УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 3- ПРЕДАВАЊА

Академска 2017/2018

ЛИТЕРАТУРА: **Момир В. Ћелић, Математика II,** Машински факултет, Бања Лука, 1997[1]

Наставник: Биљана Војводић

[1] У припреми предавања коришћена је и књига **Математика, Милош Томић** (Свјетлост, Сарајево, 1988)

7. ЛАПЛАСОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА

7.1. ДЕФИНИЦИЈА ЛАПЛАСОВЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

Нека је $f(t)$ функција реалне промјенљиве t, дефинисана за $t \geq 0$. Ако постоји интеграл

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$$

онда се функција $F(p)$ назива **Лапласов** [2] **трансформат** функције f.

Дефиниција 7.1. Лапласова трансформација $\mathcal{L}(f)$ је пресликавање којим функцији $f(t)$ придружујемо њен Лапласов трансформат:

$$\mathcal{L}(f) = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt. \tag{7.1}$$

Функција f се назива **оригинал,** а функција $F(p)$ **слика** функције f.

[2] Pierre Simon De Laplace (1749-1827), француски математичар

Ако је позната слика функције f, оригинал одређујемо помоћу инверзне трансформације.

Дефиниција 7.2. Инверзна Лапласова трансформација $\mathcal{L}^{-1}$ је пресликавање којим се из познате слике одређује оригинал:

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = f.$$

Примјер 7.1. Одредити Лапласове трансформате функција

а) $f(t) = 1, \quad t \geq 0$, б) $f(t) = e^{at}, \quad a \in \mathbb{R}$, в) $f(t) = t^n, \quad n \in \mathbb{N}$.

Рјешење: а)

$$\mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-pt}\, dt.$$

Овај интеграл конвергира за $p > 0$ и добијамо

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p}, p > 0.$$

б) $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{p-a}, p > a.$

в) За $n = 1$ имамо $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{p^2}, p > 0$. Математичком индукцијом се показује да је за сваки природан број n

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}, p > 0. \square$$

Разматрамо услове под којим несвојствени интеграл у (7.1) конвергира, односно довољне услове за постојање Лапласовог трансформата. Уводимо појам дио по дио непрекидне функције.

Дефиниција 7.3. Функција је **дио по дио непрекидна на коначном интервалу** ако је непрекидна у свим унутрашњим тачкама тог интервала осим у коначном броју тачака у којима има прекид прве врсте, док у крајњим тачкама име једностране граничне вриједности.

Довољне услове за постојање Лапласовог трансформата даје сљедећа теорема.

Теорема 7.1. Нека је функција $f(t)$ дио по дио непрекидна на сваком коначном интервалу и нека постоје позитивни бројеви M и s такви такви да је

$$|f(t)| \leq Me^{st}, \qquad t \geq 0. \tag{7.2}$$

Тада постоји трансформат $F(p)$ функције $f(t)$ дефинисан за $p > s$.

Доказ: Пошто је функција дио по дио непрекидна, функција $e^{-pt}f(t)$ је интеграбилна на сваком коначном интервалу. Из услова (7.2) за $p > s$ добијамо

$$|F(p)| = \left|\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt\right| \leq \int_0^\infty e^{-pt} |f(t)|\, dt \leq M \int_0^\infty e^{-pt} e^{st}\, dt = \frac{M}{p-s}$$

па је интеграл (7.1) конвергентан за $p > s$. □

7.2. ОСОБИНЕ ЛАПЛАСОВЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

7.2.1. Линеарност Лапласове и инверзне Лапласове трансформације

Из линеарности интеграла слиједи и линеарност Лапласове трансфомације.

Теорема 7.2. Лапласова трансформација је линеарна, тј. за сваке двије функције $f(t)$ и $g(t)$ за које постоји Лапласов трансформат и за произвољне константе a и b важи

$$\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g). \tag{7.3}$$

Примјер 7.2. Одредити Лапласове трансформате тригонометријских и хиперболичких функција: $chat, shat, cos\omega t, sin\omega t, a \geq 0, \omega \in \mathbb{R}$.

Рјешење: Користећи Теорему 7.2 и примјер 7.1 б) добијамо

$$\mathcal{L}(chat) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p+a}\right) = \frac{p}{p^2 - a^2}, p > a \geq 0.$$

Аналогно добијамо

$$\mathcal{L}(shat) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+a}\right) = \frac{a}{p^2 - a^2}, p > a \geq 0.$$

За тригонометријске функције имамо

$$\mathcal{L}(cos\omega t) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, p > 0$$

и аналогно

$$\mathcal{L}(sin\omega t) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \square$$

Из линеарности Лапласове трансформације такође слиједи и линеарност инверзне Лапласове трансформације.

Примјер 7.3. Нека је $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p+3)}$. Одредити $\mathcal{L}^{-1}(F)$.

Рјешење: Имамо

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)(p+3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+3}\right).$$

Одавде, коришћењем линеарности инверзне Лапласове трансформације, добијамо

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+3}\right)\right) = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right) - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+3}\right) = \frac{1}{4}(e^t - e^{-3t}). \square$$

7.2.2. Лапласов трансформат извода

Теорема 7.3. Нека је функција $f(t)$ непрекидна за $t \geq 0$, нека задовољава услов (7.2) за неке вриједности константи M и s и нека има извод који је дио по дио непрекидан на сваком коначном интервалу. Тада постоји Лапласов трансформат извода за $p > s$ и важи

$$\mathcal{L}(f') = p\mathcal{L}(f) - f(0), \qquad p > s. \tag{7.4}$$

Доказ: Имамо

$$\mathcal{L}(f') = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\, dt = e^{-pt} f(t)|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt.$$

Због $p > s$ имамо $e^{-pt}f(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ па добијамо формулу (7.4). □

Примјер 7.4. Нека је $f(t) = cos^2 t$. Одредити $\mathcal{L}(f)$.

Рјешење: Пошто је $f(0) = 1$ и $f'(t) = -sin2t$, из Теореме 7.3 и Примјера 7.2 добијамо

$$\mathcal{L}(-sin2t) = p\mathcal{L}(cos^2 t) - 1 \Rightarrow \mathcal{L}(cos^2 t) = \frac{p^2 + 2}{p(p^2 + 4)}, p > 0.$$

Слично добијамо

$$\mathcal{L}(sin^2 t) = \frac{2}{p(p^2 + 4)}, p > 0. \square$$

Примјеном формуле (7.4) на други извод добијамо формулу за Лапласов трансформат другог извода оригинала:

$$\mathcal{L}(f'') = p\mathcal{L}(f') - f'(0) = p^2\mathcal{L}(f) - pf(0) - f'(0), \qquad p > s. \tag{7.5}$$

Сада индукцијом долазимо до Лапласовог трансформата n −тог извода оригинала. Ако су функције $f(t)$, $f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t), t \geq 0$ непрекидне и задовољавају услов (7.2) и ако је функција $f^{(n)}(t)$ дио по дио непрекидна на сваком коначном интервалу, тада вриједи

$$\mathcal{L}\big(f^{(n)}\big) = p^n\mathcal{L}(f) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0), \qquad p > s. \tag{7.6}$$

7.2.3. Лапласов трансформат интеграла

Коришћењем теореме за Лапласов трансформат извода оригинала, добијамо резултат за Лапласов трансформат интеграла оригинала. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 7.4. Нека је $f(t)$ дио по дио непрекидна функција која задовољава услов (7.2) за неке вриједности константи M и s, тада је

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f), \qquad p > s. \tag{7.7}$$

Доказ: Нека је

$$g(t) = \int_0^t f(u)du.$$

Функција $g(t)$ је непрекидна и за њу вриједи

$$|g(t)| \leq \int_0^t |f(u)|du \leq M\int_0^t e^{su}du = \frac{M}{s}(e^{st} - 1) < \frac{M}{s}e^{st}, \qquad t \geq 0.$$

Према томе, функција $g(t)$ задовољава услов (7.2).

У тачкама непрекидности функције f је

$$g'(t) = f(t)$$

па је $g'(t)$ дио по дио непрекидна функција на сваком коначном интервалу. Дакле, за функцију $g(t)$ су испуњене претпоставке за примјену Теореме 7.3, па је

$$\mathcal{L}(g') = p\mathcal{L}(g) - g(0), \qquad p > s.$$

Пошто је $g(0) = 0$, одавде добијамо

$$\mathcal{L}(f) = p\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right), \qquad p > s$$

тј. добијамо формулу (7.7). □

Примјер 7.5. Нека је $\mathcal{L}(f) = \frac{1}{p(p^2+\omega^2)}$. Одредити $f(t)$.

Рјешење: Из $\mathcal{L}(sin\omega t) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ добијамо

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+\omega^2}\right) = \frac{1}{\omega} sin\omega t.$$

Сада из (7.7) добијамо

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p(p^2+\omega^2)}\right) = \frac{1}{\omega}\int_0^t sin\omega u du = \frac{1}{\omega^2}(1 - cos\omega t). \square$$

7.2.4. Лапласов трансформат функције $e^{at}f(t)$

Теорема 7.5. Нека функција $f(t)$ има слику $\mathcal{L}(f) = F(p)$ дефинисану за $p > s$. Тада функција $e^{at}f(t)$ има слику $F(p-a)$ дефинисану за $p-a>s$, тј.

$$\mathcal{L}\left(e^{at}f(t)\right) = F(p-a), \qquad p-a>s. \tag{7.8}$$

Доказ: Из дефиниције (7.1) имамо

$$F(p-a) = \int_0^\infty e^{-(p-a)t} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-pt}(e^{at}f(t))\,dt = \mathcal{L}\left(e^{at}f(t)\right).\square$$

Примјер 7.6. Користећи Лапласове трансформате из Примјера 7.1 и 7.2 и релацију (7.8) добијамо сљедећу таблицу:

$f(t)$	$\mathcal{L}\left(f(t)\right)$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$e^{at}cos\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$

7.2.5. Лапласов трансформат функције $f(t-a)$

Теорема 7.6. Нека је $f(t) = 0$ за $t < 0$. Ако функција $f(t)$ има слику $F(p)$, тада функција $f(t-a),\ a \geq 0$ има слику $e^{-ap}F(p)$, тј.

$$\mathcal{L}\big(f(t-a)\big) = e^{-ap}\mathcal{L}\big(f(t)\big). \tag{7.9}$$

Доказ:

$$e^{-ap}\mathcal{L}\big(f(t)\big) = e^{-ap}\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-p(a+t)} f(t)\,dt.$$

Смјеном $t = u - a$ добијамо

$$e^{-ap}\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_a^\infty e^{-pu} f(u-a\,)\,du.$$

Пошто је $f(u-a\,) = 0$ за $u < a$ можемо писати

$$e^{-ap}\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^\infty e^{-pu} f(u-a\,)\,du = \mathcal{L}\big(f(t-a)\big).\ \square$$

За инверзну Лапласову трансфомацију из (7.9) имамо

$$\mathcal{L}^{-1}\big(e^{-ap}F(p)\big) = f(t-a). \tag{7.9$_1$}$$

7.2.6. Јединична степена функција

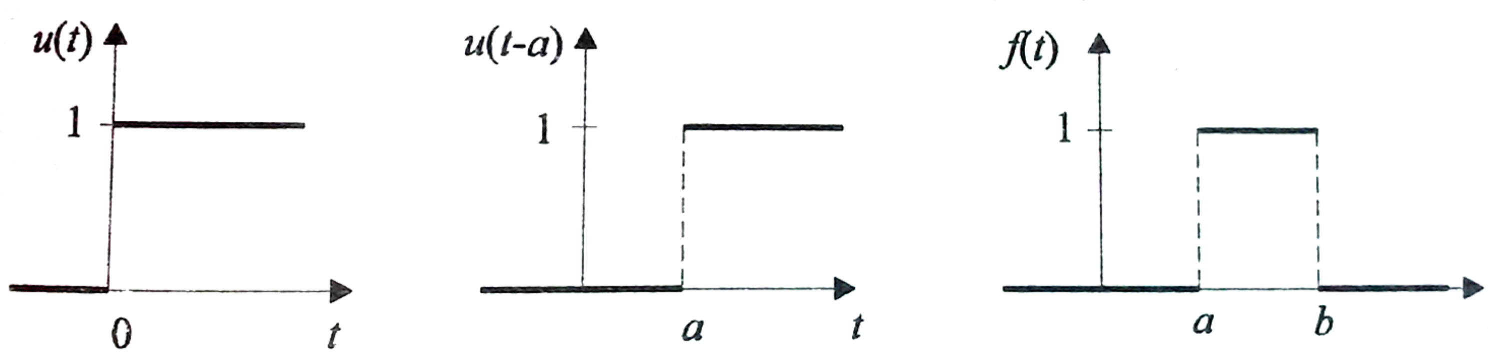
Нека је

$$u(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t > 0 \end{cases}$$

јединична степена функција (Хевисајдова функција [3]) која има скок величине 1 у тачки 0, у којој није ни дефинисана. Тада је

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, t < a \\ 1, t > a \end{cases}$$

јединична степенаста функција са скоком у тачки a. (Слика 7.1)



Слика 7.1.

[3] Oliver Heaviside (1850 - 1925), енглески физичар и математичар

Пошто је $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p}, p > 0$ из (7.9) добијамо да је

$$\mathcal{L}\big(u(t-a)\big) = e^{-ap}\frac{1}{p}, \qquad p > 0. \tag{7.9$_2$}$$

Примјер 7.7. Нека је $f(t) = u(t-a) - u(t-b), b > a \geq 0$ (Слика 7.1). Одредити $\mathcal{L}(f)$.

Рјешење: Из формуле (7.9$_2$) добијамо

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}\big(u(t-a) - u(t-b)\big) = e^{-ap}\frac{1}{p} - e^{-bp}\frac{1}{p} = \frac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p}, p > 0. \square$$

7.2.7. Лапласов трансформат функције $t^n f(t)$

Из дефиниције (7.1) и правила за диференцирање под знаком интеграла добијамо

$$F'(p) = -\int_0^\infty e^{-pt} t f(t)\, dt$$

па је

$$\mathcal{L}\big(tf(t)\big) = -F'(p). \tag{7.10}$$

Индукцијом показујемо да је

$$\mathcal{L}\big(t^n f(t)\big) = (-1)^n F^{(n)}(p). \tag{7.11}$$

Примјер 7.8. Наћи $\mathcal{L}(tsin\omega t)$.

Рјешење: Из $\mathcal{L}(sin\omega t) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ и (7.10) добијамо

$$\mathcal{L}(tsin\omega t) = -\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)' = \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

На исти начин добијамо

$$\mathcal{L}(tcos\omega t) = \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}. \square$$

7.2.8. Лапласов трансформат функције $\frac{f(t)}{t}$

Као што изводу слике одговара множење оригинала са $(-t)$, тако и интегралу слике одговара дијељење оригинала са t, уколико постоји десна гранична вриједност функције $\frac{f(t)}{t}$ у тачки 0. Дакле

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_p^{\infty} F(u)du. \tag{7.11}$$

Примјер 7.9. Наћи $\mathcal{L}\left(\frac{sht}{t}\right)$.

Рјешење: Из $\mathcal{L}(sht) = \frac{1}{p^2-1}, p > 1$ и (7.11) добијамо

$$\mathcal{L}\left(\frac{sht}{t}\right) = \int_p^{\infty} \frac{1}{u^2-1} du = -\frac{1}{2}\ln\frac{p-1}{p+1}. \square$$

7.2.9. Лапласов трансформат функције $f\left(\frac{t}{a}\right)$

Теорема 7.7. Нека функција $f(t)$ има слику $F(p)$. Тада за свако $a > 0$ вриједи

$$\mathcal{L}\left(f\left(\frac{t}{a}\right)\right) = aF(ap), \quad p > s, p > as. \tag{7.12}$$

Доказ: Имамо

$$\mathcal{L}\left(f\left(\frac{t}{a}\right)\right) = \int_0^\infty e^{-pt} f\left(\frac{t}{a}\right) dt = a\int_0^\infty e^{-pau} f(u)\, du =$$
$$a\int_0^\infty e^{-(pa)u} f(u)\, du = aF(ap). \square$$

Стављајући $\alpha = \frac{1}{a}$, формулу (7.12) можемо записати у облику

$$\mathcal{L}\big(f(\alpha t)\big) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

7.2.10. Лапласов трансформат конволуције функције

Слика оригинала се често појављује у облику производа $H(p) = F(p) \cdot G(p)$, при чему су познати оригинали функција $F(p)$ и $G(p)$. Везу узмеђу функција f и g који су оригинали за функције $F(p)$ и $G(p)$ даје сљедећа теорема.

Теорема 7.8. Нека функције f и g задовољавају услове Теореме 7.1. Тада је производ њихових слика $H(p) = F(p) \cdot G(p)$ слика која која одговара функцији $h(t) = (f * g)(t)$ коју дефинишемо са

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du. \tag{7.13}$$

Функција дефинисана са (7.13) се назива **конволуција** функција f и g.

Примјер 7.10. Нека је $F(p)=\frac{1}{p^2(p-a)}$. Наћи функцију f за коју је $\mathcal{L}\big(f(t)\big)=F(p)$.

Рјешење: Имамо
$$F(p)=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p-a}=F_1(p)\cdot F_2(p)=\mathcal{L}(f_1(t))\cdot\mathcal{L}\big(f_2(t)\big)$$
гдје је $f_1(t)=t, f_2(t)=e^{at}$. Из Теореме 7.8 добијамо
$$f(t)=(f_1*f_2)(t)=\int_0^t ue^{a(t-u)}du=e^{at}\int_0^t ue^{-au}du=\frac{1}{a^2}(e^{at}-at-1). \tag{7.14}$$
Задатак смо могли урадити тако да функцију $F(p)$ запишемо у облику
$$F(p)=-\frac{1}{a^2}\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\frac{1}{p^2}+\frac{1}{a^2}\frac{1}{p-a}$$
одакле добијамо рјешење (7.14). □

7.2.11. Лапласов трансформат периодичне функције

Ако је функција f дио по дио непрекидна и периодична са периодом $T > 0$, тада је њен Лапласов трансформат облика

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt\,, \;\; p > 0. \tag{7.15}$$

Примјер 7.11. Нека је $f(t) = |cost|, t > 0$. Наћи $\mathcal{L}\big(f(t)\big)$.

Рјешење: Основни период функције је $T = \pi$. Из (7.15) имамо

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \frac{1}{1 - e^{-p\pi}} \int_0^\pi e^{-pt} |cost| dt = \frac{1}{1 - e^{-p\pi}} \int_0^{\pi/2} e^{-pt} costdt -$$

$$- \frac{1}{1 - e^{-p\pi}} \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-pt} costdt = \frac{2e^{-p\pi/2} + p(1 - e^{-p\pi})}{(p^2 + 1)(1 - e^{-p\pi})}. \square$$

7.2.12. Диракова делта функција

Нека је

$$f_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{k}, a \leq t \leq a+k \\ 0, inače \end{cases}.$$

Пошто се у механици импулс силе у временском интервалу $a \leq t \leq a+k$ дефинише као интеграл те силе у границама од a до $a+k$, добијамо да је импулс I_k функције $f_k(t)$ једнак

$$I_k = \int_0^\infty f_k(t)dt = \int_a^{a+k} \frac{1}{k} dt = 1.$$

Функцију $f_k(t)$ можемо представити помоћу Хевисајдове функције у облику

$$f_k(t) = \frac{1}{k}\Big(u(t-a) - u\big(t-(a+k)\big)\Big)$$

па је њен Лапласов трансформат

$$\mathcal{L}\big(f_k(t)\big) = \frac{1}{kp}\left(e^{-ap} - e^{-(a+k)p}\right) = e^{-ap}\,\frac{1-e^{-kp}}{kp}.$$

Граничну вриједност функције $f_k(t)$ кад $k \to 0$ зовемо **Диракова делта функција** или **јединична импулсна функција** и означавамо са

$$\delta(t-a) = \lim_{k \to 0} f_k(t).$$

Диракова делта функција није функција у обичном смислу већ је то тзв. **уопштена функција (дистрибуција).**

Пошто је

$$\lim_{k \to 0} e^{-ap} \frac{1-e^{-kp}}{kp} = e^{-ap}$$

добијамо да је

$$\mathcal{L}\big(\delta(t-a)\big) = e^{-ap}.$$

За $a = 0$ је

$$\mathcal{L}\big(\delta(t)\big) = 1.$$

Дакле, за Диракову делта функцију вриједи

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty, t = a \\ 0, t \neq a \end{cases}$$

и

$$\int_0^\infty \delta(t-a)dt = 1.$$

Таблица: Лапласова трансформација

	Оригинал $f(t)$	Слика $F(p)=\mathcal{L}(f(t))$		Оригинал $f(t)$	Слика $F(p)=\mathcal{L}(f(t))$
1	1	$\frac{1}{p}$	12	$chat$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$	13	$\frac{1}{\omega}e^{at}sin\omega t$	$\frac{1}{(p-a)^2+\omega^2}$
3	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{p^n}, n=1,2,\ldots$	14	$e^{at}cos\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
4	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	15	$\frac{1}{\omega^2}(1-cos\omega t)$	$\frac{1}{p(p^2+\omega^2)}$
5	te^{at}	$\frac{1}{(p-a)^2}$	16	$\frac{1}{\omega^3}(\omega t-sin\omega t)$	$\frac{1}{p^2(p^2+\omega^2)}$
6	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(p-a)^n}, n=1,2,\ldots$	17	$\frac{1}{2\omega^3}(sin\omega t-\omega tcos\omega t)$	$\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$
7	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}, a\neq b$	18	$\frac{1}{2\omega}tsin\omega t$	$\frac{p}{(p^2+\omega^2)^2}$
8	$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}, a\neq b$	19	$tcos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
9	$\frac{1}{\omega}sin\omega t$	$\frac{1}{p^2+\omega^2}$	20	$u(t-a)$	$\frac{e^{-ap}}{p}$
10	$cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	21	$\delta(t)$	1
11	$\frac{1}{a}shat$	$\frac{1}{p^2-a^2}$	22	$\delta(t-a)$	e^{-ap}

7.3. ПРИМЈЕНА ЛАПЛАСОВЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

Одређивање слике на основу задатог оригинала помоћу Лапласове трансформације, као и одређивање оригинала на основу задате слике помоћу инверзне Лапласове трансформације назива се **операциони рачун**. Користи се за рјешавање диференцијалних једначина (обичних и парцијалних), диференцних једначина, система линеарних диференцијалних једначина и неких типова интегралних једначина.

Примјер 7.12. Ријешити Кошијев задатак

$$y'' - 3y' + 2y = 4t, \qquad y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

Рјешење: Користећи линеарност Лапласове трансформације из дате диференцијалне једначине добијамо

$$\mathcal{L}(y'') - 3\mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(4t). \tag{7.16}$$

Нека је $\mathcal{L}(y) = Y(p)$. Користећи особине Лапласовог трансформата првог и другог извода, тј. формуле (7.4) и (7.5) добијамо

$$\mathcal{L}(y') = p\mathcal{L}(y) - y(0) = pY(p) - 1$$

и

$$\mathcal{L}(y'') = p^2\mathcal{L}(f) - pf(0) - f'(0) = p^2Y(p) - p + 1.$$

Сада уврштавањем у (7.16) добијамо

$$p^2Y(p) - p + 1 - 3pY(p) + 3 + 2Y(p) = \frac{4}{p^2}$$

па је

$$Y(p) = \frac{p^3 - 4p^2 + 4}{p^2(p^2 - 3p + 2)} = \frac{p^3 - 4p^2 + 4}{p^2(p-1)(p-2)}.$$

Растављањем функције $Y(p)$ на елементарне разломке добијамо

$$Y(p) = \frac{3}{p} + \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-2}.$$

Одавде примјеном инверзне Лапласове трансформације добијамо оригинал $Y(p)$, тј. рјешење Кошијевог задатка

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(Y(p)\big) = 3 + 2t - e^t - e^{2t}.$$

Примјер 7.13. Ријешити Кошијев задатак

$$y'' + 3y' + 2y = \delta(t-a), y(0) = 0, y'(0) = 0,$$

гдје је $\delta(t-a)$ Диракова делта функција.

Рјешење: Нека је $\mathcal{L}(y) = Y(p)$. Тада је

$$\mathcal{L}(y') = pY(p) \text{ и } \mathcal{L}(y'') = p^2Y(p).$$

Пошто је $\mathcal{L}\big(\delta(t-a)\big) = e^{-ap}$, примјеном Лапласове трансформације на дату диференцијалну једначину добијамо

$$p^2Y(p) + 3pY(p) + 2Y(p) = e^{-ap}.$$

Одавде је

$$Y(p) = \frac{e^{-ap}}{p^2 + 3p + 2} = e^{-ap}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}\right) = e^{-ap}F(p).$$

Пошто је

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}\right) = e^{-t} - e^{-2t}$$

из формуле (7.9_1) добијамо

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(Y(p)\big) = \mathcal{L}^{-1}(e^{-ap}F(p)) = f(t-a)u(t-a) = \begin{cases} e^{-(t-a)} - e^{-2(t-a), t>a} \\ 0, t \le a \end{cases}.$$

Примјер 7.14. Одредити рјешење система

$$x'' + y' = e^t - x, \quad y'' + x' = 1$$

које задовољава почетне услове $x(0) = 1, y(0) = 0,\ x'(0) = 2, y'(0) = -1$.

Рјешење: Нека је $\mathcal{L}(x) = X(p)$ и $\mathcal{L}(y) = Y(p)$. Тада је

$$\mathcal{L}(x') = pX(p) - 1, \qquad \mathcal{L}(x'') = p^2X(p) - p - 2$$

и

$$\mathcal{L}(y') = pY(p), \mathcal{L}(y'') = p^2Y(p) + 1.$$

Уврштавањем у систем добијамо

$$p^2X(p) - p - 2 + pY(p) = \frac{1}{p-1} - X(p),$$

$$p^2Y(p) + 1 + pX(p) - 1 = \frac{1}{p}.$$

тј.

$$(p^2 + 1)X(p) + pY(p) = \frac{1}{p-1} + p + 2$$

$$pX(p) + p^2Y(p) = \frac{1}{p}.$$

Множењем прве једначине са $(-p)$ и додавањем другој, добијамо систем

$$-p^3X(p) = -\frac{p}{p-1} - p^2 - 2p + \frac{1}{p}$$
$$pX(p) + p^2Y(p) = \frac{1}{p}.$$

Одавде добијамо

$$X(p) = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^4}$$
$$Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^5}.$$

Примјеном инверзне Лапласове трансформације добијамо рјешење система

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(X(p)\big) = e^t + t - \frac{t^3}{6},$$
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(Y(p)\big) = 1 - e^t + \frac{t^4}{24}.$$

8. ФУРИЈЕОВИ РЕДОВИ

8.1. ПЕРИОДИЧНЕ ФУНКЦИЈЕ И ТРИГОНОМЕТРИЈСКИ РЕДОВИ

Кажемо да је функција f **периодична** ако постоји реалан број $T \neq 0$ такав да за све вриједности x из области дефинисаности те функције вриједи

$$f(x+T) = f(x). \tag{8.1}$$

Број T се назива **период** функције f.

Ако је функција дефинисана за свако реално x и ако она има период $T,$ тада је и $(-T)$ период те функције, па таква функција увијек има **позитиван период**. Зато за функцију $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ кажемо да је периодична ако постоји **позитиван** број T такав да вриједи (8.1).

Најмањи позитиван период функције f, ако постоји, се назива **основни период** функције.[4]

[4] Функција $f(x) = c = const.$ је приодична јер за свако $T \neq 0$ задовољава услов (8.1), али та функција нема основни период.

Примјер 8.1. а) Функција $f(x) = a\sin(bx + c)\,, x\ a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$ је периодична са основним периодом $\frac{2\pi}{b}$.

б) Функција $f(x) = \sin\sqrt{x}\,, x \geq 0$ није периодична. Растојање између сусједних нула функције је

$$x_{k+1} - x_k = (k+1)^2\pi^2 - k^2\pi^2 = (2k+1)\pi^2.$$

Одавде добијамо да растојање између сусједних нула тежи ка ∞ кад $k \to \infty$, па функција не може бити периодична. □

Интеграбилне периодичне функције имају сљедећу важну особину.

Лема 8.1. Нека је f интеграбилна периодична функција са периодом T. Тада је

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

гдје је a произвољан реалан број.

Доказ: Из особина одређеног интеграла имамо

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx.$$

Даље је

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \left|\begin{matrix} t = x - T \\ dx = dt \end{matrix}\right| = \int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt.$$

Одавде је

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(x)dx\,. \square$$

Дефиниција 8.1. Скуп функција

$$1, cosx, sinx, cos2x, sin2x, \dots, cosnx, sinnx, \dots \tag{8.2}$$

се назива **тригонометријски систем**.

Функције $cosnx$ и $sinnx, n = 1,2,3, \dots$ су периодичне са основним периодима $\frac{2\pi}{n}$. Према томе, функције из (8.2) имају период 2π.

Доказаћемо да тригонометријски систем има **особину ортогоналности**.

Дефиниција 8.2. Кажемо да је систем реалних функција $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ **ортогоналан** на интервалу $a \leq t \leq b$ ако вриједи

$$\int_a^b g_n(x) g_m(x) dx = \begin{cases} 0, n \neq m \\ \lambda_n, n = m \end{cases}. \tag{8.3}$$

Лема 8.2. Тригонометријски систем (8.2) је ортогоналан на интервалу $-\pi \leq t \leq \pi$.

Доказ: Имамо

$$\int_{-\pi}^{\pi} cosnxdx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} sinnxdx = 0, n = 1,2,\dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cosmxcosnxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (cos(m+n)\,x + cos(m-n)x)dx = 0, m, n = 1,2,\dots m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sinmxsinnxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (cos(m-n)\,x - cos(m+n)x)dx = 0, m, n = 1,2,\dots, m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cosmxsinnxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (sin(m+n)\,x + sin(n-m)x)dx = 0, m, n = 1,2,\dots, m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\,\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} cos^2 nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} sin^2 nxdx = \pi, n = 1,2,\dots \square$$

Ред облика

$$\frac{a_0}{2} + a_1 cosx + b_1 \, sinx + a_2 \, cos2x + b_2 sin2x + \cdots + a_n cosnx + b_n sinnx + \cdots \tag{8.4}$$

гдје су $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, називамо **тригонометријским редом.**

Тригонометријски ред (8.4) краће записујемо о у облику

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cosnx + b_n sinnx). \tag{8.5}$$

Ако је тригонометријски ред конвергентан, његова сума је приодична функција са периодом 2π јер сви чланови тог реда имају период 2π.

Компликоване периодичне функције које се појављују у инжењерским задацима се често представљају помоћу једноставнијих периодичних функција, а многе од њих се могу представити и помоћу тригонометријских редова.

Представити периодичну функцију помоћу тригонометријског реда значи наћи конвергентан тригонометријски ред чија је сума та функција.

8.1. ФУРИЈЕОВИ РЕДОВИ

Нека је $f(x)$ периодична функција са периодом 2π која се на интервалу $-\pi \leq t \leq \pi$ може представити равномјерно конвергентним тригонометријским редом

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx + b_n sinnx). \tag{8.6}$$

Сљедећа теорема говори о томе на који начин се одређују коефицијенти $a_n, n = 0,1,2, \ldots.$ и $b_n,\ \ n = 1,2, \ldots.$

Теорема 8.1. Ако се функција $f(x)$ може представити помоћу тригонометријског реда (8.6) који је равномјерно конвергентан на $-\pi \leq t \leq \pi$, тада вриједе **Ојлер-Фуријевое формуле**:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosnxdx,\ \ n = 0,1,2, \ldots. \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sinnxdx,\ \ n = 1,2, \ldots. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Доказ: Одредимо прво коефицијент a_0. С обзиром да је по претпоставци ред (8.6) равномјерно конвергентан, може се интегралити члан по члан.

Користећи ову особину и интегралећи обје стране једнакости у (8.6) од $-\pi$ до π добијамо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi} cosnxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi} sinnxdx).$$

Према Леми 8.2. сви интеграли са десне стране ове једнакости су једнаки нули осим интеграла који стоји уз коефицијент a_0 који има вриједност 2π. Добијамо

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Ако помножимо у (8.6) са $cosmx$ и интегралимо обје стране тако добијене једнакости од $-\pi$ до π добијамо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosmxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} cosmxdx +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi} cosmxcosnxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi} cosmxsinnxdx).$$

Према Леми 8.2 сви интеграли са десне стране ове једнакости су једнаки нули осим интеграла који стоји уз коефицијент a_m који има вриједност π. Дакле, добијамо

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosmxdx, \ m = 1,2,\dots.$$

На исти начин множењем са $sinmx$ у (8.6) и интеграљењем од $-\pi$ до π добијамо

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinmxdx, \ m = 1,2,\dots . \square$$

Дефиниција 8.3. Тригонометријски ред

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx + b_n sinnx) \tag{8.8}$$

чији су коефицијенти одређени формулама (8.7) назива се **Фуријеов ред** функције $f(x)$. Коефицијенти $a_n, n = 0,1,2,\ldots.$ и $b_n,\ n = 1,2,\ldots$ називају се **Фуријеови коефицијенти** функције $f(x)$.

Уочимо да у Дефиницији 8.4. не претпостављамо да је ред (8.8) равномјерно конвергентан.

Ако је функција $f(x)$ **парна**, тада је функција $f(x)cosnx$ парна а функција $f(x)sinnx$ непарна. Због тога је

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)cosnxdx,\ \ n = 0,1,2,\ldots.$$

и

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx = 0,\ \ n = 1,2,\ldots.$$

Према томе, парна функција има Фуријеов ред облика

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnx.$$

Ако је функција $f(x)$ **непарна**, тада је функција $f(x)cosnx$ непарна а функција $f(x)sinnx$ парна. Због тога је

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx = 0,\ \ n = 0,1,2, \dots.$$

и

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)sinnxdx,\ \ n = 1,2, \dots.$$

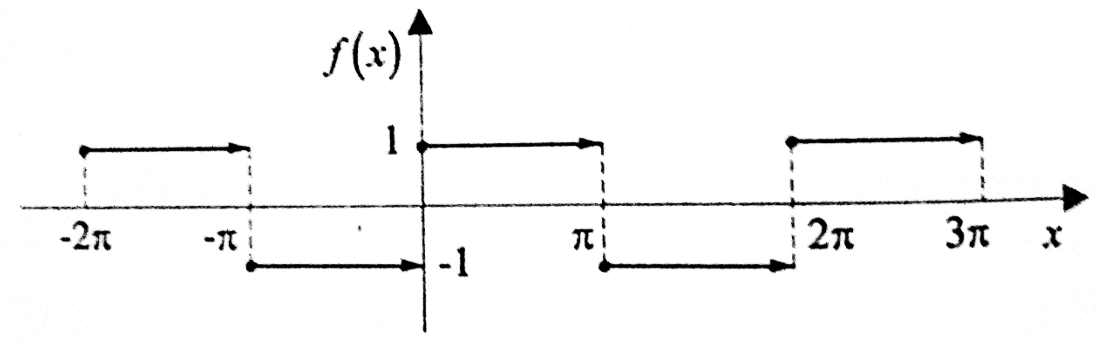
Према томе, непарна функција има Фуријеов ред облика

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n sinnx.$$

Примјер 8.2. Одредити Фуријеов ред функције

$$f(x) = \begin{cases} -1, -\pi \leq x < 0 \\ 1, 0 \leq x < \pi \end{cases}, f(x + 2\pi) = f(x).$$

Рјешење: График функције f је дат на Слици 8.1.



Слика 8.1.

Пошто је функција непарна, имамо

$$a_n = 0, \qquad n = 0,1,2,\dots.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) sinnxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} sinnxdx = \frac{2}{n\pi}\ (1 - cosn\pi) =$$

$$\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) = \begin{cases} \dfrac{4}{(2m-1)\pi}, n = 2m-1 \\ 0, n = 2m \end{cases}, m = 1,2,\dots.$$

Дакле, Фуријеов ред функције је

$$\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{sin(2m-1)x}{2m-1} = \frac{4}{\pi}\left(sinx + \frac{sin3x}{3} + \frac{sin5x}{5} + \cdots\right). \square$$

Нека је функција $f(x)$ периодична функција са периодом 2π и интеграбилна на интервалу $-\pi \leq x \leq \pi$. Тада су и функције $f(x)cosnx$ и $f(x)sinnx$ интеграбилне на том интервалу, па је могуће израчунати Фуријеове коефицијенте (8.7). Дакле, функцији $f(x)$ можемо **придружити** њен Фуријеов ред. То записујемо у облику

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx + b_n sinnx). \tag{8.9}$$

Знак ~ користимо да укажемо да је ред на десној страни Фуријеов ред функције $f(x)$. При томе у (8.9) не мора да вриједи знак једнакости што зависи од тога да ли је тригонометријски ред конвергентан или не, као и од тога да ли у случају конверегенције ред конвергира управо ка функцији $f(x)$.

Ако је Фуријеов ред функције $f(x)$ конвергентан и ако је његова сума $f(x)$ пишемо

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx + b_n sinnx) \tag{8.10}$$

и тада кажемо да је **функција представљена помоћу Фуријеовог реда.**

Разматрамо услове које морају да испуњавају функције које се могу представити помоћу Фуријеовог реда.

Дефиниција 8.4. Кажемо да функција $f(x)$ задовољава **Дирихлеове** [5] **услове** на интервалу $-\pi \leq x \leq \pi$ ако она на том интервалу има највише коначан број тачака прекида прве врсте и највише коначан број тачака екстрема.

Теорема 8.2. (Дирихлеова теорема) Ако периодична функција $f(x)$ са периодом 2π задовољава Дирхлеове услове на интервалу $-\pi \leq x \leq \pi$, тада њен Фуријеов ред конвергира на том интервалу ка функцији $F(x)$ за коју је:

1. $F(x) = f(x)$ у свим тачкама у којима је функција f непрекидна,

2. $F(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ у тачкама прекида фунције f и

3. $F(x) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ у тачкама $x = -\pi$ и $x = \pi$. □

Примјер 8.3. Функција $f(x)$ из Примјера 8.2. задовољава Дирихлеове услове на $-\pi \leq x \leq \pi$. Пошто је функција непрекидна на $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ добијамо да је

$$F(x) = f(x), x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi).$$

[5] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), њемачки математичар

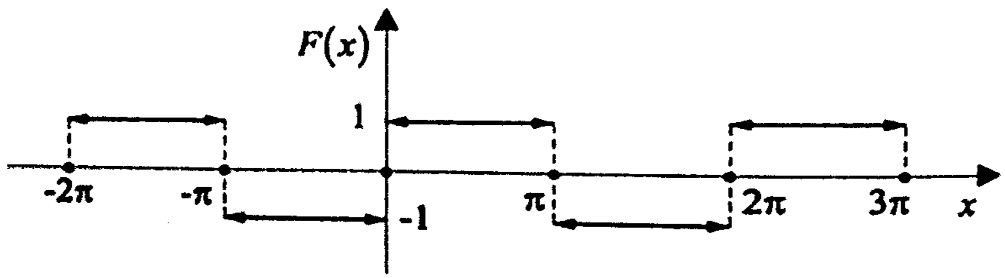
У тачки $x = 0$ функција има прекид прве врсте па је

$$F(0) = \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

док у тачкама $x = -\pi$ и $x = \pi$ имамо

$$F(-\pi) = F(\pi) = \frac{-1+1}{2} = 0.$$

График функције F је дат на слици 8.2.



Слика 8.2.

Дакле, вриједи

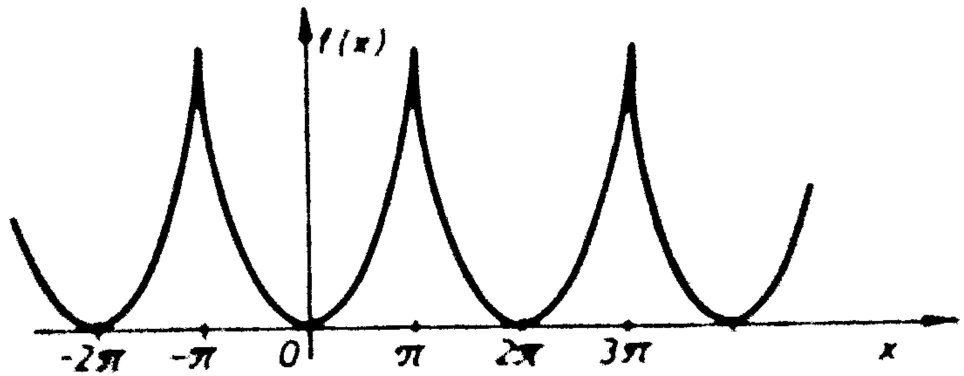
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{sin(2m-1)x}{2m-1}, x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi).$$

Ако у горњу суму уврстимо $x = \pi/2$ добијамо

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} = \frac{\pi}{4}. \square$$

Примјер 8.4. Одредити Фуријеов ред функције $f(x) = \frac{x^2}{4}, -\pi \leq x < \pi$ која је периодична са периодом 2π. Одредити суме редова $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Рјешење: Функција $f(x)$ је парна па је $b_n = 0$ (Слика 8.3).



Слика 8.3.

Добијамо

$$a_0 = \frac{\pi^2}{6}, \quad a_n = \frac{cosn\pi}{n^2} = \frac{(-1)^n}{n^2}, n = 1,2, \ldots$$

Дакле, Фуријеов ред функције је

$$\frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} cosnx.$$

Пошто је функција f непрекидна, знак једнакости вриједи за $-\pi \leq x < \pi$. Дакле,

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} cosnx, -\pi \leq x < \pi.$$

Стављајући у горњу једнакост $x = 0$ добијамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Ако уврстимо $x = \pi$ добијамо

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \square$$

8.2. ФУРИЈЕОВИ РЕДОВИ ЗА ФУНКЦИЈЕ СА ПЕРИОДОМ $T = 2l$

Посматрамо перидичну функцију f са периодом $T = 2l$, гдје је l произвољан позитиван број. Уведимо функцију

$$\varphi(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right).$$

Тада је

$$\varphi(t + 2\pi) = f\left(\frac{l(t + 2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{lt}{\pi} + 2l\right) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \varphi(t)$$

па функција φ има период 2π. Према томе, Фуријеов ред функције φ је облика (8.9)

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnt + b_n sinnt)$$

гдје је

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)cosntdt, \ \ n = 0,1,2, \ldots.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)sinntdt, \ \ n = 1,2, \ldots.$$

Уводећи смјену $t = \frac{\pi x}{l}$ из ових формула добијамо

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n cos \frac{n\pi}{l} x + b_n sin \frac{n\pi}{l} x\right), \tag{8.11}$$

гдје је

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) cos \frac{n\pi}{l} x dx, \ \ n = 0,1,2, ...$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) sin \frac{n\pi}{l} x dx, \ \ n = 1,2, ... \tag{8.12}$$

Ако је функција $f(x)$ **парна са периодом $2l$**, тада је Фуријеов ред функције f облика

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos \frac{n\pi}{l} x.$$

Ако је функција $f(x)$ **непарна са периодом $2l$**, тада је Фуријеов ред облика

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n sin \frac{n\pi}{l} x.$$

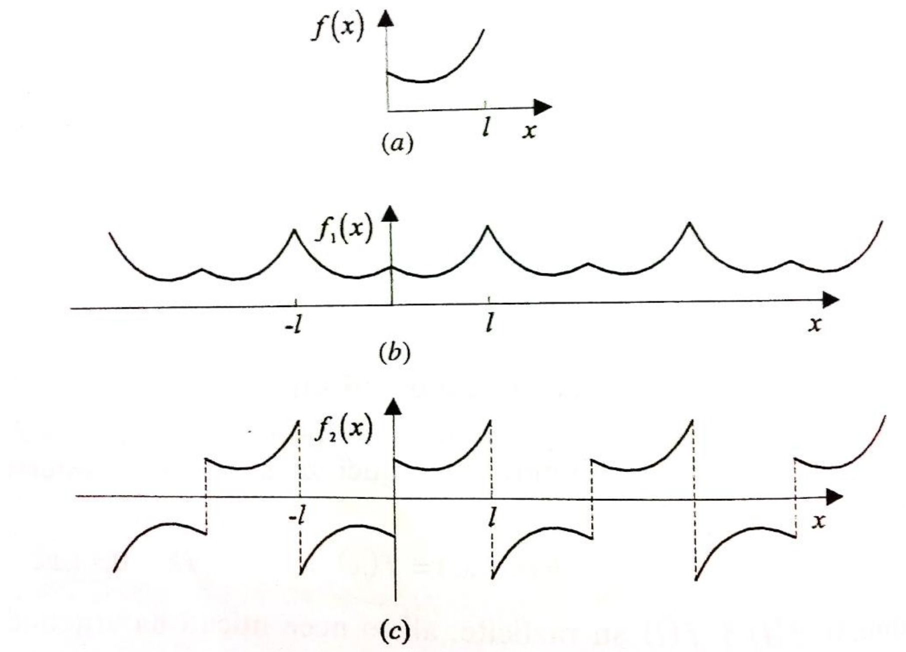
Примјер 8.5. Одредити Фуријеов ред функцију $f(x) = |x| - 1, -1 \leq x < 1$ која је периодична са периодом $T = 2l = 2$. Одредити суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Рјешење:

$$|x| - 1 = -\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}, -1 \leq x < 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \square$$

У пракси се често јавља потреба да се функција која је задана на неком коначном интервалу представи помоћу Фуријеовог реда. Показаћемо како се одређује Фуријеов ред функције која је задата само на интервалу $0 \leq x \leq l$, Слика 8.4. а).



Слика 8.4.

Једна од могућности је да ту функцију продужимо периодично тако да јој период буде $T = l$ и да онда одредимо Фуријеов ред функције. Функција се може продужити периодично само ако је $f(0) = f(l)$. Ако тај услов није испуњен, онда посматрамо периодичну функцију F са периодом $T = l$ за коју је

$$F(x + kl) = f(x), 0 \leq x < l\,, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Иако су вриједности $F(l)$ и $f(l)$ различите, то неће утицати на вриједности Фуријеових коефицијената функција F и f, па ће Фуријеови редови функција F и f бити једнаки.

Такође можемо периодично продужити функцију тако да њен Фуријеов ред садржи само косинусе или само синусе. У првом случају функцију ћемо продужити тако да се добије парна функција (Слика 8.4. б)) а у другом тако да се добије непарна функција (Слика 8.4. ц).

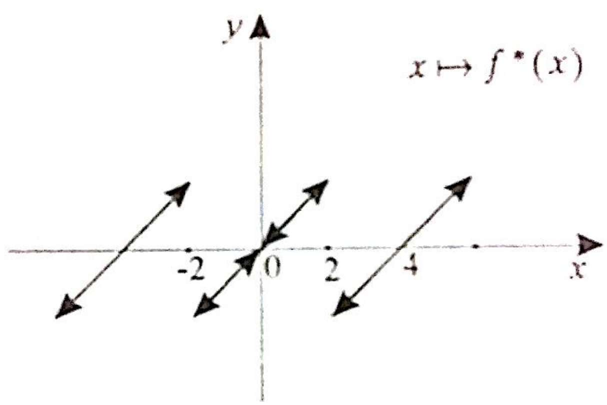
Примјер 8.6. Функцију $f(x) = x, 0 < x < 2$ развити

а) у синусни Фуријеов ред,

б) у косинусни Фуријеов ред.

Рјешење: а) Функцију f продужимо тако да добијемо непарну функцију (Слика 8.5). Продужење функције f је функција F за коју је $l = 2,\ T = 4$ и

$$F(x) = x, x \in (-2,0) \cup (0,2), F(x+4) = F(x).$$



Слика 8.5.

Фуријеов ред функције F на основу Дирихлеове теореме конвергира ка функцији F за свако $0 < x < 2$. Пошто је $F(x) = f(x), x \in (0,2)$ добијамо да Фуријеов ред функције F конвергира ка $f(x), x \in (0,2)$. Добијамо

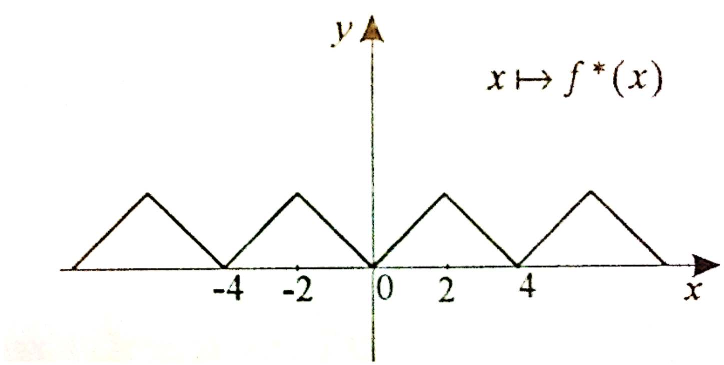
$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} F(x) sin\frac{n\pi}{2}xdx = \int_0^2 x sin\frac{n\pi}{2}xdx = -\frac{4}{n\pi}cos n\pi, \qquad n = 1,2, \ldots.$$

Дакле,

$$x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} sin\frac{n\pi}{2}x, 0 < x < 2.$$

б) Функцију f продужимо тако да добијемо парну функцију (Слика 8.6). Продужење функције f је функција F за коју је $l = 2,\ T = 4$ и

$$F(x) = \begin{cases} x, x \in (0,2) \\ -x, x \in (-2,0) \end{cases}, F(x+4) = F(x).$$



Слика 8.6.

И у овом случају Фуријеов ред функције F на основу Дирихлеове теореме конвергира ка функцији f за свако $0 < x < 2$. Добијамо

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} F(x)dx = \int_0^2 xdx = 2,$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} F(x)cos\frac{n\pi}{2}xdx = \int_0^2 xcos\frac{n\pi}{2}xdx = \frac{cosn\pi}{n^2} = -\frac{4}{n^2\pi^2}(cosn\pi - 1) =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(cosn\pi - 1) = \begin{cases} -\dfrac{8}{(2m-1)^2\pi^2}, n = 2m-1 \\ 0, n = 2m \end{cases}, m = 1,2, \ldots.$$

Дакле

$$x = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}cos\frac{(2m-1)\pi}{2}x, 0 < x < 2. \square$$

8.3. АПРОКСИМАЦИЈА ТРИГОНОМЕТРИЈСКИМ ПОЛИНОМИМА

Дефиниција 8.5. Функција облика

$$T_N(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (A_n cosnx + B_n sinnx) \tag{8.13}$$

се назива **тригонометријски полином** степена N.

Нека је $f(x)$ непрекидна и периодична са периодом 2π и може се представити помоћу Фуријеовог реда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cosnx + b_n sinnx), x \in \mathbb{R}.$$

N −та парцијална сума овог реда је тригонометријски полином (8.13). Ту парцијалну суму можемо узети за апроксимацију функције f тј.

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n cosnx + b_n sinnx), x \in \mathbb{R}.$$

Поставља се питање да ли је то најбоља апроксимација функције тригонометријским полиномом степена N?

Приликом апроксимације циљ нам је да грешка буде што мања. **Грешка апроксимације** се може дефинисати на разне начине. Ако претпоставимо да је функција F апроксимација функције f на интервалу $a \le x \le b$, тада грешку апроксимације E, између осталих, можемо дефинисати и на један од сљедећих начина:

$$E = \sup_{a \le x \le b,} |f(x) - F(x)|, \quad E = \int_a^b |f(x) - F(x)|\, dx, \quad E = \int_a^b (f(x) - F(x))^2\, dx.$$

Одредићемо тригонометријски полином T_N који најбоље апроксимира функцију f у односу на тзв. **квадратну грешку**

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_N(x))^2\, dx \tag{8.14}$$

Значи треба одредити коефицијенте тригонометријског полинома тако да грешка (8.14) буде минимална. Таква апроксимација се назива **квадратна апроксимација** функције f тригонометријским полиномом T_N. Доказаћемо сљедећу теорему:

Теорема 8.3. $N-$ та парцијална сума S_N Фуријеовог реда функције f даје најбољу квадратну апроксимацију функције f тригонометријским полиномом степена N. Грешка те апроксимације је

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2\, dx - \pi \left(\frac{1}{2} {a_0}^2 + \sum_{n=1}^{N} \left({a_n}^2 + {b_n}^2 \right) \right) \tag{8.15}$$

Доказ: Како је $(f - T_N)^2 = f^2 - 2fT_N + {T_N}^2$ добијамо

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} fT_N\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} {T_N}^2\,dx. \tag{8.16}$$

Показује се да је

$$\int_{-\pi}^{\pi} {T_N}^2\,dx = \pi\left(\frac{1}{2}{A_0}^2 + {A_1}^2 + \cdots + {A_N}^2 + {B_1}^2 + {B_2}^2 + \cdots + {B_N}^2\right),$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} fT_N\,dx = \pi(A_0a_0 + A_1a_0 + \cdots + A_Na_N + B_1b_1 + B_2b_2 + \cdots + B_Nb_N)$$

па добијамо

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx - 2\pi\left(\frac{1}{2}A_0a_0 + \sum_{n=1}^{N}(A_na_n + B_nb_n)\right) + \pi\left(\frac{1}{2}{A_0}^2 + \sum_{n=1}^{N}\left({A_n}^2 + {B_n}^2\right)\right). \tag{8.17}$$

Ако у (8.17) ставимо да је $A_n = a_n, B_n = b_n$ добијамо

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx - \pi\left(\frac{1}{2}{a_0}^2 + \sum_{n=1}^{N}\left({a_n}^2 + {b_n}^2\right)\right). \tag{8.18}$$

Одузимањем (8.17) и (8.18) добијамо

$$E - E^* = \pi\left(\frac{1}{2}(A_0 - a_0)^2 + \sum_{n=1}^{N}((A_n - a_n)^2 + (B_n - b_n)^2)\right).$$

Очигледно је $E - E^* \geq 0$ па је $E \geq E^*$. Једнакост $E = E^*$ се достиже само ако је

$$A_0 = a_0,\ A_n = a_n, B_n = b_n, n = 1,2, \ldots$$

Теорема је доказана. □

Из (8.18) видимо да грешке квадратне апроксимације опадају када N расте. Пошто је $E^* \geq 0$ из (8.18) добијамо тзв. **Беселову [6] неједнакост**

$$\frac{1}{2}{a_0}^2 + \sum_{n=1}^{N}\left({a_n}^2 + {b_n}^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2\, dx. \qquad (8.19)$$

Ако функција задовољава Дирихлеове услове тада $S_N(x) \to f(x)$ када $N \to \infty$ и добијамо

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi}(f - S_N)^2\, dx \to 0 \text{ када } N \to \infty.$$

Тако добијамо **Парсевалову [7] једнакост**

$$\frac{1}{2}{a_0}^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left({a_n}^2 + {b_n}^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2\, dx. \qquad (8.20)$$

[6] Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), њемачки астроном и математичар

[7] Mark Antoine Parseval (1755-1836), француски математичар