) \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-2} = e^{\frac{1}{2}}.$$

За одређивање остатка у тачки $z = 0$ развијамо функцију у Лоранов ред у околини те тачке. Имамо

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\, z^2} + \frac{1}{3!\, z^3} + \cdots, z \neq 0$$

и

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \cdots \right), |z| < 2$$

па је

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-2} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \cdots \right)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\, z^2} + \frac{1}{3!\, z^3} + \cdots \right).$$

Одавде добијамо

$$a_{-1} = \underset{z=0}{Res}\, f(z) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2\cdot 2!} + \frac{1}{4\cdot 3!} + \frac{1}{8\cdot 4!} + \cdots\right)$$

тј.

$$\underset{z=0}{Res}\, f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} = -\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right) = 1 - e^{\frac{1}{2}}.$$

Према томе

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-2}\, dz = 2\pi i(e^{\frac{1}{2}} + 1 - e^{\frac{1}{2}}) = 2\pi i. \square$$