УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 3- ПРЕДАВАЊА

Академска 2017/2018

5. КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ И КОМПЛЕКСНЕ ФУНКЦИЈЕ

ЛИТЕРАТУРА: **Момир В. Ћелић, Математика II,** Машински факултет, Бања Лука, 1997[1]

Наставник: Биљана Војводић

[1] У припреми предавања коришћена је и књига **Математика, Милош Томић** (Свјетлост, Сарајево, 1988)

5. КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ И КОМПЛЕКСНЕ ФУНКЦИЈЕ

5.1. КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

Скуп комплексних бројева је скуп уређених парова (x, y), $x, y \in \mathbb{R}$, тј.

$$\mathbb{C} = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Једнакост комплексних бројева, те релације сабирања и множења су дефинисине са:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ ако и само ако је } x_1 = x_2 \text{ и } y_1 = y_2 \tag{1}$$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{2}$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{3}$$

Комплексан број означавамо обично са z, тј. $z = (x, y)$. Број x се зове **реални**, а број y **имагинарни** дио комплексног броја z, и означавамо их са $x = Rez, y = Imz$.

Из дефиниције сабирања и множења комплексних бројева и одговарајућих особина реалних бројева лако се показује да за операције сабирања и множења комплексних бројева вриједе сљедеће особине:

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \;\; z_1 z_2 = z_2 z_1$ (комутативност)

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (асоцијативност)

$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (дистрибутивност)

Комплексан број облика $(x, 0)$ се може идентификовати са реалним бројем x јер се операција сабирања и множења поклапају са одговарајућим операцијама у скупу реалних бројева. Дакле,

$$(x, 0) = x.$$

Комплексан број $(0,1)$ се назива **имагинарна јединица** и означава се са i, тј.

$$i = (0,1).$$

Користећи (3) добијамо

$$i^2 = (-1,0) = -1.$$

Пошто је је $(0,1) \cdot (y, 0) = (0, y)$, тј. $iy = (0, y)$ можемо писати

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy.$$

Дакле, комплексан број се може записати у облику

$$z = x + iy,$$

који називамо **алгебарски облик** комплексног броја z. Број облика iy назива се **чисто имагинаран број**.

Релације (1) - (3) за бројеве у алгебарском облику записујемо са

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \text{ ако и само ако је } x_1 = x_2 \text{ и } y_1 = y_2 \tag{1_1}$$

$$(x_1 + iy_1)+(x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{2_1}$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \tag{3_1}$$

Коњугована вриједност комплексног броја $z = x + iy$ је број

$$\bar{z} = x - iy. \tag{4}$$

Из дефиниције слиједи да је $\overline{(\bar{z})} = z$ и да једнакост $z = \bar{z}$ важи ако и само ако је комплексан број реалан.

Модуо комплексног броја $z = x + iy$ је реалан број $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Очигледно је

$$|z| \geq 0 \text{ и } |z| = 0 \text{ ако и само ако је } z = (0,0).$$

Вриједи:

$$|z| = |\bar{z}| \text{ и } z\bar{z} = |z|^2.$$

Број $(0,0)$ је неутрални елемент за сабирање а $(1,0)$ неутрални елемент за множење.

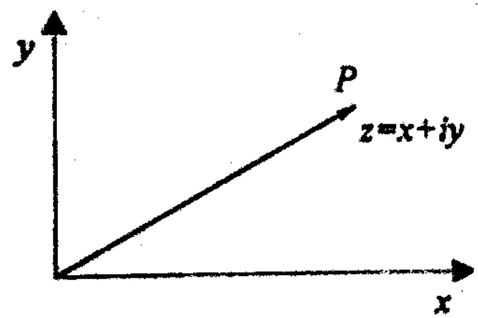
У скупу комплексних бројева се могу увести и операције одузимања и дијељења. За свака два комплексна броја z_1 и z_2 постоји јединствен број z такав да $z + z_2 = z_1$, који се назива **разлика** комплексних бројева z_1 и z_2. Ако је $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ тада је

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Такође, за свака два броја z_1 и z_2 $(z_2 \neq 0)$ постоји јединствен број z такав да је $zz_2 = z_1$ који се назива **количник** комплексних бројева z_1 и z_2. Ако је $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ тада је

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}, \qquad {x_2}^2 + {y_2}^2 \neq 0.$$

Комплексан број $z=(x,y)= x+iy$ можемо геометријски представити помоћу тачке P из $xy-$ равни чије су координате x и y. Тако се успоставља обострано једнозначно пресликавање између тачака равни и скупа комплексних бројева, што омогућава идентификовање комплексних бројева са тачкама равни. Раван у којој се комплексни бројеви представљају на овај начин се назива **комплексна или Гаусова [2] раван**. Пошто се реални бројеви представљају тачкама x −осе а чисто имагинарни тачкама y −осе, ове осе се зову **реална и имагинарна оса**, респективно.



Комплексан број се може представити и помоћу вектора са почетком у тачки 0 и крајем у тачки z. Због једнозначности представљања, вектор који одговара комплексном броју z означавамо истим словом z. Јасно је да је дужина вектора z једнака модулу комплексног броја и да је

$$|Rez| \leq |z|, |Imz| \leq |z|.$$

[2] Johann Carl Friedrich Gauss, lat. Carolus Fridericus Gauss (1777-1855), њемачки математичар

Представљање комплексних бројева помоћу вектора омогућава интерпретацију сабирања и одузимања комплексних бројева као сабирања и одузимања вектора.

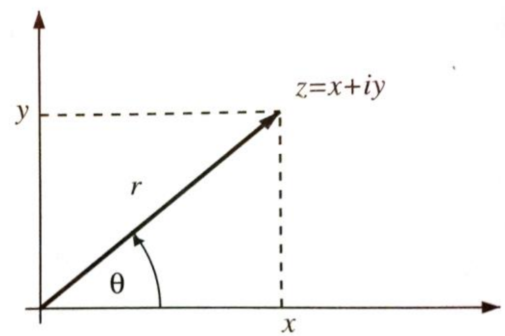
Тачке $0, z_1, z_1 + z_2$ представљају врхове троугла чије стране имају дужине $|z_1|$, $|z_2|$ и $|z_1 + z_2|$, па на основу познатих неједнакости за дужине страница троугла добијамо **неједнакост троугла**

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Индукцијом се доказује уопштење неједнакости троугла

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|, n \in \mathbb{N}.$$

Положај тачке $z = x + iy$ у комплексној равни може се једнозначно одредити и помоћу **поларних координата** r и θ.



Нека је $r = |z|$ растојање тачке z од координатног почетка, а θ угао између позитивног дијела реалне осе и радијус-вектора тачке z.

Угао θ се назива **аргумент** комплексног броја z $(z \neq 0)$ и означава се са $\boldsymbol{arg z}$. За $z = 0$ аргумент се не дефинише.

Очигледно је

$$x = r cos\theta, \qquad y = r sin\theta, \tag{5}$$

па број $z = x + iy$ можемо представити у **поларном или тригонометријском** облику

$$z = r(cos\theta + i sin\theta). \tag{6}$$

Користи се и ознака

$$z = re^{i\theta}$$

и то је **експоненцијални облик** комплексног броја.

Из (5) и (6) имамо

$$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{7}$$

па за одређивање аргумента треба ријешити систем (7). Овај систем има бесконачно много рјешења која можемо записати у облику

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

гдје је θ_0 једно рјешење тог система. Обично је θ_0 вриједност из интервала $(-\pi, \pi]$ и назива се **главна вриједност аргумента** и означава са $\boldsymbol{Argz}$. Дакле,

$$argz = Argz + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

гдје је

$$-\pi < Argz \leq \pi.$$

Из система (7) добијамо да аргумент θ задовољава једначину

$$tg\theta = \frac{y}{x}.$$

Примјер 5.1. Представити сљедеће комплексне бројеве у тригонометријском облику:

а) $z = -1 + i$, б) $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Рјешење: а) $r = \sqrt{2}$, $cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$ па је

$$z = -1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right).$$

б) $z = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} - isin\frac{2\pi}{3}\right)$. □

Ако су дати комплексни бројеви у тригонометријском облику

$$z_1 = r_1(cos\theta_1 + isin\theta_1) \text{ и } z_2 = r_2(cos\theta_2 + isin\theta_2)$$

тада је

$$z_1 = z_2 \text{ ако и само ако је } r_1 = r_2 \text{ и } \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Такође, множењем комплексних бројева у тригонометријском облику и примјеном адиционих формула добијамо

$$z_1 z_2 = r_1(cos\theta_1 + isin\theta_1) \cdot r_2(cos\theta_2 + isin\theta_2) =$$

$$r_1 r_2(cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2 + i(cos\theta_1 sin\theta_2 + sin\theta_1 cos\theta_2)) =$$

$$r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

Према томе,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)) \tag{8}$$

па је

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

док је аргумент производа $z_1 z_2$ једнак збиру аргумената бројева z_1 и z_2 до на сабирак $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, тј.

$$arg(z_1 z_2) = argz_1 + argz_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Користећи резултат за множење комплексних бројева, за количник бројева z_1 и z_2 $(z_2 \neq 0)$ добијамо

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{r_1(cos\theta_1 + isin\theta_1) \cdot r_2(cos\theta_2 - isin\theta_2)}{{r_2}^2} =$$

$$\frac{r_1}{r_2}(cos\theta_1 cos\theta_2 + sin\theta_1 sin\theta_2 + i(sin\theta_1 cos\theta_2 - cos\theta_1 sin\theta_2))$$

односно

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)). \tag{9}$$

Према томе

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, (z_2 \neq 0), \qquad arg\frac{z_1}{z_2} = argz_1 - argz_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Користећи формуле (8) и (9) лако се добија Moavrova [3] формула

$$z^m = (r(cos\theta + isin\theta))^m = r^m(cosm\theta + isinm\theta), m \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Поларни облик комплексног броја је погодан и за одређивање n −тог коријена комплексног броја. Ако је $z = w^n$, тада свакој вриједности w одговара тачно једна вриједност z. Обрнуто, показаћемо да свакој вриједности z одговара тачно n различитих вриједности w. Свака од тих вриједности се назива **n −ти коријен** комплексног броја z и означава се са

$$w = \sqrt[n]{z}.$$

Нека је $z = r(cos\theta + isin\theta)$ и нека је $w = R(cos\varphi + isin\varphi)$. Тада из (10) добијамо

$$R^n(cosn\varphi + isinn\varphi) = r(cos\theta + isin\theta)$$

па је

$$R^n = r,\ \ n\varphi = \theta + 2k\pi \Rightarrow R = \sqrt[n]{r}, \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Тако добијамо вриједност n −тог коријена комплексног броја z

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + isin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

[3] Abraham de Moivre (1667-1754), француски математичар

За $k = 0,1,2, \dots n-1$ добијамо n различитих вриједности w, док за остале вриједности k добијамо неку од већ одређених вриједности. Због тога $\sqrt[n]{z}$, $z \neq 0$ има тачно n различитих вриједности које одређујемо помоћу формуле (11). Све те вриједности се налазе на кружници полупречника $\sqrt[n]{r}$ са центром у координатном почетку. Вриједност комплексног броја w која се из (5.11) добија за $\theta = Argz$ и $k = 0$ назива се **главна вриједност $\boldsymbol{n}$ −тог коријена** комплексног броја z.

Примјер 5.2. Израчунати: а) $\sqrt[4]{-1-i}$, б) $\sqrt[6]{-1}$.

Пошто за $z = r(cos\theta + isin\theta)$ имамо $\bar{z} = r(cos\theta - isin\theta)$ закључујемо да је

$$Arg\bar{z} = -Argz.$$

Сада се лако показује да операција коњуговања има сљедеће особине:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$,
2. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z_1} - \bar{z_2}$,
3. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z_1}\bar{z_2}$,
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}, (z_2 \neq 0)$,
5. $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$.

5.2. НИЗОВИ И РЕДОВИ КОМПЛЕКСНИХ БРОЈЕВА

Дефиниција 5.1. Комплексан број a је **гранична вриједност** низа $\{z_n\}$ ако

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)|z_n - a| < \epsilon. \tag{5.1}$$

Пишемо $\lim_{n\to\infty} z_n = a$.

За низ који има граничну вриједност кажемо да је **конвергентан**. Ако низ није конвергентан, кажемо да је **дивергентан**.

Из дефиниције граничне вриједности добијамо да је број a је гранична вриједност низа $\{z_n\}$ ако је

$$\lim_{n\to\infty}|z_n - a| = 0.$$

Скуп комплексних бројева z таквих да је $|z - a| < \epsilon$, гдје је $\epsilon > 0$ називамо **ϵ −околином** тачке a. То је круг полупречника ϵ са центром у тачки a.

Из дефиниције граничне вриједности добијамо да је тачка a гранична вриједност низа $\{z_n\}$ ако се **у свакој ϵ −околини тачке a налазе сви чланови низа почев од неког**.

Скупу комплексних бројева $\{z_n\}$ одговарају два низа реалних бројева $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, при чему је

$$z_n = x_n + iy_n, n = 1,2, \dots$$

Лако се покаже да се одређивање граничне вриједности низа $\{z_n\}$ своди на одређивање граничних вриједности низова $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ и да је

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + i\lim_{n\to\infty} y_n. \tag{5.2}$$

Из (5.2) и особина реалних низова добијамо да за низове комплексних бројева $\{z_n\}$ и $\{w_n\}$ вриједи

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n + w_n) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n + \lim\limits_{n\to\infty} w_n,$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n w_n) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} w_n,$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_n}{w_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} w_n}, w_n \neq 0, n = 1,2, \dots, \lim\limits_{n\to\infty} w_n \neq 0.$

Примјер 5.3. Испитати конвергенцију низова и одредити граничну вриједност ако постоји

а) $z_n = \frac{i^n}{n}$, б) $z_n = i^n$, в) $z_n = \frac{n\pi}{1+2in}$.

Рјешење: а)

$$|z_n| = \left|\frac{i^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |z_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 0.$$

б)

$$z_{4n} = 1,\ z_{4n+1} = i,\ z_{4n+2} = -1,\ z_{4n+3} = -i,$$

низ је дивергентан.

в)

$$z_n = \frac{n\pi}{1+2in} = \frac{n\pi(1-2in)}{1+4n^2} = \frac{n\pi}{1+4n^2} - i\frac{2n^2\pi}{1+4n^2} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n\pi}{1+4n^2} - i\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2\pi}{1+4n^2} = -\frac{\pi i}{2}.$$

Дефиниција 5.2. Кажемо да је ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \tag{5.3}$$

конвергентан ако је низ $\{S_n\}$ његових парцијалних сума конвергентан,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k.$$

Граничну вриједност s низа $\{S_n\}$ зовемо **сумом реда** (5.3) и пишемо

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} z_k.$$

Ако је ред (5.3) конвергентан, тада је

$$\lim_{k\to\infty} z_k = 0. \tag{5.4}$$

Услов (5.4) је потребан али не и довољан за конвергенцију реда (5.3).

Ред (5.3) можемо записати у облику

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

Ред (5.3) је конвергентан ако и само ако су редови

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

конвергентни.

Ако је ред (5.3) конвергентан тада је и ред $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha z_k$, гдје је α комплексан број, конвергентан и вриједи

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha z_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} z_k.$$

Ако су редови $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ конвергентни, тада је и ред $\sum_{k=1}^{\infty}(z_k + w_k)$ конвергентан и вриједи

$$\sum_{k=1}^{\infty}(z_k + w_k) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k + \sum_{k=1}^{\infty} w_k.$$

Дефиниција 5.3. Кажемо да је ред (5.3) **апсолутно конвергентан** ако је ред

$$\sum_{k=1}^{\infty}|z_k| \tag{5.5}$$

конвергентан.

Ако је ред (5.5) конвергентан тада је и ред (5.3) конвергентан, тј. из апсолутне конвергенције реда слиједи и (обична) конвергенција реда.

Ако је ред (5.3) конвергентан а ред (5.5) дивергентан, кажемо да ред (5.3) **условно конвергентан.**

За испитивање конвергенције комплексних редова могу се користити критеријуми из реалне анализе.

- ***Критеријум поређења***

Ако за ред (5.3) постоји конвергентан ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ са ненегативним члановима такав да је

$$|z_k| \leq a_k, k = 1,2, \ldots$$

тада је ред (5.3) апсолутно конвергентан.

Код критеријума поређења често се користи геометријски ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k$$

који је је конвергентан за $|q| < 1$ и дивергентан за $|q| \geq 1$.

- ***Даламберов критеријум***

Нека је $z_k \neq 0, k = 1,2, \ldots$ и

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| = L.$$

Ако је $L < 1$ ред (5.3) је апсолутно конвергентан, а дивергентан ако је $L > 1$.

- ***Кошијев критеријум***

Нека је

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|z_k|} = L.$$

Ако је $L < 1$ ред (5.3) је апсолутно конвергентан, а дивергентан ако је $L > 1$.

Примјер 5.4. Испитати конверегенцију редова

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(in)^n}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}e^{in}, \alpha > 1$.

Рјешење: а) Примјењујући Кошијев критеријум добијамо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1+i}{2}\right|^n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

па је ред апсолутно конвергентан.

б) Примјењујемо Даламберов критеријум. Имамо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = e^{-1} < 1$$

па је ред апсолутно конвергентан.

в) Ред је апсолутно конвергентан јер је $\left|n^{-\alpha}e^{in}\right| = n^{-\alpha}$ и ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$

за $\alpha > 1$ конвергира.

5.3. КОМПЛЕКСНЕ ФУНКЦИЈЕ РЕАЛНОГ АРГУМЕНТА. КРИВЕ И ОБЛАСТИ У КОМПЛЕКСНОЈ РАВНИ

Дефиниција 5.4. Ако је свакој тачки t са интервала $I \subseteq \mathbb{R}$ придружен тачно један комплексан број, кажемо да је на I задата **комплексна функција**

$$z = z(t), \qquad t \in I.$$

Комплексну функцију $z = z(t)$ можемо представити у облику

$$z(t) = x(t) + iy(t), \qquad t \in I. \tag{5.6}$$

Уочимо да се функција (5.6) може третирати као векторска функција $z(t) = (x(t), y(t))$ па за њу вриједи све оно што је показано за векторске функције скаларaног аргумента. [4] Зато наводимо само основне дефиниције у терминима комплексних бројева.

Гранична вриједност функције у тачки t_0 се дефинише са

$$\lim_{t \to t_0} z(t) = \lim_{t \to t_0} x(t) + i \lim_{t \to t_0} y(t).$$

[4] Видјети Векторске функције (Тема 1)

Комплексна функција (5.6) је **непрекидна** у тачки t_0 ако су у тој тачки непрекидне функције $x(t)$ и $y(t)$. Тада је

$$\lim_{t\to t_0} z(t) = z(t_0).$$

Извод функције (5.6) се дефинише помоћу формуле

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

Одређени интеграл функције (5.6) се дефинише помоћу формуле

$$\int_a^b z(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + i\int_a^b y(t)\,dt.$$

Ако је функција $z = z(t), a \leq t \leq b$ непрекидна на интервалу $a \leq t \leq b$, њен график представља неку **криву** у комплексној равни. Нпр. функција

$$z(t) = 3cost + 3isint, 0 \leq t \leq \pi$$

представља горњу полукружницу са центром у координатном почетку и полупречника 3.

Ако нека тачка криве

$$z(t) = x(t) + iy(t), \qquad a \leq t \leq b$$

одговара бар двјема различитим вриједностима параметра t, од којих је бар једна различита од a и b, кажемо да је то **вишеструка тачка**.

Крива која нема вишеструких тачака назива се **једноставна крива**.

Крива код које се поклапају почетак и крај назива се **затворена крива**.

Кажемо да је крива **глатка** ако она има непрекидан извод

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t), \qquad a \leq t \leq b$$

који нигдје није једнак нули.

Геометријски, то значи да крива у свакој својој тачки има тангенту која се непрекидно мијења.

Кажемо да је крива **дио по дио глатка** ако се она састоји од коначно много глатких кривих.

- ✓ Крива $|z-a|=r$ представља **кружницу** са центром у тачки a и полупречника r.

- ✓ Скуп тачака z комплексне равни $|z-a|<r$ представља **отворени круг.**

- ✓ Скуп тачака z комплексне равни $|z-a|\leq r$ представља **затворени круг.**

- ✓ Тачка z је **унутрашња тачка** скупа S ако постоји нека околина те тачке која је подскуп скупа S.

- ✓ Кажемо да је скуп S **отворен** ако је свака његова тачка унутрашња.

- ✓ За неки отворени скуп S кажемо да је **повезан** ако се сваке његове двије тачке могу спојити помоћу неке изломљене линије састављене од коначно много дужи чије све тачке припадају скупу S.

- ✓ Отворен и повезан скуп називамо **област**.

- ✓ Примјери области су отворени круг, отворени кружни прстен и спољашњост круга ($|z-a|>r$).

- ✓ Кажемо да је скуп **затворен** ако је његов комплемент у S отворен.

- ✓ **Гранична тачка** скупа S је тачка чија свака околина садржи и тачке скупа S и његовог комплемента.

- ✓ Скуп граничних тачака скупа S се назива **граница** и означава се са ∂S. Унија области и њене границе се назива **затворена област**.

- ✓ Затворени круг и затворени кружни прстен су затворене области.

- ✓ Кажемо да је скуп S **ограничен** ако постоји $R > 0$ тако да је $|z| \leq R$ за све $z \in S$.

5.4. ФУНКЦИЈЕ КОМПЛЕКСНЕ ПРОМЈЕНЉИВЕ

Дефиниција 5.5. Ако је S скуп комплексних бројева и ако је сваком комлексном броју $z \in S$ придружен комплексан број w, тада кажемо да је на скупу S дефинисана **функција комплексне промјенљиве** z и пишемо

$$w = f(z), z \in S.$$

Ако је сваком комплексном броју $z \in S$ придружен тачно један комплексан број w, кажемо да је функција **једнозначна**. У противном је функција **вишезначна.**

Комплексан број $w = f(z)$ можемо писати у облику

$$w = u + iv.$$

Пошто функција w зависи од $z = x + iy$, добијамо да функције u и v зависе од x и y. Дакле,

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Функције $u(x, y)$ и $v(x, y)$ су **реални**, односно **имагинарни дио** комплексне функције $f(z)$.

Примјер 5.5. За функцију $w = f(z) = z^2$ је $u(x, y) = x^2 - y^2$ и $v(x, y) = 2xy$.

Дефиниција 5.6. Нека је функција $f(z)$ дефинисана у некој околини тачке z_0 осим евентуално у самој тачки z_0. Комплексан број A је **гранична вриједност** функције $f(z)$ у тачки z_0 ако вриједи

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)\ \ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \epsilon. \tag{5.7}$$

Пишемо

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A. \tag{5.8}$$

Ако постоји гранична вриједност функције, она је јединствена.

Ако је $A = A_1 + iA_2$ и $z_0 = x_0 + iy_0$ показује се да је формула (5.8) еквивалентна са

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = A_1, \ \ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = A_2 \tag{5.9}$$

Користећи (5.9) лако се показује да вриједе сљедеће особине граничне вриједности комплексне функције:

1. $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z) \pm g(z)) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \pm \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$,

2. $\lim\limits_{z\to z_0}\big(f(z)g(z)\big) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \cdot \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$,

3. $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}, \qquad g(z) \neq 0, \lim\limits_{z\to z_0} g(z) \neq 0.$

Дефиниција 5.7. Кажемо да је функција $f(z)$ **непрекидна у тачки** z_0 ако је она дефинисана у некој њеној околини и ако је

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{5.10}$$

Ако је функција непрекидна у свакој тачки скупа S, тада кажемо да је функција **непрекидна на скупу** S.

Из (5.9) и (5.10) добијамо да је комплексна функција $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ непрекидна у тачки $z_0 = x_0 + iy_0$ ако и само ако су реалне функције $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрекидне у тачки (x_0, y_0), тј. ако је

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u(x_0, y_0), \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v(x_0, y_0).$$

Због тога се особине непрекидних функција реалних промјенљивих преносе и на функције комплексне промјенљиве. Збир, разлика, производ и композиција непрекидних функција комплексне промјенљиве су такође непрекидне функције. Количник непрекидних функција је непрекидан у свим тачкама у којима је именилац различит од нуле.

Примјер 5.6. Функције $w = z$, $w = z^2$, $w = Rez$, $w = Imz$, $w = \bar{z}$, $w = |z|$ су непрекидне у цијелој комплексној равни. Рационална функције $w = \frac{P(z)}{Q(z)}$, гдје су $P(z)$ и $Q(z)$ полиноми, је непрекидна у свим тачкама комплексне равни осим у тачкама у којима је $Q(z) = 0$. □

Дефиниција 5.8. Нека је функција $f(z)$ дефинисана у некој околини тачке z_0. Ако постоји гранична вриједност

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

кажемо да је та гранична вриједност **извод функције** f у тачки z_0 и означавамо га са $f'(z_0)$. Дакле,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{5.11}$$

Ако функција има извод у тачки z_0, кажемо да је она **диференцијабилна у тачки** z_0. Ако је функција дифернцијабилна у свакој тачки неког скупа S, тада кажемо да је функција **диференцијабилна на скупу** S.

Ако у (5.11) ставимо $\Delta z = z - z_0$ добијамо

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{5.12}$$

Диференцијабилност функције у тачки z_0 значи да гранична вриједност (5.12) постоји и да има исту вриједност независно од начина на који z тежи z_0. Ако је функција диференцијабилна у тачки онда је она у тој тачки и непрекидна.

Примјер 5.7. Функције $f(z) = z^n, n = 1,2, \dots.$ је дифренцијабилна у цијелој комплексној равни и њен извод је $f'(z) = nz^{n-1}$ јер је

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} =$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^n + nz^{n-1}(\Delta z) + \binom{n}{2} z^{n-2}(\Delta z)^2 + \cdots + (\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} =$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left(nz^{n-1} + \binom{n}{2} z^{n-2}(\Delta z) + \cdots + (\Delta z)^{n-1}\right) = nz^{n-1}. \ \square$$

За комплексне функције вриједе иста **правила диференцирања** као и за реалне функције:

1. $(cf)' = cf'$, c комплексан број,
2. $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
3. $(fg)' = f'g \pm fg'$,
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, $g \neq 0$,
5. Ако је $f(z)$ диференцијабилна у тачки z и функција $g(w)$ диференцијабилна у тачки $w = f(z)$, тада је и сложена функција $g(f(z))$ диференцијабилна у тачки z и вриједи
$$\left(g\big(f(z)\big)\right)' = g'(w)f'(z). \square$$

Примјер 5.8. Функција $f(z)=\bar{z}$ није диференцијабилна ни у једној тачки комплексне равни. Имамо

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Ако је $\Delta y=0$, тј. за тачке Δz са реалне осе, овај количник је једнак 1, а за $\Delta x=0$, тј. за тачке Δz са имагинарне осе, количник је једнак -1, па гранична вриједност $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ не постоји. Дакле, функција $f(z)$ није диференцијабилна ни у једној тачки комплексне равни иако су функције $u(x,y)=x$ и $v(x,y)=-y$ диференцијабилне у свакој тачки (x,y). □

Из претходног примјера видимо да диференцијабилност функција $u(x,y)$ и $v(x,y)$ није довољна за диференцијабилност комплексне функције $f(z)$.

Дефиниција 5.9. Кажемо да је функција $f(z)$ **аналитичка** [5] **у области** D ако је она диференцијабилна у свакој тачки те области. Кажемо да је функција $f(z)$ **аналитичка у тачки** z_0 области D ако је она аналитичка у некој околини те тачке.

Функције које су аналитичке на цијелој комплексној равни зовемо **цијеле функције.**

Дакле, појмови аналитичности и диференцијабилности функције у области имају исто значење. Међутим значење ових појмова није исто у једној тачки. Аналитичност функције у тачки z_0 значи да она има извод у свакој тачки неке околине тачке z_0, укључујући и саму тачку z_0, док диференцијабилност у тачки z_0 значи постојање извода само у тачки z_0.

[5] Користе се и термини **регуларна функција** или **холоморфна функција**.

Примјер 5.9. а) Функција $f(z) = zRez, z = x + iy$ диференцијабилна само у тачки $z = 0$ па она није аналитичка ни у једној тачки комплексне равни. Наиме,

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(z+\Delta z)Re(z+\Delta z) - zRez}{\Delta z} = \frac{\Delta zRez + zRe\Delta z + \Delta zRe\Delta z}{\Delta z} =$$

$$Rez + Re\Delta z + \frac{zRe\Delta z}{\Delta z}$$

Гранична вриједност овог количника када $\Delta z \to 0$ постоји само у случају ако је $z = 0$.

б) Рационална функције $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, гдје су $P(z)$ и $Q(z)$ полиноми, је аналитичка функција у цијелој комплексној равни осим у тачкама у којима је $Q(z) = 0$. □

5.5. КОШИ-РИМАНОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

У Примјеру 5.8 видјели смо да диференцијабилност функција $u(x, y)$ и $v(x, y)$ није довољна за диференцијабилност комплексне функције. Навешћемо сада услове које морају да задовољавају функције $u(x, y)$ и $v(x, y)$ да би комплексна функција била диференцијабилна.

Теорема 5.1. Нека је функција $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дефинисана у некој околини тачке $z = x + iy$ и диференцијабилна у самој тачки z. Тада постоје парцијални изводи функција $u(x, y)$ и $v(x, y)$ у тачки (x, y) и за њих важе Коши-Риманови услови

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5.13}$$

Ако је функција $f(z)$ аналитичка у области D, парцијални изводи функција $u(x, y)$ и $v(x, y)$ постоје и задовољавају једначине (5.13) у свакој тачки те области.

Доказ: Из услова диференцијабилности у тачки z добијамо да постоји

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

независно од начина на који $\Delta z \to 0$.

Стављајући у овој формули $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ и $f(z) = u + iv$ добијамо

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) - iv(x,y)}{\Delta x + i\Delta y}. \tag{5.14}$$

Ако $\Delta z \to 0$ по реалној оси, тј. за $\Delta y = 0$ одавде добијамо

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}.$$

Пошто постоји $f'(z)$ то значи да постоје и обе граничне вриједности у горњој једнакости, односно постоје парцијални изводи $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$ и вриједи

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5.15}$$

Ако $\Delta z \to 0$ по имагинарној оси, тј. за $\Delta x = 0$ из (5.14) добијамо

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y}.$$

Пошто постоји $f'(z)$ то значи да постоје и обе граничне вриједности у горњој једнакости, односно постоје парцијални изводи $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ и вриједи

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{5.16}$$

Изједначавањем извода из (5.15) и (5.16) добијамо Коши-Риманове услове (5.13).□

За извод функције $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ из Коши-Риманових услова могу се добити још двије формуле за одређивање извода функције комплексне промјенљиве:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5.17}$$

Примјер 5.10. а) Функција $f(z) = z^2$ задовољава Коши-Риманове услове јер је

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \text{ и } v(x,y) = 2xy \text{ и}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$$

у свакој тачки комплексне равни. Вриједи

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2iy = 2z.$$

б) Функција $f(z) = \bar{z} = x - iy$ није диференцијабилна ни у једној тачки комплексне равни јер је

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Коши-Риманове једначине имају суштински значај за функције комплексне промјенљиве јер представљају не само потребан већ и довољан услов за аналитичност функције.

Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 5.2. Ако двије реалне и непрекидне функције $u(x,y)$ и $v(x,y)$ реалних промјенљивих x, y имају непрекидне прве парцијалне изводе који задовољавају Коши-Риманове једначине у некој области D, онда је комплексна функција $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитичка у D.

Доказ: Ако функције $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имају непрекидне прве парцијалне изводе, њихови прираштаји Δu и Δv се могу записати у облику

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\Delta y + \varepsilon_1 \rho,$$

$$\Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\Delta y + \varepsilon_2 \rho,$$

гдје је $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\rho), \varepsilon_2 = \varepsilon_2(\rho)$ и $\varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0$ кад $\rho \to 0$.

Пошто је $\Delta f(z) = \Delta u + i\Delta v$, користећи Коши-Риманове једначине добијамо

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\Delta y\right) + \varepsilon_1\rho + i\varepsilon_1\rho}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + \frac{\partial v}{\partial x}(-\Delta y + i\Delta x)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\varepsilon_1\rho + i\varepsilon_1\rho}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon\,\frac{\rho}{\Delta z},$$

гдје је $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_1$.

Пуштајући да $\Delta z \to 0$, закључујемо да постоји гранична вриједност количника $\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ и да је она једнака

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Дакле, постоји извод $f'(z)$ у произвољној тачки области z у области D па је функција аналитичка у D.□

Примјер 5.11. Одредити аналитичку функцију $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ако је познат њен реални дио $u(x,y) = x^2 - y^2 - x$.

Рјешење: Пошто је

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y.$$

Интерацијом из прве једначине добијамо

$$v(x,y) = \int (2x - 1)dy + \varphi(y) = 2xy - y + \varphi(x).$$

Одавде добијамо

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x) = 2y \Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = c.$$

Дакле,

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = x^2 - y^2 - x + i(2xy - y + c) = z^2 - z + ic.□$$

Ако се умјесто алгебарског користи поларни облик комплексног броја $z = r(cos\theta + isin\theta)$, тада Коши-Риманове једначине за функцију

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

имају облик

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \qquad r > 0. \tag{5.18}$$

Тада је

$$f'(z) = (\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r})(cos\theta - isin\theta) \tag{5.19}$$

и

$$f'(z) = \frac{1}{r}(\frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{\partial u}{\partial \theta})(cos\theta - isin\theta). \tag{5.20}$$

Примјер 5.12. Нека је $f(z) = z^3 = r^3(cos3\theta + isin3\theta)$.

Тада је

$$u(r,\theta) = r^3 cos3\theta,\ \ v(r,\theta) = r^3 sin3\theta.$$

Добијамо

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 3r^2 cos3\theta, \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -3r^3 sin3\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 3r^2 sin3\theta, \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 3r^3 cos3\theta$$

па видимо да вриједе Коши-Риманове једначине (5.18) за $r > 0$. Дакле, функција $f(z)$ је аналитичка у свакој тачки $z \neq 0$. У тачки $z = 0$ рачунањем по дефиницији добијамо

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = 0$$

па је функција аналитичка и у тачки $z = 0$. Из (5.19) добијамо

$$f'(z) = (3r^2 cos3\theta + 3r^2 isin3\theta)(cos\theta - isin\theta) =$$

$$3r^2(cos3\theta cos\theta + sin3\theta sin\theta) + 3r^2 i(sin3\theta cos\theta - cos3\theta sin\theta) =$$

$$3r^2(cos2\theta + isin2\theta) = 3z^2.$$

Функције $u(x,y)$ и $v(x,y)$ које представљају реални и имагинарни дио аналитичке функције $f(z)$ задовољавају **Лапласову једначину**, тј. вриједи

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ \text{ и } \ \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Теорема 5.3. Ако је функција $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитичка у области $D,$ тада функције $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имају непрекидне парцијалне изводе другог реда у области D и задовољавају Лапласову једначину у D.

Доказ: Пошто је функција аналитичка, функције $u(x,y)$ и $v(x,y)$ задовољавају Коши-Риманове једначине (5.13). Диференцирањем прве једначине у (5.13) по x и друге по y добијамо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Аналитичке функције имају непрекидне парцијалне изводе произвољног реда па су мјешовити изводи другог реда једнаки. Сабирањем у последњој једнакости добијамо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

тј. $\nabla^2 u = 0$. Аналогно показујемо да је $\nabla^2 v = 0$. □

Функције које задовољавају Лапласову једначину називају се хармонијске функције. Према томе, реални и имагинарни дио аналитичке функције су **хармонијске функције**.

Хармонијске функције $u(x, y)$ и $v(x, y)$ које задовољавају Коши-Риманове једначине називају се **коњуговане хармонијске функције**.

Дакле, функција $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ је аналитичка у области D ако и само ако су $u(x, y)$ и $v(x, y)$ коњуговане хармонијске функције.

Примјер 5.13. Одредити услове које морају да задовољавају константе a и b да би функција $u = ax^3 + bxy$ била хармонијска, па одредити одговарајуће коњуговане хармонијске функције.

Рјешење:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6ax = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow u = bxy.$$

Пошто је

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = by, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -bx,$$

интерацијом из прве једначине добијамо

$$v(x,y) = b\int y\,dy + \varphi(y) = \frac{by^2}{2} + \varphi(x).$$

Одавде добијамо

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi'(x) = -bx \Rightarrow \varphi(x) = -\frac{bx^2}{2} + c.$$

Дакле,

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = bxy + \frac{ib}{2}(y^2 - x^2 + c).\square$$

5.6. ЕЛЕМЕНТАРНЕ ФУНКЦИЈЕ КОМПЛЕКСНЕ ПРОМЈЕНЉИВЕ

- ***Експоненцијална функција***

Експоненцијална функција $e^z,\ z = x + iy$ дефинише се помоћу формуле

$$e^z = e^x(cosy + isiny) \tag{5.21}$$

Ако је $z = x$ реалан број тада је функција $e^z = e^x$ па је функција e^z природно проширење реалне експоненцијалне функције.

Функција (5.21) је цијела функција јер функције

$$u(x, y) = e^x cosy \text{ и } v(x, y) = e^x siny$$

имају непрекидне парцијалне изводе првог реда који задовољавају Коши-Риманове једначине на цијелој комплексној равни. Према томе, из (5.15) добијамо

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x cosy) + i\frac{\partial}{\partial y}(e^x siny) = e^x cosy + ie^x siny = e^z.$$

Лако се провјерава да вриједи

$$e^{z_1}e^{z_1} = e^{z_1+z_1}.$$

- ✓ За $z = iy$ добијамо формулу

$$e^{iy} = cosy + isiny$$

коју називамо **Ојлерова формула**. Она омогућава да се комплексан број у тригонометријском облику $z = r(cos\theta + isin\theta)$ запише у облику

$$z = re^{i\theta}.$$

- ✓ Из Ојлерове формуле добија се веза између константи $e, \pi, 1, i, 0$:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Једна од основних разлика комплексне експоненцијалне функције у односу на функције реалне промјенљиве јесте периодичност функције e^z. Функција e^z је периодична и њен период је $2\pi i$ јер је

$$e^{z+2\pi i} = e^z \text{ за свако } z.$$

С обзиром на периодичност, област вриједности функције e^z задате на цијелој комплексној равни једнака је вриједности те функције задате на хоризонталној траци

$$-\pi < Imz \leq \pi.$$

Ову траку називамо **основна област експоненцијалне функције**.

За модул и аргумент експоненцијалне функције добијамо

$$|e^z| = e^x, \qquad arge^z = y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Одавде добијамо и другу суштинску разлику у односу на функције реалне промјенљиве. Наиме, пошто је $|e^z| = e^x \neq 0$ закључујемо да је $e^z \neq 0$ за свако z. Такође, функција e^z узима све вриједности из скупа комплексних бројева осим нуле, тј. једначина

$$e^z = w$$

је рјешива за сваки комплексан број $w \neq 0$. Она има бесконачно много рјешења облика

$$z = x + iy = \ln|w| + i(Arqw + 2k\pi) = \ln|w| + iarqw.$$

Примјер 5.14. а) Израчунати e^i. б) Ријешити једначину: $e^z = -1 + i$.

Рјешење: а) $e^i = e^0(cos1 + isin1) = cos1 + isin1.$

б) $e^z = -1 + i \Leftrightarrow e^{x+iy} = \sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right).$

Одавде добијамо

$e^x = \sqrt{2} \wedge y = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$

- ***Тригонометријске и хиперболичке функције***

И овдје постављамо захтјев да дефиниција ових функција буде проширење реалних тригонометријских и хиперболичких функција. Из дефиниције експоненцијалне функције за $z = ix$ добијамо

$$e^{ix} = cosx + isinx, \qquad e^{-ix} = cosx - isinx$$

па је

$$cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad sinx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Ово сугерише дефиницију тригонометријских функција за $z = x + iy$:

$$cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad sinz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{5.22}$$

Такође дефинишемо

$$tgz = \frac{sinz}{cosz}, \qquad ctgz = \frac{cosz}{sinz}.$$

Функције $cosz$ и $sinz$ су цијеле функције јер је и експоненцијална функција цијела функција. Функције tgz и $ctgz$ нису цијеле јер нису ни дефинисане у цијелој комплексној равни. Оне су аналитичке у свим тачкама у којима су дефинисане.

Користећи извод експоненцијалне функције добијамо

$$(cosz)' = -sinz, \qquad (sinz)' = cosz, \qquad (tgz)' = \frac{1}{cos^2 z}, \qquad (ctgz)' = -\frac{1}{sin^2 z}.$$

Стављајући у (5.22) $z = x + iy$ добијамо

$$cosz = cosxchy - isinxshy, \;\; sinz = sinxchy + icosxshy \tag{5.23}$$

гдје су функције chy и shy дефинисане на уобичајени начин.

Комплексне функције $cosz$ и $sinz$ су периодичне и имају период 2π.

Постоји суштинска разлика између реалних и комплексних тригонометријских функција. Док су реалне тригонометријске функције ограничене, комплексне функције $cosz$ и $sinz$ то нису. Наиме, из (5.23) добијамо

$$|cosz|^2 = cos^2 x + sh^2 y, \qquad |sinz|^2 = sin^2 x + sh^2 y.$$

Пошто $shy \to \infty$ када $y \to \infty$ одавде добијамо

$$|cosz| \to \infty, \quad |sinz| \to \infty \quad (z \to \infty)$$

па су комплексне тригонометријске функције неограничене.

Комплексне хиперболичке функције дефинишемо са

$$chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2i},$$

$$thz = \frac{shz}{chz}, \qquad cthz = \frac{chz}{shz}.$$

Функције chz и shz су цијеле функције и при томе је

$$(chz)' = shz, \qquad (shz)' = chz.$$

Између комплексних тригонометријских и хиперболичких функција вриједе сљедеће везе:

$$chiz = cosz, \qquad shiz = isinz,$$

$$cosiz = chz, \qquad siniz = ishz.$$

Примјер 5.15. а) Израчунати $sin(1+i)$. б) Ријешити једначину $cosz=5$.

Рјешење: а)

$$\sin(1+i)= \ sinz=\frac{e^{i(1+i)}-e^{-i(1+i)}}{2i}=\frac{e^{-1+i}-e^{1-i}}{2i}=$$

$$\frac{1}{2i}\left(e^{-1}(cos1+isin1)-e(cos1-isin1)\right)=\frac{1}{2i}\left(cos1(e^{-1}-e)+isin1(e^{-1}+e)\right)=$$

$$sin1\frac{e+e^{-1}}{2}+icos1\frac{e-e^{-1}}{2}=sin1ch1+icos1ch1.$$

б)

$$cosz=5\Leftrightarrow\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=5\Leftrightarrow e^{2iz}-10e^{iz}+1=0\Leftrightarrow e^{iz}=5\pm2\sqrt{6}.$$

Добијамо

$$z=2k\pi-iln(5\pm2\sqrt{6}),k\in\mathbb{Z}.$$

- ***Логаритамска функција***

Природни логаритам $\ln z$ комплексног броја $z = x + iy$ дефинише се као комплексан број w такав да је

$$e^{w} = z, z \neq 0.$$

Логаритамска функција је инверзна функција експоненцијалне функције.

Ако ставимо $w = u + iv$ и $z = re^{i\theta}$ добијамо

$$e^{u+iv} = re^{i\theta}.$$

Да би вриједила горња једнакост мора бити

$$\left|e^{u+iv}\right| = \left|re^{i\theta}\right| \wedge arg\left(e^{u+iv}\right) = arg\left(re^{i\theta}\right).$$

Одавде добијамо

$$e^{u} = r \wedge v = \theta + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

тј.

$$u = \ln r \wedge v = \theta + 2k\pi.$$

Према томе

$$w = \ln z = u + iv = \ln r + i(\theta + 2k\pi),$$

тј.

$$w = \ln z = \ln|z| + i arg z. \tag{5.24}$$

Пошто је $argz$ вишезначна функција, добијамо да је и **lnz такође вишезначна функција**.

Вриједност $\ln z$ која одговара главној вриједности аргумента $Argz$ назива се **главна вриједност логаритма** и означава са $\mathrm{Ln}z$. Дакле

$$\mathrm{Ln}z = \ln|z| + iArgz. \tag{5.25}$$

Пошто је $Argz\,(z \neq 0)$ јединствен, главна вриједност логаритма Lnz је једнозначна функција.

Из (5.25) и (5.24) добијамо

$$\ln z = \mathrm{Ln}z + 2k\pi i, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{5.26}$$

Ако је z позитиван реалан број, тј. $z = x, x > 0,$ тада је $Argz = 0$, па је

$$\mathrm{Ln}z = \ln|z| \Rightarrow \mathrm{Ln}\,x = \ln x$$

па Lnz представља реални природни логаритам.

Ако је z негативан реалан број, tj. $z = x, x < 0$, тада је $Argz = \pi$, па је

$$\mathrm{Ln}z = \ln|z| + \pi i \Rightarrow \mathrm{Ln}x = \ln(-x) + \pi i.$$

Дакле, у реалној анализи логаритам негативног броја не постоји, док је у комплексној анализи логаритамска функција дефинисана за свако $z \neq 0$.

✓ За комплексни природни логаритам важе формуле аналогне формулама из реалне анализе:

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \,, \ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2.$$

Формула (5.26) за фиксирано $k \in \mathbb{Z}$ представља једнозначну функцију. Свака од тих финкција је аналитичка свуда осим у тачки $z = 0$ и у тачкама са негативног дијела реалне осе. Коришћењем формула (5.15) за одређивање извода добија се да је

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}, \text{ (} z \text{ није негативан ни нула).}$$

Примјер 5.16. Израчунати а) $\ln 2i$, $b)\ln e$, $v)$ $\ln(-e)$.

Рјешење: а) $\ln 2i = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

За $k = 0$ добијамо главну вриједност логаритма $\mathrm{Ln}2i = \ln 2 + i\frac{\pi}{2}$.

б) $\ln e = \ln e + 2k\pi i = 1 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

За $k = 0$ добијамо главну вриједност логаритма $\mathrm{Ln}e = 1$.

в) $\ln(-e) = \ln e + i(\pi + 2k\pi) = 1 + i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

За $k = 0$ добијамо главну вриједност логаритма $\mathrm{Ln}e = 1 + i\pi$.

- ***Општа степена функција***

Општа степена функција дефинише се помоћу формуле

$$z^c = e^{c\ln z} \tag{5.27}$$

гдје је c комплексан број и $z = x + iy \neq 0$.

Пошто је функција $\ln z$ вишезначна, то је и функција z^c вишезначна. Вриједност

$$z^c = e^{c\mathrm{Ln} z}$$

се назива **главна вриједност општег степена** z^c.

Ако је $c = \pm n, n \in \mathbb{N}$ тада је функција z^c једнозначна. Ако је $c = \frac{1}{n}$ тада је

$$z^c = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n}\ln z}.$$

У овом случају добијамо n различитих вриједности n −тог коријена. Аналогно ако је c произвољан рационалан број z^c има коначно много различитих вриједности. У свим другим случајевима, општа степена функција има бесконачно много различитих вриједности.

Примјер 5.17. Одредити главну вриједност општег степена $(1+i)^{2-i}$.

Рјешење:

$$(1+i)^{2-i} = e^{(2-i)Ln(1+i)} = e^{(2-i)\left(\frac{1}{2}ln2+i\frac{\pi}{4}\right)} = e^{ln2+\frac{\pi}{4}+i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}ln2\right)} =$$

$$e^{ln2+\frac{\pi}{4}}\left(cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}ln2\right)+isin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}ln2\right)\right) = 2e^{\frac{\pi}{4}}\left(sin\frac{ln2}{2}+icos\frac{ln2}{2}\right).$$

- ***Општа експоненцијлна функција***

Општа експоненцијлна функција дефинише се са

$$a^z = e^{z\ln a} \tag{5.28}$$

гдје је $a \neq 0$ комплексан број.

5.7. ПРЕСЛИКАВАЊА ПОМОЋУ КОМПЛЕКСНИХ ФУНКЦИЈА

Нека је

$$w = f(z) = u + iv \qquad (z = x + iy)$$

комплексна функција дефинисана на скупу D z-равни и нека је D^* скуп њених вриједности у w-равни. Функцију f можемо посматрати као пресликавање које свакој тачки z скупа D придружује тачку w скупа D^*.

Ако је f 1-1 пресликавање тада се свакој тачки $z \in D$ придружује једна тачка $w \in D^*$. Тада је на скупу D^* одређено пресликавање $z = h(w)$ инверзно пресликавању $w = f(z)$. Вриједи

$$f(h(w)) = w, w \in D^* \text{ и } h(f(z)) = z, z \in D.$$

Ако је C нека крива у D, онда слике тачке криве добијене помоћу пресликавања f формирају слику криве C. Аналогно се одређују слике других скупова из D. Геометријско проучавање комплексних функција се врши тако да се одређују слике неких једноставних затворених кривих, фамилија кривих или области.

- ***Пресликавање*** $\boldsymbol{w = az + b, a \neq 0}$

Линеарна функција

$$w = f(z) = az + b, a \neq 0 \tag{5.29}$$

гдје су a и b комплексни бројеви, је обострано једнозначно пресликавање z-равни на w-раван. Ако је $b = 0$ тада имамо пресликавање

$$w = f(z) = az, a \neq 0 \tag{5.30}$$

па је

$$|w| = |a||z|, \qquad argw = arga + argz.$$

Према томе, пресликавање (5.30) врши деформацију са фактором $|a|$ (за $|a| > 1$ издужује а за $|a| < 1$ скраћује) и ротацију за угао $\alpha = \mathrm{A}rga$.

✓ Полуправа $Argz = \theta$ пресликава се на полуправу $Argw = \theta + \alpha$, а кружница $|z| = r$ на кружницу $|w| = |a|r$.

✓ Ако је у (5.30) $|a| = 1$ тада је пресликавање $w = az$ ротација за угао α.

Пресликавање (12.44) можемо схватити као композицију пресликавања

$$w_1 = |a|z, \qquad w_2 = w_1 e^{iArga}, \qquad w = w_2 + b,$$

при чему прво пресликавање представља деформацију са фактором $|a|$, друго ротацију за угао $Arga$ и треће транслацију за вектор b.

Примјер 5.18. Одредити слику области

$$D = \{z = x + iy \colon |z| \leq 1 \land x \geq 0, y \geq 0\}$$

при пресликавању

$$w = f(z) = (1 + i)z + i.$$

Рјешење:

$$w_1 = \sqrt{2}z, \qquad w_2 = w_1 e^{i\frac{\pi}{4}}, \qquad w = w_2 + i.$$

Дакле,

$$|w_1| = \sqrt{2}|z| \leq \sqrt{2}, \qquad 0 \leq Argw_1 \leq \frac{\pi}{2},$$

$$w_2 = w_1 e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow |w_2| = |w_1| \leq \sqrt{2}, \qquad Argw_2 = Argw_1 + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq Argw_2 \leq \frac{3\pi}{4},$$

$$w = w_2 + i \Rightarrow |w - i| = |w_2| \leq \sqrt{2}, \qquad \frac{\pi}{4} \leq Arg(w - i) \leq \frac{3\pi}{4}.$$

- ***Пресликавање*** $\boldsymbol{w = \frac{1}{z}}$

Функција

$$w = f(z) = \frac{1}{z} \tag{5.31}$$

је дефинисана у свим тачкама комплексне равни осим у тачки $z = 0$. Свака тачка комплексне w-равни је слика неке тачке z-равни, осим тачке $w = 0$. Ако комплексној z-равни додамо бесконачно далеку тачку $z = \infty$ добијамо **проширену комплексну $\boldsymbol{z}$-раван**. Функција (5.31) представља обстрано једнозначно пресликавање проширене комплексне z-равни у проширену комплексну w-раван. Тачка $z = \infty$ се слика у тачку $w = 0$ и тачка $w = \infty$ у тачку $z = 0$.

Ако ставимо $z = re^{i\theta}$ добијамо

$$w = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \Rightarrow |w| = \frac{1}{r}, Argw = -Argz = -\theta.$$

Одавде добијамо да се полуправа $argz = \alpha$ пресликава на полуправу $argw = -\alpha$, док се кружница $|z| = R$ пресликава на кружницу $|w| = \frac{1}{R}$.

Круг $|z| < R$ пресликава се на област $|w| > \frac{1}{R}$.

Примјер 5.19. Одредити слику области D из Примјера 5.18 при пресликавању $w = f(z) = \frac{1}{z}$.

Рјешење: $|w| \geq 1, -\frac{\pi}{2} \leq Argw \leq 0$.

- ***Пресликавање $\boldsymbol{w = e^z}$***

Одредићемо слике неких карактеристичних линија и области.

✓ Нека је дата права $Rez = a = const$. Тада је

$$w = e^{a+iy} = e^a(cosy + isiny) \Rightarrow |w| = e^a \wedge argw = y \in (-\pi, \pi].$$

Дакле, слика праве $Rez = a = const.$ је кружница полупречника e^a.

✓ Нека је дата права $Imz = b = const$. Тада је

$$w = e^{x+ib} = e^x(cosb + isinb) \Rightarrow |w| = e^x > 0 \wedge argw = b.$$

Дакле, слика праве $Imz = b = const.$ је полуправа $argw = b$.

Примјер 5.20. Одредити слику правоугаоника $0 \leq x \leq 1 \wedge \frac{1}{2} \leq y \leq 1$ при пресликавању $w = e^z$.

Рјешење: Праве $x = 0$ и $x = 1$ сликају се на кружнице полупречника 1, односно e, па се област $0 \leq x \leq 1$ слика на кружни прстен $1 \leq |w| \leq e$.

Праве $y = \frac{1}{2}$ и $y = 1$ сликају се на полуправе $argw = \frac{1}{2}$ и $argw = 1$ па се област $\frac{1}{2} \leq\ y \leq 1$ слика на $\frac{1}{2} \leq argw \leq 1$. Дакле, слика области D је област ограничена дијеловима кружница и полуправих.