УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 3- ПРЕДАВАЊА

Академска 2017/2018

3. КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛИ

3.1. Криволинијски интеграли прве врсте

3.2. Криволинијски интеграли друге врсте

3.3. Гринова теорема

ЛИТЕРАТУРА: **Момир В. Ћелић, Математика II,** Машински факултет, Бања Лука, 1997[1]

Наставник: Биљана Војводић

[1] У припреми предавања коришћена је и књига **Математика, Милош Томић** (Свјетлост, Сарајево, 1988)

3. КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛИ

- Криволинијски интеграл представља природно уопштење одређеног (Римановог) интеграла.

- Док се код одређеног интеграла врши интеграција реалне функције која је дефинисана за $a \leq x \leq b$, дуж x −осе од a до b, код криволинијског интеграла интегралимо функцију која је дефинисана у свим тачкама криве C, дуж те криве.

- Ако интегралимо скаларну функцију дефинисану на C, онда се ради о **криволинијском интегралу прве врсте,** а ако интегралимо векторску функцију онда се ради о **криволинијском интегралу друге врсте**.

3.1. Криволинијски интеграл прве врсте

Нека је C ректификабилна крива у простору и нека је

$$\boldsymbol{r}(s) = x(s)\boldsymbol{i} + y(s)\boldsymbol{j} + z(s)\boldsymbol{k}, \quad 0 \le s \le l, \tag{3.1}$$

њена природна параметризација (l је дужина криве C).

Нека је $r(s) = (x(s), y(s), z(s))$ тачка у простору чији је радијус-вектор $\boldsymbol{r}(s)$. Тачке $A = r(0)$ и $B = r(l)$ представљају почетак и крај криве C.

Нека је $f(x, y, z)$ скаларна функција **дефинисана и ограничена** на C.

Дефиниција 3.1. **Криволинијски интеграл прве врсте** скаларане функције f по кривој C дефинише се са

$$\int_C f ds = \int_0^l f(r(s)) ds. \tag{3.2}$$

- Постојање и особине криволинијског интеграла везане су за постојање и особине одговарајућег одређеног интеграла. Уколико је функција f непрекидна на C, односно ако је функција $f(r(s))$ непрекидна за $0 \leq s \leq l$, тада постоји интеграл $\int_C f ds$.

- Особине одређеног интеграла се преносе на криволинијски интеграл. Вриједи:

  1. $\int_C ds = l$, l је дужина криве C,
  2. $\int_C kf ds = k \int_C f ds$, k је константа,
  3. $\displaystyle\int_C (f+g) ds = \int_C f ds + \int_C g ds$,
  4. $\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds$, гдје је крива C подијељена на лукове C_1 и C_2.

- Формула (3.2) није погодна за рачунање криволинијског интеграла јер није увијек једноставно одредити природну параметризацију криве C. Зато ћемо извести формулу за рачунање криволинијског интеграла ако нам је умјесто природне позната произвољна параметрскка репрезентације криве C.

Теорема 3.1. Нека је C глатка крива и нека је

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}, \quad a \leq t \leq b, \tag{3.3}$$

произвољна праметарска репрезентација те криве. Ако је функција f непрекидна на кривој C тада је

$$\int_C f ds = \int_a^b f\big(r(t)\big)|\boldsymbol{r}'(t)|dt. \tag{3.4}$$

Доказ: У одређени интеграл у (3.2) уводимо смјену $s = s(t)$, гдје је параметар s дужина лука

$$s(t) = \int_a^t |\boldsymbol{r}'(u)|du. \tag{3.5}$$

Пошто је C глатка крива, $s(t)$ је строго растућа и непрекидно-диференцијабилна функција јер је

$$s'(t) = |\boldsymbol{r}'(t)| > 0, \tag{3.6}$$

па је и њена инверзна функција $t = t(s)$ такође строго растућа и непрекидно-диференцијабилна функција. Из $ds = s'(t)dt = |\boldsymbol{r}'(t)|dt$, $s(a) = 0$ и $s(b) = l$, добијамо

$$\int_0^l f\big(r(s)\big)ds = \int_a^b f\big(r(t)\big)|\boldsymbol{r}'(t)|dt$$

односно добијамо формулу (3.4). □

- Из (3.3) и (3.4) добијамо формулу:

$$\int_C f ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt. \tag{3.7}$$

- Ако је C дио по дио глатка крива састављена од глатких лукова $C_1, C_2, \dots, C_n$ тада се линијски интеграл прве врсте дефинише помоћу формуле

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds + \cdots + \int_{C_n} f ds.$$

Примјер 3.1. Израчунати

$$\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$$

по кружној завојници $\boldsymbol{r}(t) = acost\boldsymbol{i} + asint\boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k},\ a > 0, c \neq 0$ од тачке $A(a, 0,0)$ до тачке $B(a, 0,2\pi c)$.

Рјешење: Тачки A одговара вриједност параметра $t = 0$, а тачки B $t = 2\pi$. Имамо

$$\boldsymbol{r}'(t) = -asint\boldsymbol{i} + acost\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}, \qquad |\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{a^2 + c^2}$$

и добијамо

$$\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} (a^2cos^2t + a^2sin^2t + c^2t^2)\sqrt{a^2 + c^2} dt =$$

$$\sqrt{a^2 + c^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + c^2t^2) dt = \sqrt{a^2 + c^2} \left(2\pi a^2 + \frac{8}{3}\pi^3c^2\right). \square$$

✓ Покажимо сада да криволинијски интеграл прве врсте не зависи од оријентације криве.

Природна параметризација $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),\ 0\leq s\leq l$ криве C одређује оријентацију од тачке $A=r(0)$ до тачке $B=r(l)$. Ако уведемо смјену $s=l-u$ добијамо нову параметризацију криве $\tilde{\boldsymbol{r}}(u)=\boldsymbol{r}(l-u)$ која има оријентацију од тачке B до тачке A . Добијамо

$$\int_{\widetilde{AB}} f ds=\int_0^l f\big(r(s)\big)ds=-\int_l^0 f(r(l-u)\,)du=\int_0^l f\big(\tilde{r}(u)\big)du=\int_{\widetilde{BA}} f du$$

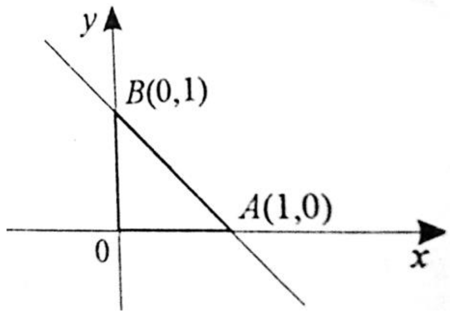
односно да су интеграли по луку $\widetilde{AB}$ и по луку $\widetilde{BA}$ једнаки. Дакле, криволинијски интеграл прве врсте не зависи од оријентације криве.

Примјер 3.2. Израчунати криволинијски интеграл

$$\int_C (x+y)ds$$

по троуглу чији су врхови тачке $O(0{,}0), A(1{,}0), B(0{,}1)$.

Рјешење:



$$\int_C (x+y)ds = \int_{\overline{OA}} (x+y)ds + \int_{\overline{AB}} (x+y)ds + \int_{\overline{BO}} (x+y)ds$$

За дуж $\overline{OA}$ параметарска репрезентација је $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i}, \ 0 \leq t \leq 1$:

$$\int_{\overline{OA}} (x+y)ds = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

За дуж $\overline{AB}$ имамо параметарску репрезентацију $\boldsymbol{r}(t) = (1-t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j}, \ \ 0 \leq t \leq 1$, па је

$$\int_{\overline{AB}} (x+y)ds = \sqrt{2}\int_0^1 dt = \sqrt{2}.$$

За дуж $\overline{BO}$ имамо параметарску репрезентацију $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{j}, \ \ 0 \leq t \leq 1$, па је

$$\int_{\overline{BO}} (x+y)ds = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

Дакле, $\int_C (x+y)ds = 1 + \sqrt{2}$.

✓ Примјене криволинијског интеграла

- *Рачунање масе криве*

Ако замислимо криву C као танку жицу промјенљиве густине $\rho(x, y, z)$ тада се маса те жице дефинише као криволинијски интеграл прве врсте функције ρ

$$m = \int_C \rho(x, y, z) ds.$$

- *Одређивање центра теже жице*

Центар теже жице се дефинише као тачка $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ чије су координате

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_C x\rho(x, y, z) ds, \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x, y, z) ds, \quad \bar{z} = \frac{1}{m}\int_C z\rho(x, y, z) ds.$$

- *Одређивање момента инерције криве*

Ако је $d(x, y, z)$ растојање тачке (x, y, z) криве C од неке осе L, тада се моменат инерције дефинише са

$$I_L = \int_C d^2(x, y, z)\rho(x, y, z) ds.$$

Моменти инерције у односу на координатне осе означавају се са I_x, I_y, I_z.

Примјер 3.3. Одредити масу лука кружнице $x = cost, y = sint, 0 \leq t \leq \pi$ ако је његова густина $\rho(x, y) = y$.

Рјешење:

$$m = \int_C \rho(x, y, z) ds = \int_C y ds = \int_0^\pi sint dt = 2.$$

Примјер 3.4. Израчунати моменат инерције I_z кружне завојнице

$$\boldsymbol{r}(t) = acost\boldsymbol{i} + asint\boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi, \qquad a > 0, c \neq 0$$

чија је густина $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Рјешење:

$$I_z = \int_C d^2(x, y, z) \rho(x, y, z) ds.$$

Пошто је растојање тачке завојнице (x, y, z) од осе z једнако $d^2(x, y, z) = x^2 + y^2$, из једначине завојнице добијамо $d^2(x, y, z) = a^2$ па је

$$I_z = a^2 \int_C \rho(x, y, z) ds = a^2 m,$$

гдје је m маса кружне завојнице која је одређене у Примјеру 3.1. Дакле моменат инерције је

$$I_z = a^2 \sqrt{a^2 + c^2} \left(2\pi a^2 + \frac{8}{3}\pi^3 c^2\right).$$

3.2. Криволинијски интеграл друге врсте

Нека је C глатка крива у простору и нека је

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}, \quad a \le t \le b, \tag{3.8}$$

једна њена параметарска репрезентација. Тачке $A = r(a)$ и $B = r(b)$ представљају почетак и крај криве C. Сматраћемо да је крива позитивно оријентисана, тј. у смјеру раста параметра, од тачке A до тачке B.

Нека је $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ векторска функција дефинисана и ограничена на C.

Дефиниција 3.2. Криволинијски интеграл друге врсте векторске функције $\boldsymbol{F}$ по кривој C означава се са $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ и дефинише са

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(r(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)dt. \tag{3.9}$$

Стављајући у формулу (3.9) $\boldsymbol{F} = F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j} + F_3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}'(t)dt = d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}$ добијамо

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C F_1dx + F_2dy + F_3dz = \int_a^b (F_1x' + F_2y' + F_3z')dt. \tag{3.10}$$

- ✓ Ако је крива C затворена крива, тј. $r(a) = r(b)$, обично се умјесто $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ користи ознака $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$.

- ✓ Ако је $\boldsymbol{F}$ непрекидна функција, из услова да је C глатка крива, добијамо да је функција $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}'$ непрекидна на интервалу $a \leq t \leq b$, па одређени интеграл из формуле (3.9) постоји.

- ✓ Ако је C дио по дио глатка крива састављена од глатких лукова $C_1, C_2, \dots, C_n$ тада се линијски интеграл друге врсте дефинише помоћу формуле

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \cdots + \int_{C_n} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}. \tag{3.11}$$

- ✓ Пошто је криволинијски интеграл друге врсте дефинисан помоћу одређеног интеграла, особине одређеног интеграла се преносе и на криволинијски интеграл. Вриједи:

1. $\displaystyle\int_C k\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = k \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},\;$ k је константа,

2. $\displaystyle\int_C (\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) d\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} + \int_C \boldsymbol{G} d\boldsymbol{r},$

3. $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$ гдје је крива C подијељена на лукове C_1 и C_2, који имају исту оријентацију као и крива C.

Примјер 3.5. Израчунати криволинијски интеграл $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{F}(x,y) = xy\boldsymbol{i} + (x+y)\boldsymbol{j}$ гдје је

а) C одсјечак праве $y = x$ од $O(0,0)$ до $B(1,1)$,

б) C лук параболе $y = x^2$ од $O(0,0)$ до $B(1,1)$.

*Рјешење:*а)

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C xydx + (x+y)dy$$

$$C:\ \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j},\quad 0 \le t \le 1,\qquad dx = dy = dt$$

Имамо

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 (t^2 + 2t)dt = \frac{4}{3}$$

б)

$$C:\ \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j},\quad 0 \le t \le 1,\qquad dx = dt\,,\qquad dy = 2tdt$$

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 (t^3 + (t+t^2)2t)dt = \int_0^1 (t^3 + (t+t^2)2t)dt = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12}.$$

Напомена: Криволинијски интеграл друге врсте у општем случају зависи од путање интеграције, а не само од крајњих тачака. Под одређеним условима криволинијски интеграл друге врсте зависи само од крајњих тачака (видјети Поглавље 4.8).

- ✓ Испитаћемо сада понашање криволинијског интеграла друге врсте при избору друге параметризације криве C.

Нека је $t = h(u)$ диференцијабилна реална функција дефинисана на интервалу $\alpha \leq u \leq \beta$ при чему су вриједности функције $h(u)$ из интервала $[a, b]$. Нека је извод $h'(u) \neq 0$ на $\alpha \leq u \leq \beta$. Тада векторска функција

$$\tilde{r}(u) = r\big(h(u)\big), \qquad \alpha \leq u \leq \beta$$

представља нову параметарску репрезентацију криве C. Ова нова параметризација одређује исту или супротну оријентацију криве C, у зависности од тога да ли је извод $h'(u)$ позитиван или негативан на $\alpha \leq u \leq \beta$. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 3.2. Нека су $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), a \leq t \leq b$ и $\tilde{\boldsymbol{r}} = \tilde{\boldsymbol{r}}(u), \alpha \leq u \leq \beta$ двије параметарске репрезентације глатке криве C. Тада је

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\tilde{\boldsymbol{r}} \tag{3.12}$$

ако $\boldsymbol{r}$ и $\tilde{\boldsymbol{r}}$ одређују исту оријентацију криве C а

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\tilde{\boldsymbol{r}} \tag{3.13}$$

ако $\boldsymbol{r}$ и $\tilde{\boldsymbol{r}}$ одређују супротну оријентацију криве C.

Доказ: Пошто је $t = h(u)$, $\tilde{r}(u) = r\big(h(u)\big)$, $\alpha \leq u \leq \beta$, из дефиниције криволинијског интеграла и извода сложене функције добијамо

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\tilde{\boldsymbol{r}} = \int_\alpha^\beta \boldsymbol{F}\big(\tilde{r}(u)\big) \cdot \tilde{\boldsymbol{r}}'(u)du = \int_\alpha^\beta \boldsymbol{F}\Big(r\big(h(u)\big)\Big) \cdot \boldsymbol{r}'\big(h(u)\big)h'(u)du. \tag{3.14}$$

Увођењем смјене $t = h(u), dt = h'(u)du$ у одређеном интегралу у (3.14), добијамо

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\tilde{\boldsymbol{r}} = \int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} \boldsymbol{F}\big(r(t)\big) \cdot \boldsymbol{r}'(t)dt = \int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} \boldsymbol{F}\big(r(t)\big) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{3.15}$$

Уколико је $b = h(\beta), a = h(\alpha)$, тј. ако је функција h строго растућа, тада из (3.15) добијамо

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} \boldsymbol{F}\big(r(t)\big) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}\big(r(t)\big) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

а уколико је $a = h(\beta), b = h(\alpha)$, тј. ако је функција h строго опадајућа, тада је

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} \boldsymbol{F}\big(r(t)\big) \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{dt} \cdot dt = -\int_a^b \boldsymbol{F}\big(r(t)\big) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Према томе, у првом случају је

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\tilde{\boldsymbol{r}}$$

а у другом

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\tilde{\boldsymbol{r}}$$

и теорема је доказана. □

Примјер 3.6. Израчунати криволинијски интеграл

$$\oint_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$$

гдје је C елипса: $x^2 + y^2 = a^2,\ \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1, a > 0, h > 0.$

Рјешење: $-2a\pi(a+h)$. □

3.3. Гринова теорема

Двојни интеграл у раванској области може се, под одређеним условима, трансформисати у линијске интеграле по граници те области и обрнуто, што у неким случајевима може да олакша израчунавање интеграла. Везу између двојног интеграла у раванској области и линијског интеграла по граници те области даје Гринова [2] формула.

Гринова формула је уопштење Њутн-Лајбницове формуле јер Њутн-Лајбницова формула интеграл извода функције по интервалу изражава помоћу вриједности функције на крајевима интервала, док Гринова формула двојни интеграл извода функције по некој области изражава помоћу линијског интеграла по рубу области.

[2] George Green (1793-1841), енглески математичар и физичар

Теорема 3.3. Гринова теорема. Нека је D затворена ограничена област у $xy -$ равни чија се граница C састоји од коначног броја дио по дио глатких једноставних затворених кривих. Ако су функције $F_1, F_2, \frac{\partial F_1}{\partial y}$ и $\frac{\partial F_2}{\partial x}$ непрекидне на некој области која садржи D, тада је

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C F_1 dx + F_2 dy \tag{3.16}$$

при чему је C оријентисана тако да при кретању по C у смјеру интеграције област D остаје са лијеве стране.

Доказ: Уочимо на почетку да је формула (3.14) еквивалентна формулама

$$\iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} dxdy = \oint_C F_2 dy \tag{3.17}$$

и

$$-\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dxdy = \oint_C F_1 dx. \tag{3.18}$$

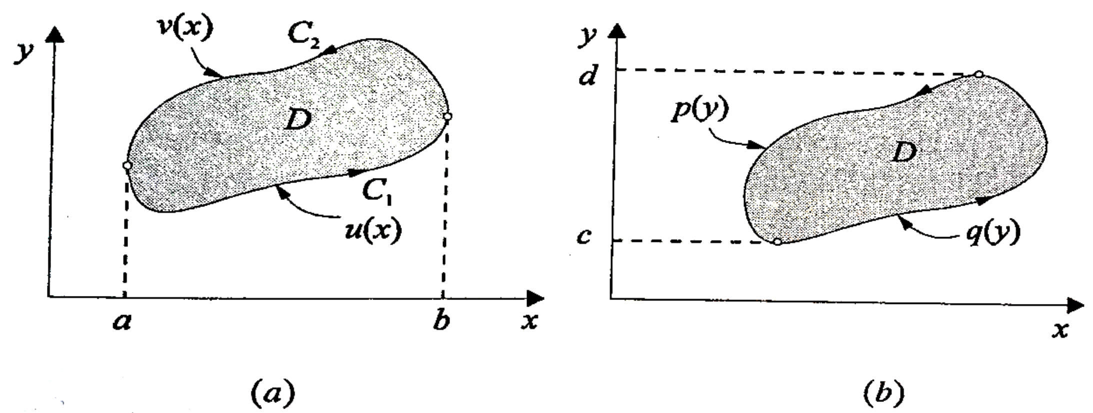
Наиме, ако вриједе формуле (3.17) и (3.18) тада сабирањем добијамо Гринову формулу (3.16). Ако пак вриједи (3.16) онда стављањем $F_1 = 0$, односно $F_2 = 0$ у (3.16), добијамо (3.17), односно (3.18).

1) Доказујемо формулу (3.16) за специјалну област D која се може представити у облику

$$D = \{(x,y): a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\} \tag{3.19}$$

и

$$D = \{(x,y): c \leq y \leq d, p(y) \leq x \leq q(y)\}. \tag{3.20}$$



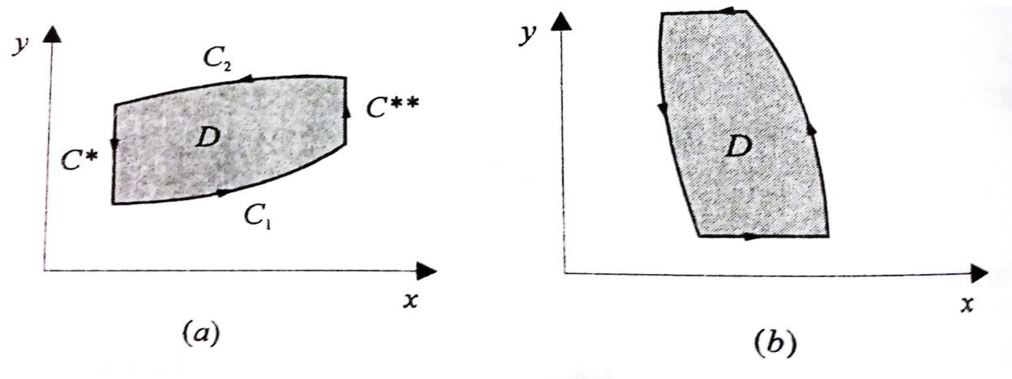
Слика 3.1.

За двојни интеграл по области D из (3.19) (Слика 3.1 (a)) имамо

$$\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dy\right) dx = \int_a^b \Big(F_1\big(x, v(x)\big) - F_1\big(x, u(x)\big)\Big)\, dx =$$

$$-\int_a^b F_1\big(x, u(x)\big)\, dx - \int_b^a F_1\big(x, v(x)\big)\, dx = -\int_{C_1} F_1(x,y)\, dx - \int_{C_2} F_1(x,y)\, dx = -\oint_C F_1(x,y) dx.$$

Уколико би дијелови криве C били сегменти паралелни y −оси, као што су C^* и C^{**} на Слици 2.2 (а), тада би опет важио претходни резултат јер је интеграл функције $F_1(x,y)$ по тим сегментима једнак нули. Наиме, једначине кривих C^* и C^{**} су $x = a$, односно $x = b$, па је $dx = 0$, односно $\int_{C^*} F_1(x,y)\,dx = \int_{C^{**}} F_1(x,y)\,dx = 0$. То значи да се ови интеграли могу додати интегралима по C_1 и C_2.



Слика 3.2.

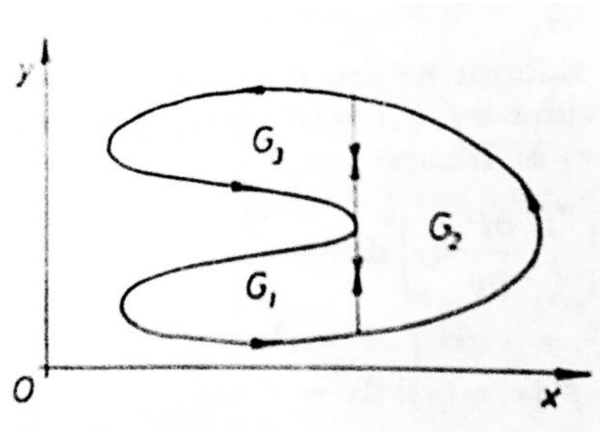
Аналогно, за двојни интеграл по области D (Слика 3.1 (б)) из (3.20) имамо

$$\iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x}\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{p(y)}^{q(y)} \frac{\partial F_2}{\partial x}\,dx\right) dy = \int_c^d \big(F_2(q(y),y) - F_2(p(y),y)\big)\,dy =$$

$$\int_c^d F_2(q(y),y)\,dy + \int_d^c F_2(p(y),y)\,dy = \oint_C F_2(x,y)dy.$$

Уколико би дијелови криве C били сегменти паралелни x −оси (Слика 3.2 (б)), тада би опет важио претходни резултат јер је интеграл функције $F_2(x,y)$ по тим сегментима једнак нули тако да се могу додати интегралима по C_1 и C_2. Дакле, доказали смо да вриједе формуле (3.17) и (3.18), тј. Гринова формула, уколико је област D облика (3.19), односно (3.20).

2) Уколико се област D може подијелити на коначно много специјалних области облика (3.19), односно (3.20) као на Слици 3.3, онда примјењујуемо доказану формулу на сваку подобласт и сабирамо резултате.

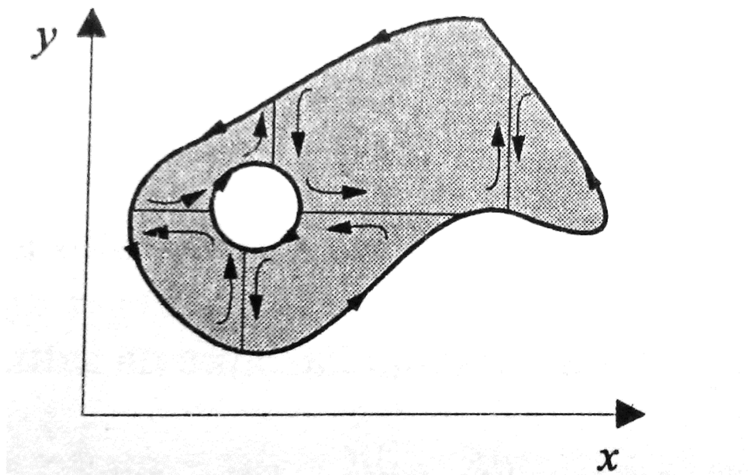


Слика 3.3.

Збир одговарајућих двојних интеграла по подобластима даје двојни интеграл по области D плус интеграле по дужима којима је извршена подјела области D. Свака од тих дужи је граница тачно двије подобласти са супротним оријентацијама. Ови интеграли се међусобно анулирају.

На тај начин добијамо само интеграл по граници области D па Гринова формула вриједи и у овом случају.

3) Гринова теорема вриједи и уколико је област D вишеструко повезана [3] (Слика 3.4), али је доказ сложенији и због тога га не наводимо. □



Слика 3.4.

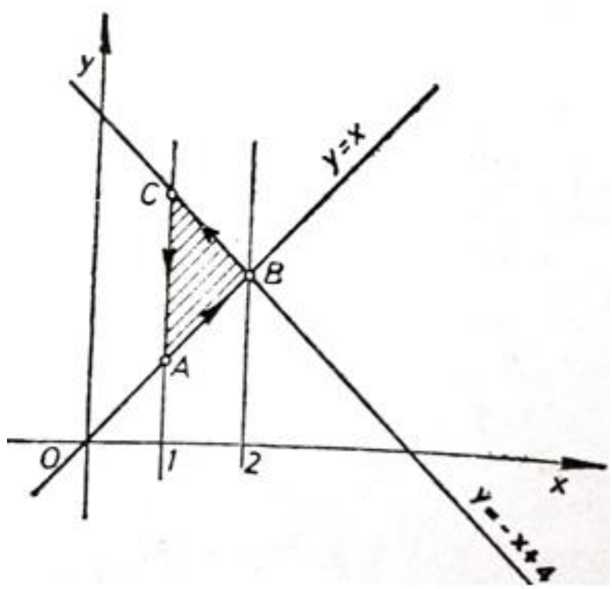
[3] Област је вишеструко повезана ако није једноструко повезана. Област је једноструко повезана ако унутрашњост сваке једноставне затворене криве која лежи у области такође припада тој области.

Примјер 3.7. Помоћу Гринове формуле израчунати интеграл

$$\oint_C 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy$$

гдје је C троугао одређен тачкама $A(1,1), B(2,2), C(1,3),$ оријентисан у смјеру супротном кретању казаљке на сату.

Рјешење: $F_1(x,y)=2(x^2+y^2),\ F_2(x,y)=(x+y)^2,\ \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}=2x-2y,$ па је



$$\oint_C 2(x^2+y^2)dx+(x+y)dy=2\iint_D (x-y)\,dxdy=-\frac{4}{3}.$$

Примјер 3.8. Израчунати интеграл

$$\oint_\gamma \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

гдје је γ кружница $x^2 + y^2 = 1$, оријентисана у смјеру супротном кретању казаљке на сату.

Рјешење: Директним рачунањем добијамо резулат

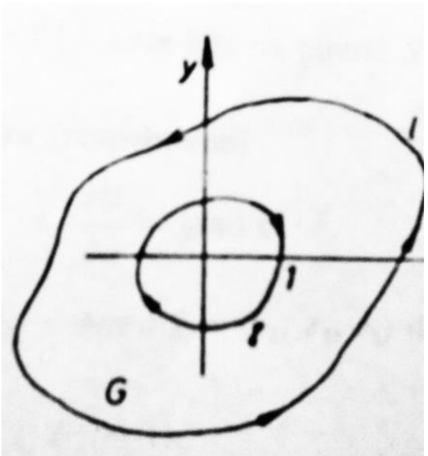
$$\oint_\gamma \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{sin^2 t + cos^2 t}{sin^2 t + cos^2 t} dt = 2\pi.$$

Примјеном Гринове теореме добили бисмо

$$F_1(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2},\ F_2(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0,$$

тј. да је интеграл једнак нули. Међутим, Гринова теорема се не може примијенити јер функције F_1 и F_2 имају прекид у тачки (0,0).

Зато Гринову теорему можемо примијенити на двоструко повезаној области која је ограничена кривом $\gamma \cup l$ (Слика 3.5).



Слика 3.5.

Тада је

$$\oint_{\gamma \cup l} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \iint_G \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dxdy = 0.$$

Одавде добијамо

$$\oint_{\gamma \cup l} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \oint_{\gamma^+} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} + \oint_{l^-} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = 0,$$

при чему крива γ има позитивну, а крива l негативну оријентацију. Према томе

$$\oint_{\gamma^+} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \oint_{l^+} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

односно, вриједност интеграла је једнака за сваку затворену једноставну криву која обухвата тачку (0,0) и његова вриједност је 2π. □

- ✓ Површина раванске области D се може рачунати помоћу криволинијског интеграла по граници те области C. Лако се показује да је површина $\mu(D)$ области D једнака

$$\mu(D) = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx \tag{3.21}$$

при чему је граница области оријентисана супротно кретању казаљке на сату.

Примјер 3.9. Користећи (3.21) израчунати површину ограничене елипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

- ✓ Ако је у формули (3.9) $\boldsymbol{F}$ сила, онда криволинијски интеграл по кривој C представља рад W који та сила извршава по оријентисаној кривој

$$W = \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}\,. \tag{3.22}$$

Примјер 3.10. Користећи Гринову теорему одредити рад који врши сила

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (y+3x)\boldsymbol{i} + (2y-x)\boldsymbol{j}$$

помјерајући материјалну тачку дуж елипсе $4x^2 + y^2 = 4$ у смјеру супротном кретању казаљке на сату.

Рјешење: Из формуле (3.22) добијамо

$$W = \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (y+3x)dx + (2y-x)dy = \iint_D (-2)\, dxdy = -4\pi. \square$$