УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 3- ПРЕДАВАЊА

Академска 2017/2018

4. ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛИ

ЛИТЕРАТУРА: **Момир В. Ћелић, Математика II,** Машински факултет, Бања Лука, 1997[1]

Наставник: Биљана Војводић

[1] У припреми предавања коришћена је и књига **Математика, Милош Томић** (Свјетлост, Сарајево, 1988)

4. ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛИ

Површински интеграл је дводимензионална верзија криволинијског интеграла.

Као и код криволинијских интеграла, разликујемо површинске интеграле прве и друге врсте, у зависности да ли интегралимо скаларне или векторске функције. Ако интегралимо скаларну функцију дефинисану на површи S, онда се ради о **површинском интегралу прве врсте,** а ако интегралимо векторску функцију, онда се ради о **површинском интегралу друге врсте**.

Код криволинијског интеграла вршили смо интеграцију по кривој C чија је репрезентација омогућавала свођење на одређени интеграл. Код површинског интеграла интеграцију ћемо вршити по површи S која ће бити представљена на начин који ће омогућити свођење површинског интеграла на двојни интеграл.

4.1. ПАРАМЕТАРСКА РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА ПОВРШИ

Ако је површ S задата у облику

$$F(x, y, z) = 0 \tag{4.1}$$

кажемо да је површ представљена у **имплицитном облику**.

Ако се једначина (4.1) може ријешити по z, онда се добија једна или више једначина облика

$$z = f(x, y) \tag{4.2}$$

и у том случају кажемо да је површ представљена у **експлицитном облику.**

Примјер 4.1. Једначина $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ представља једначину кружног конуса у имплицитном облику. Рјешавањем по z добијамо двије једначине

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ и } z = -\sqrt{x^2 + y^2}$$

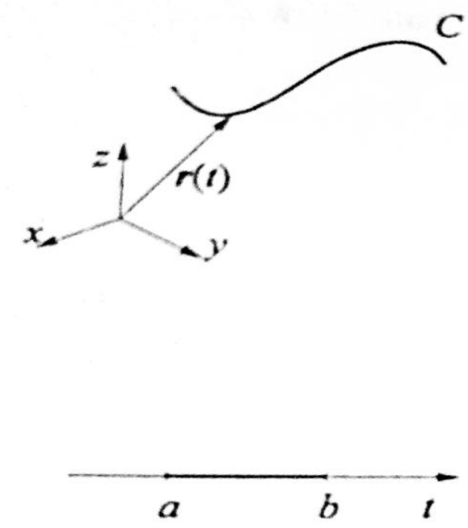
које дају једначине горње, односно доње половине конуса. □

Криву смо дефинисали као **ходограф непрекидне векторске функције** (видјети Поглавље 1.4. у Векторским функцијама, стр. 17).

При дефинисању криволинијских интеграла користили смо параметарску репрезентацију криве

$$C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \qquad a \leq t \leq b$$

која пресликава интервал $a \leq t \leq b$ на криву C. Свакој вриједности параметра t придружена је тачка криве чији је радијус-вектор $\boldsymbol{r}(t)$ (Слика 4.1. а)).

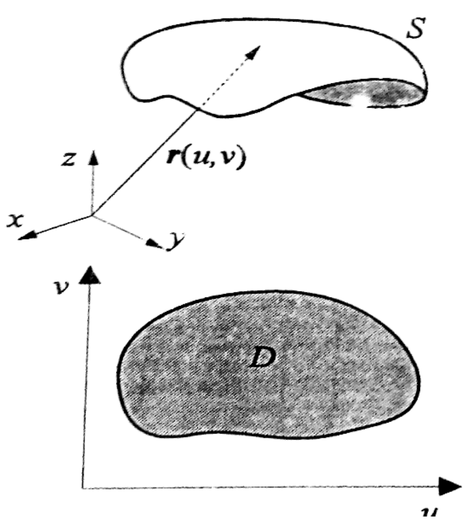


Слика 4.1. а)

Аналогно, површ можемо схватити као **ходограф непрекидне векторске функције двију промјењљивих** која пресликава неку равanску област D на површ S. При дефинисању површинских интеграла користимо параметарску репрезентацију површи S која има облик

$$\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}, (u,v) \in D \tag{4.3}$$

гдје је D нека област у uv-равни (Слика 4.1. б)).



Слика 4.1. б)

Формулом (4.3) је дато пресликавање које свакој тачки $(u, v) \in D$ придружује тачку површи S чији је радијус-вектор $\boldsymbol{r}(u, v)$. Ако је векторска функција $\boldsymbol{r}(u, v)$ из (4.3) 1-1 пресликавање, онда кажемо да је површ S **једноставна површ**.

- ✓ Ако је крајња тачка вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$ тачка $r(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$, површ S можемо представити помоћу једначине

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v), \qquad (u, v) \in D. \tag{4.4}$$

Формула (4.4) је други облик параметарске репрезентације (4.3).

У наставку наводимо параметарске репрезентације неких од површи.

- **Параметарска репрезентација цилиндра**

Кружни цилиндар $x^2 + y^2 = a^2, -1 \leq z \leq 1$ има параметарску репрезентацију

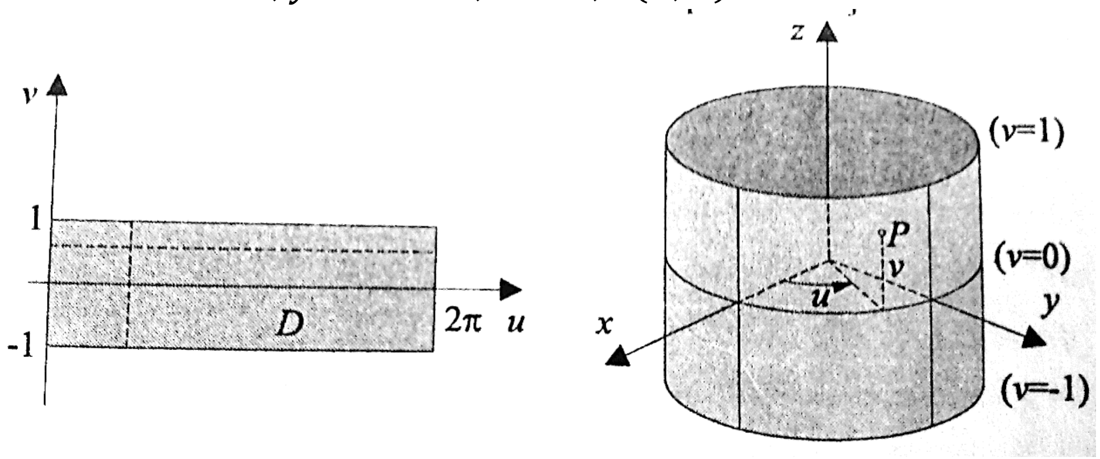
$$\boldsymbol{r}(u, v) = a\cos u\boldsymbol{i} + a\sin u\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}, \qquad (u, v) \in D \tag{4.5}$$

гдје је

$$D = \{(u, v): 0 \leq u \leq 2\pi, -1 \leq v \leq 1\}.$$

Дата параметарска репрезентација одређује пресликавање које свакој тачки паравоугаоника D придружује тачку са цилиндра. Компоненте вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$ су

$$x = a\cos u, y = a\sin u, z = v, \quad (u, v) \in D.$$



Слика 4.2.

Криве $u = u_0 = const.$ су сегменти, а криве $v = v_0 = const.$ су кружнице (Слика 4.2).

- **Параметарска репрезентација сфере**

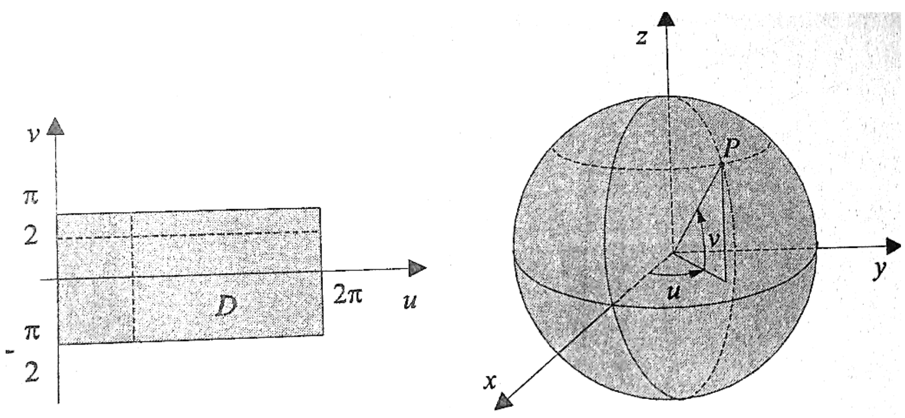
Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ има параметарску репрезентацију

$$\boldsymbol{r}(u,v) = acosvcosu\boldsymbol{i} + acosvsinu\boldsymbol{j} + asinv\boldsymbol{k}, \qquad (u,v) \in D \tag{4.6}$$

гдје је

$$D = \left\{(u,v): 0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Компоненте вектора $\boldsymbol{r}(u,v)$ су: $x = acosvcosu, y = acosvsinu, z = sinv, (u,v) \in D$.



Слика 4.3.

Криве $u = u_0 = const.$ су *меридијани*

Криве $v = v_0 = const.$ су *паралеле.*

Репрезентација (4.6) користи се у географији за мјерење географске ширине и дужине тачке са глобуса, (Слика 4.3).

Поред репрезентације (4.6) за сферу се користи и параметарска репрезентација

$$\boldsymbol{r}(u,v) = acosusinv\boldsymbol{i} + asinusinv\boldsymbol{j} + acosv\boldsymbol{k}, \qquad 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi. \tag{4.6$_1$}$$

- **Параметарска репрезентација конуса**

Дио кружног конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ између равни $z = 0$ и $z = H$ има параметарску репрезентацију

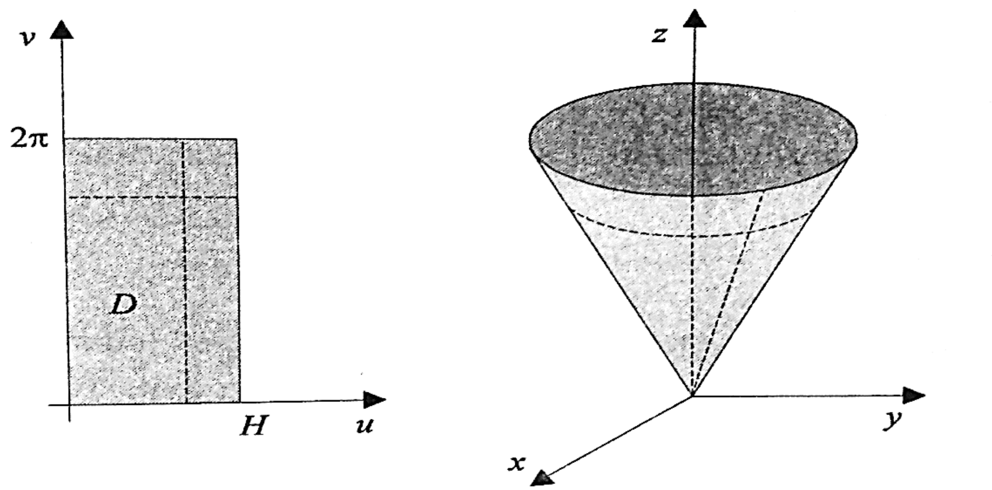
$$\boldsymbol{r}(u, v) = ucosv\boldsymbol{i} + usinv\boldsymbol{j} + u\boldsymbol{k}, \qquad (u, v) \in D \tag{4.7}$$

гдје је

$$D = \{(u, v) : 0 \le u \le H, 0 \le v \le 2\pi\}.$$

Компоненте вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$ су: $x = ucosv, y = usinv, z = u, (u, v) \in D$.

Криве $u = u_0 = const.$ су кружнице, а криве $v = v_0 = const.$ су сегменти, Слика 4.4.



Слика 4.4.

Примјер 4.2. Одредити параметарску репрезентацију параболичког цилиндра $y = x^2$.

Рјешење:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = u\boldsymbol{i} + u^2\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}, \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Примјер 4.3. Одредити једначину површи

$$\boldsymbol{r}(u,v) = ucosv\boldsymbol{i} + usinv\boldsymbol{j} + u^2\boldsymbol{k}, \qquad u \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leq v \leq 2\pi,$$

у односу на координате x, y, z и препознати која је површ у питању.

Рјешење: $x^2 + y^2 = z$, елиптички параболоид.

Примјер 4.4. Одредити једначину површи

$$\boldsymbol{r}(u,v) = acosvcosu\boldsymbol{i} + bcosvsinu\boldsymbol{j} + 2sinv\boldsymbol{k}, \;\; 0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

у односу на координате x, y, z и препознати која је површ у питању.

Рјешење: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{4} = 1$, елипсоид.

4.2. ТАНГЕНТНА РАВАН И НОРМАЛА НА ПОВРШ

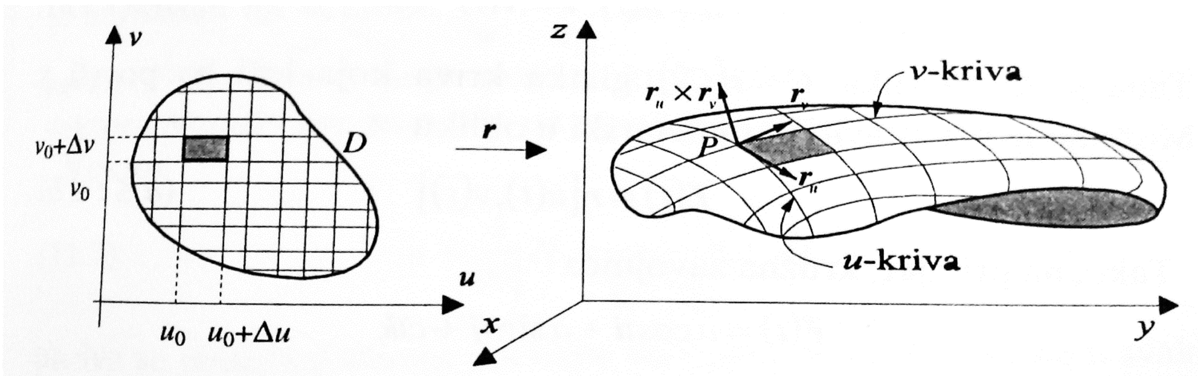
Нека је

$$\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}, \qquad (u,v) \in D \tag{4.8}$$

параметарска репрезентација површи S и (u_0, v_0) фиксирана тачка области D. Ако је пресјек области D и праве $v = v_0$ сегмент тада је

$$\boldsymbol{r}(u,v_0) = x(u,v_0)\boldsymbol{i} + y(u,v_0)\boldsymbol{j} + z(u,v_0)\boldsymbol{k}, \qquad (u,v_0) \in D \tag{4.9}$$

параметарска репрезентација криве са S која представља слику тог сегмента (Слика 4.5).



Слика 4.5

Та крива се назива **крива $\boldsymbol{v = v_0 = const}$. или $\boldsymbol{u}$ −крива**. Вектор

$$\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \frac{\partial x(u, v_0)}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y(u, v_0)}{\partial u}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z(u, v_0)}{\partial u}\boldsymbol{k}, \qquad (u, v_0) \in D \tag{4.10}$$

представља њен тангентни вектор.

Аналогно се дефинише **крива $\boldsymbol{u = u_0 = const}$. или $\boldsymbol{v}$ −крива**

$$\boldsymbol{r}(u_0, v) = x(u_0, v)\boldsymbol{i} + y(u_0, v)\boldsymbol{j} + z(u_0, v)\boldsymbol{k}, \qquad (u_0, v) \in D \tag{4.11}$$

и њен тангентни вектор

$$\boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \frac{\partial x(u_0, v)}{\partial v}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y(u_0, v)}{\partial v}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z(u_0, v)}{\partial v}\boldsymbol{k}, \qquad (u_0, v) \in D. \tag{4.12}$$

Дефиниција 4.1. Ако је (u_0, v_0) тачка области D у којој су векторске функције $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ непрекидне и у којој је

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \neq \boldsymbol{0}, \tag{4.12$_1$}$$

тада за тачку $r(u_0, v_0)$ кажемо да је **регуларна тачка** површи S при репрезентацији (4.8). Ако $r(u_0, v_0)$ није регуларна тачка површи S, кажемо да је $r(u_0, v_0)$ **сингуларна тачка** површи S.

- ✓ Из услова (4.12$_1$) добијамо да за регуларну тачку $r(u_0, v_0)$ површи S вриједи

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}(u_0, v_0)}{\partial u} \neq \boldsymbol{0} \text{ и } \frac{\partial \boldsymbol{r}(u_0, v_0)}{\partial v} \neq \boldsymbol{0},$$

  и да вектори $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ нису колинеарни.

Дефиниција 4.2. За површ S са параметарском репрезентацијом (4.8) кажемо да је **глатка** ако су све њене тачке регуларне у односу на параметарску репрезентацију (4.8).

- ✓ Из дефиниције 4.2 добијамо да је површ S, у случају непрекидно-диференцијабилне векторске функција $\boldsymbol{r}(u, v)$ на D, глатка ако и само вриједи (4.12$_1$) на D.

Размотримо сада произвољну криву на глаткој површ S са параметраском репрезентацијом (4.8).

Нека је C^* глатка крива у области D представљена параметарски у облику

$$u = u(t), v = v(t), \qquad a \leq t \leq b.$$

Тада је њена слика $C = \boldsymbol{r}(C^*)$ глатка крива која лежи на површи S, коју можемо представити параметарски у облику

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}\big(u(t), v(t)\big), \qquad a \leq t \leq b. \tag{4.13}$$

Вектор

$$\tilde{\boldsymbol{r}}'(t) = \frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} \neq \boldsymbol{0}, \qquad a \leq t \leq b \tag{4.14}$$

је тангентни вектор на криву C. Из (4.14) видимо да тај вектор лежи у равни која је одређена векторима $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$.

Ако сада фиксирамо тачку P на површи S и размотримо све криве са површи S које пролазе кроз тачку P, на исти начин закључујемо да тангентни вектори на те криве леже у равни одређеној векторима $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$. То нас доводи до сљедеће дефиниције:

Дефиниција 4.3. Раван $T(P)$ која садржи тангенте у тачки P на све криве са површи S које пролазе кроз тачку P, назива се **тангентна раван** површи S.

Пошто је вектор

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \neq \boldsymbol{0} \tag{4.15}$$

нормалан на векторе $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$, он је нормалан и на тангентну раван $T(P)$.

Дефиниција 4.4. Права која пролази кроз тачку P у правцу вектора $\boldsymbol{N}$ назива се **нормала** на површ S у тачки P. Вектор

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{|\boldsymbol{N}|} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} \tag{4.16}$$

се назива **јединични вектор нормале** на површ S у тачки P.

Према томе, из дефиниција глатке површи, тангентне равни и нормале, закључујемо да вриједи сљедећа теорема.

Теорема 4.1. Ако је површ S са параметарском репрезентацијом (4.8) глатка, тј. ако су векторске функције $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ непрекидне и ако задовољавају услов (4.12_1) у свакој тачки области D, тада површ S има јединствену тангентну раван и јединствену нормалу у свакој својој тачки P које се непрекидно мијењају када та тачка путује по површи S.

Из Теореме 4.1 добијамо карактеризацију глатке површи без позивања на параметризацију:

Површ је глатка ако има јединствену тангентну раван и јединствену нормалу у свакој својој тачки и ако се оне непрекидно мијењају од тачке до тачке површи.

Сфера је глатка површ. Коцка није глатка површ јер функције $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ нису свуда непрекидне. Међутим, коцка је дио по дио глатка површ што слиједи из сљедеће дефиниције.

Дефиниција 4.5. Кажемо да је површ **дио по дио глатка** ако се она састоји од коначног броја глатких површи.

Одредимо сада једначину тангентене равни за површи задате имплицитно, односно експлицитно.

Ако је површ задата имплицитно у облику $F(x, y, z) = 0$, онда се она може схватити као ниво површ скаларне функције F. Показали смо [2] да је тада јединични вектор нормале облика

$$\boldsymbol{n} = \frac{gradF}{|gradF|}. \tag{4.17}$$

Према томе, једначина тангентне равни у тачки $P(x_0, y_0, z_0)$ је

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0. \tag{4.18}$$

[2] Видјети Скаларна и векторска поља, стр. 59.

Ако је површ задата експлицитно у облику

$$z = f(x, y)$$

њој одговара параметарска репрезентација

$$\boldsymbol{r}(x, y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + f(x, y)\boldsymbol{k},$$

односно имплицитна репрезентација

$$F(x, y, z) \equiv z - f(x, y) = 0.$$

Јединични вектор нормале за површ задату експлицитно је облика

$$\boldsymbol{n} = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \tag{4.19}$$

па је једначина тангентне равни у тачки $P\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \tag{4.20}$$

Примјер 4.5. За сферу $x^2+y^2+z^2=a^2$ је $F=x^2+y^2+z^2-a^2$ па из (4.17) добијамо да је њен јединични вектор нормале

$$\boldsymbol{n}(x,y,z)=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{a}.\,\square$$

Примјер 4.6. Из (4.19) добијао да је јединични вектор нормале на конус $z=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\boldsymbol{n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}\right).$$

Очигледно је да конус у свим тачкама осим тачке (0,0,0) има одређен јединични вектор нормале. Тачка (0,0,0) је једина сингуларна тачка конуса. □

Примјер 4.7. Одредити једначину тангентне равни површи у тачки P

а) $z=xy, P(1,1,1)$, б) $4x^2+y^2+z^2=17, P(1,3,2)$.

Рјешење: а) Користимо формулу (4.20), $z=f(x,y)=xy$. Имамо

$$(x-1)+(y-1)-(z-1)=0\Rightarrow x+y-z-1=0.$$

б) Користимо формулу (4.18), $F(x,y,z)=4x^2+y^2+z^2-17=0$. Имамо

$$8(x-1)+6(y-3)+4(z-2)=0\Rightarrow 4x+3y+2z-17=0.\,\square$$

4.3. ПОВРШИНА ПОВРШИ

Нека је S једноставна глатка површ са параметарском репрезентацијом

$$\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}, \qquad (u,v) \in D \tag{4.21}$$

Подијелимо област D мрежом правих паралелних u и v осама. Овој подјели области D одговара подјела површи S мрежом $u-$ кривих и $v-$ кривих, Слика 4.5.

Правоугаонику из D са тјеменима $(u_0,v_0),(u_0+\Delta u,v_0),(u_0,v_0+\Delta v),(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v)$ одговара криволинијски паралелограм површи S са тјеменима $r(u_0,v_0), r(u_0+\Delta u,v_0), r(u_0,v_0+\Delta v), r(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v)$. Пошто је

$$r(u_0+\Delta u,v_0) - r(u_0,v_0) \approx \frac{\partial \boldsymbol{r}(u_0,v_0)}{\partial u}\Delta u$$

и

$$r(u_0,v_0+\Delta v) - r(u_0,v_0) \approx \frac{\partial \boldsymbol{r}(u_0,v_0)}{\partial v}\Delta v$$

можемо површину криволинијског паралелограма апроксимирати површином паралелограма одређеног векторима $\frac{\partial \boldsymbol{r}(u_0,v_0)}{\partial u}\Delta u$ и $\frac{\partial \boldsymbol{r}(u_0,v_0)}{\partial v}\Delta v$.

Према томе, површина криволинијског паралелограма на površи S је приближно

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}(u_0,v_0)}{\partial u}\Delta u \times \frac{\partial \boldsymbol{r}(u_0,v_0)}{\partial v}\Delta v\right| = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}(u_0,v_0)}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}(u_0,v_0)}{\partial v}\right|\Delta u \Delta v.$$

Површина површи S једнака је збиру површина криволинијских паралелограма добијених подјелом области D, што нас доводи до дефиниције површине површи.

Дефиниција 4.6. Нека је S једноставна глатка површ са параметарском репрезентацијом

$$\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}, \qquad (u,v) \in G$$

Тада се број

$$\mu(S) = \iint_G \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv \tag{4.22}$$

назива **површина површи** $\boldsymbol{S}$.

- ✓ Показује се да површина површи не зависи од избора параметарске репрезентације.

Одредимо сада површину површи која је задата експлицитно.

Нека је површ S задата експлицитно у облику

$$z = f(x, y)$$

и претпоставимо да се површ обострано једнозначно пројектује у област D у $xy-$ равни. Ако су функције f, $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрекидне у D, тада из (4.22) добијамо

$$\mu(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy. \tag{4.23}$$

Ако је S област у xy −равни или у равни паралелној xy −равни, тада је функција f константна па је $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Тада из (4.23) добијамо

$$\mu(S) = \iint_D dxdy$$

тј. добијамо двојни интеграл за рачунање површине раванске области.

Уочимо да формулу (4.23) можемо записати и помоћу косинуса угла γ који јединични вектор нормале $\boldsymbol{n}$ заклапа са вектором $\boldsymbol{k}$. Наиме, из (4.19) имамо

$$cos\gamma = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \tag{4.24}$$

па (4.23) постаје

$$\mu(S) = \iint_D \frac{1}{cos\gamma}dxdy. \tag{4.25}$$

Ако површ S лежи у некој равни која није нормална на xy $-$раван, тада је γ констанатан угао па из (4.23) добијамо

$$\mu(S) = \frac{1}{cos\gamma}\iint_D dxdy \tag{4.26}$$

односно

$$\mu(D) = \mu(S)cos\gamma. \tag{4.27}$$

Примјер 4.8. Израчунати површину сфере $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Рјешење: Параметарска репрезентација сфере је (видјети (4.6_1))

$$\boldsymbol{r}(u,v) = acosusinv\boldsymbol{i} + asinusinv\boldsymbol{j} + acosv\boldsymbol{k}, \qquad 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi.$$

Имамо

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -asinusinv & acosusinv & 0 \\ acosucosv & asinucosv & -asinv \end{vmatrix} =$$

$$-a^2cosusin^2v\boldsymbol{i} - a^2sinusin^2v\boldsymbol{j} - a^2(sin^2u+cos^2u)sinvcosv\boldsymbol{k}$$

па је

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| = a^2\sqrt{sin^4v(sin^2u+cos^2u) + sin^2vcos^2v} = a^2\sqrt{sin^2v(sin^2v+cos^2v)} = a^2sinv$$

Из формуле (4.22) добијамо површину сфере

$$\mu(S) = a^2 \iint_G sinv\, dudv = a^2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} sinvdv \right) du = 4a^2\pi.$$

Уочимо да бисмо се за примјену формуле (4.23) морали ограничити на горњу (или доњу) полусферу како би постојало обострано једнозначно пресликавање површи на њену пројекцију у xy −раван. Ако је S_1 горња полусфера тада је

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D,$$

гдје је D круг полупречника a. Тада из формуле (4.23) добијамо

$$\mu(S_1) = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy.$$

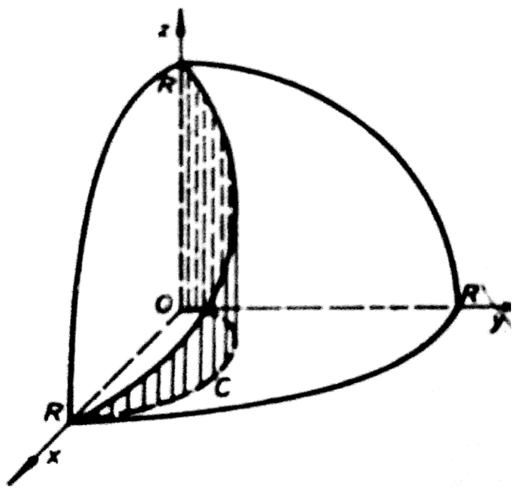
Уводећи у горњи интеграл поларне координате добијамо

$$\mu(S_1) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho \right) d\varphi = 2a^2\pi.$$

Површина сфере је $2\mu(S_1) = 4a^2\pi. \square$

Примјер 4.9. Израчунати површину дијела сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$ који се налази унутар цилиндра $x^2+y^2=Rx$.

Рјешење: Уочимо да је површ симетрична у односу на xy −раван па ћемо рачунати површину дијела сфере унутар цилиндра изнад xy −равни.



Можемо примијенити формулу (4.23) и добијамо

$$\mu(S)=2R\iint_D \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

гдје је $D: x^2+y^2\le Rx$.

Уводећи поларне координате добијамо

$$\mu(S)=2R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{Rcos\varphi}\frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho\right)d\varphi=2R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sqrt{R^2-\rho^2}\Big|_0^{Rcos\varphi}\right)d\varphi=$$

$$2R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(R-R|sin\varphi|)d\varphi=4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-sin\varphi)d\varphi=4R^2(\frac{\pi}{2}-1).\square$$

4.4. ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ПРВЕ ВРСТЕ

Нека је површи S представљена помоћу диференцијабилне векторске функције

$$\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}, \qquad (u,v) \in D$$

и нека је скаларна функција F дефинисана и ограничена на S.

Дефиниција 4.7. Површински интеграл прве врсте скаларне функције F по површи S означавамо са $\iint_S F\, dS$ или $\iint_S F(x,y,z)\, dS$ и дефинишемо са

$$\iint_S F\, dS = \iint_D F(r(u,v)) \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| dudv. \tag{4.28}$$

Показује се да површински интеграл прве врсте не зависи од избора параметарске репрезентације.

За $F = 1$ из (4.28) добијамо

$$\iint_S dS = \iint_D \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv = \mu(S)$$

односно формулу (4.22) за површину површи. Због тога се симбол dS назива *елемент површине површи*.

Ако је површ задата експлицитно у облику

$$z = f(x, y)$$

њој одговара параметарска репрезентација

$$\boldsymbol{r}(x, y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + f(x, y)\boldsymbol{k}, (x, y) \in D,$$

гдје је D пројекција површи xy −раван. Тада формула (4.28) добија облик

$$\iint_S F\, dS = \iint_D F(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy. \tag{4.29}$$

Особине двојног интеграла се преносе на површински интеграл. Вриједи:

1. $\iint_S kF\,dS = k\iint_S F\,dS,$ k је константа,

2. $\displaystyle\iint_S (F+G)\,dS = \iint_S F\,dS + \iint_S G\,dS$

3. $\iint_S F\,dS = \iint_{S_1} F\,dS + \iint_{S_2} F\,dS + \cdots + \iint_{S_n} F\,dS,$ гдје је површ S састављена од дијелова $S_1, S_2, \dots, S_n$.

Примјер 4.10. Израчунати површински интеграл функције $F(x,y,z) = x^2 + y^2$ по дијелу конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$ унутар цилиндра $x^2 + y^2 = 4$.

Рјешење:

$$\iint_S F\,dS = \iint_G (x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy = \sqrt{2}\iint_G (x^2+y^2)\,dxdy$$

гдје је G: $x^2 + y^2 \le 4$. Преласком на поларне координате добијамо

$$\iint_S F\,dS = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^4 \rho^3\,d\rho\right)d\varphi = 8\sqrt{2}\pi.\,\square$$

Примјене површинског интеграла прве врсте

- *Рачунање масе површи*

Ако скаларно поље $\rho(x, y, z)$ представља густину неке масе распоређене по површи S, тада се маса те површи дефинише као површински интеграл прве врсте функције ρ

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) dS.$$

- *Одређивање центра теже површи*

Центар теже се дефинише као тачка $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ чије су координате

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_S x\rho(x, y, z) dS, \qquad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_S y\rho(x, y, z) dS, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iint_S z\rho(x, y, z) dS.$$

- *Одређивање момента инерције криве*

Ако је $d(x, y, z)$ растојање тачке (x, y, z) површи S од неке осе L, тада се моменат инерције дефинише са

$$\iint_S d^2(x, y, z) \rho(x, y, z) dS.$$

Моменти инерције у односу на координатне осе означавају се са I_x, I_y, I_z.

Примјер 4.11. Наћи масу површине сфере ако је површинска густоћа у тачки сфере једнака растојању тачке од фиксираног пречника сфере.

Рјешење: Изаберимо координатни систем тако да је z-оса одређена фиксираним пречником сфере и координатни почетак центром сфере. Тада је удаљеност тачке сфере од фиксираног пречника једнака $\sqrt{x^2+y^2}$, тј. $\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$. Тада је

$$m=\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS.$$

Прелазећи на параметарске једначине сфере, добијамо

$$m=R^3\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} sin^2 v dv\right)du=R^3\pi^2. \square$$

4.5. ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ДРУГЕ ВРСТЕ

Нека је S глатка површ представљена помоћу векторске функције

$$\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}, \qquad (u,v) \in D$$

и нека је векторска функција $\boldsymbol{F}$ дефинисана и ограничена на S.

Дефиниција 4.8. Површински интеграл друге врсте векторске функције $\boldsymbol{F}$ по површи S означава се са $\iint_S \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{S}$ или $\iint_S \boldsymbol{F}\,(x,y,z)d\boldsymbol{S}$ и дефинише са

$$\iint_S \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{S} = \iint_D \boldsymbol{F}\big(r(u,v)\big)\cdot \boldsymbol{N}(u,v)\,dudv \tag{4.30}$$

гдје је вектор

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$$

вектор нормале на површи S.

Пошто је

$$\boldsymbol{N}(u,v) = \frac{\boldsymbol{N}(u,v)}{|\boldsymbol{N}(u,v)|}|\boldsymbol{N}(u,v)| = \boldsymbol{n}(u,v)\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|,$$

гдје је $\boldsymbol{n}$ јединични вектор нормале на површ S, (4.30) можемо записати у облику

$$\iint_S \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{S} = \iint_D \boldsymbol{F}\big(r(u,v)\big) \cdot \boldsymbol{n}(u,v)\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv. \tag{4.31}$$

Уочавамо да је интеграл из (4.31) заправо површински интеграл прве врсте скаларне функције $\boldsymbol{F}\big(r(u,v)\big) \cdot \boldsymbol{n}(u,v)$. Дакле

$$\iint_S \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{S} = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS. \tag{4.32}$$

Симбол $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} dS$ означава *векторски елемент површине површи*.

Површински интеграли друге врсте јављају се при одређивању протока кроз površ. Ако посматрамо стационарно протицање флуида при којем брзина v и густина ρ флуида не зависе од времена већ само од положаја у простору, тада површински интеграл

$$\iint_S \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \tag{4.33}$$

представља количину флуида која у јединици времена пролази кроз површ S. Због тога се површински интеграл (4.30) назива **интеграл протока** векторског поља $\boldsymbol{F}$ или само **проток,** односно **флукс** векторског поља $\boldsymbol{F}$ кроз површ S.

Ако је површ задата експлицитно у облику

$$z = f(x,y)$$

њој одговара параметарска репрезентација

$$\boldsymbol{r}(x,y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + f(x,y)\boldsymbol{k}, (x,y) \in D,$$

гдје је D пројекција површи на xy −раван. Тада формула (4.30) добија облик

$$\iint_S \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{S} \quad = \iint_D \left(-F_1 \frac{\partial f}{\partial x} - F_2 \frac{\partial f}{\partial y} + F_3\right) dxdy$$

гдје је $F_i = F_i\big(x, y, f(x,y)\big), i = 1,2,3.$

Ако ставимо $\boldsymbol{F} = F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j} + F_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{n} = N_1\boldsymbol{i} + N_2\boldsymbol{j} + N_3\boldsymbol{k}$ из (4.32) добијамо површински интеграл друге врсте у облику

$$\iint_S \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{S} \; = \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\, dS = \iint_S (F_1N_1 + F_2N_2 + F_3N_3)\, dS =$$

$$\iint_S (F_1 cos\alpha + F_2 cos\beta + F_3 cos\gamma)\, dS \tag{4.34}$$

гдје су α, β и γ углови које вектор $\boldsymbol{n}$ заклапа са векторима $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, респективно.

Примјер 4.12. Израчунати $\iint_S \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{S}$ ако је $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + 3y^2\boldsymbol{j}$ и S дио равни $x + y + z = 1$ из првог октанта.

Рјешење: Можемо узети параметарску репрезентацију равни

$$\boldsymbol{r}(u, v) = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + (1 - u - v)\boldsymbol{k},\ \ 0 \le u \le 1, \qquad 0 \le v \le 1. \tag{4.34$_1$}$$

Даље је

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}) \times (\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

Добијамо

$$\iint_S \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{S} = \iint_G (u^2\boldsymbol{i} + 3v^2\boldsymbol{j}) \cdot (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})\, dudv = \iint_G (u^2 + 3v^2)\, dudv = \frac{1}{3}.$$

Уколико умјесто параметризације (4.34$_1$) узмемо параметризацију

$$\boldsymbol{r}(u, v) = u\boldsymbol{i} + (1 - u - v)\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k},\ \ 0 \le u \le 1, \qquad 0 \le v \le 1 \tag{4.34$_2$}$$

онда добијамо

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}) \times (-\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$

односно

$$\iint_S \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{S} = -\iint_G (u^2 + 3(1 - u - v)^2)\, dudv = -\frac{1}{3}.$$

Дакле узимањем друге параметризације добили смо вриједност интеграла са супротним предзнаком. Наиме, параметризације (4.34_2) не чува оријентацију површи дату параметризацијом (4.34_1) јер је замјеном мјеста другој и трећој координати у (4.34_1) дошло до промјене предзнака испред вектора $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$, тј. до промјене предзнака испред вектора нормале.

Према томе, површински интеграл друге врсте у општем случају зависи од избора вектора нормале површи, тј. од оријентације површи. □

4.5.1. Оријентација површи

Видјели смо у Примјеру 4.12 да површински интеграл друге врсте зависи од избора вектора нормале површи, јер у свакој тачки глатке површи S постоје два јединствена вектора нормале: $\boldsymbol{n}$ и $(-\boldsymbol{n})$. Избор једног од ова два вектора доводи до појма оријентисане површи.

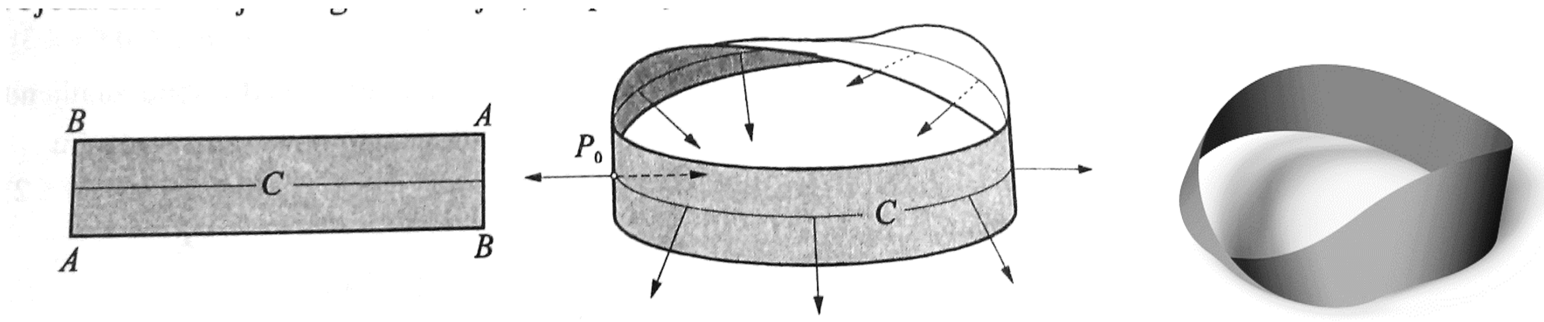
Оријентисана површ је површ на којој је изабран један од два могућа јединична вектора нормале. За глатку површ кажемо да је **позитивно оријентисана** ако је у свакој њеној тачки извршен избор јединичног вектора нормале. Супротан избор одговара **негативној оријентацији површи**.

Кажемо да се глатка површ **може оријентисати** ако се избор вектора нормале у произвољној тачки може наставити на јединствен и непрекидан начин.

Довољно мали дио глатке површи увијек се може оријентисати. Међутим, постоје глатке површи које се не могу оријентисати. Таква је површ нпр. Мебијусова [3] трака.

[3] Augustus Ferdinand Mobius (1790-1868), њемачки математичар и астроном

Модел Мебијусове траке може се направити од правоугаоног комада папира спајањем краћих страна тако да се поклопе двије тачке A и двије тачке B (Слика 4.7). Ако посматрамо вектор нормале у тачки P_0 и ако га помјерамо непрекидно дуж криве C, он ће по повратку у тачку P_0 бити супротан полазном вектору.



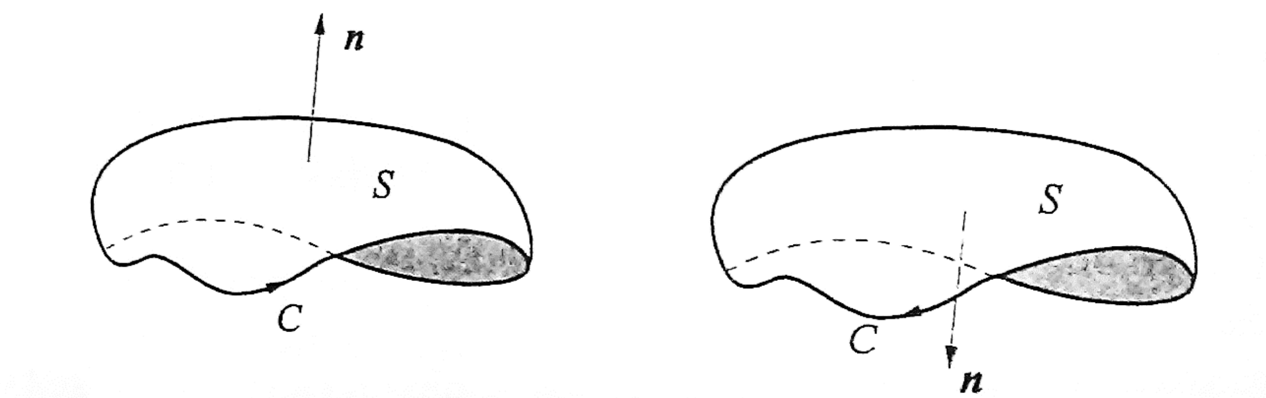
Слика 4.7

Површи које се могу оријентисати имају двије стране које можемо обојити са двије различите боје. Површи које се не могу оријентисати имају само једну страну. Мебијусову траку није могуће обојити са једне стране једном а са друге стране другом бојом.

Површински интеграли друге врсте дефинишу се само по површима које се могу оријентисати. Ако се промијени оријентација површи, тада се мијења знак површинског интеграла друге врсте.

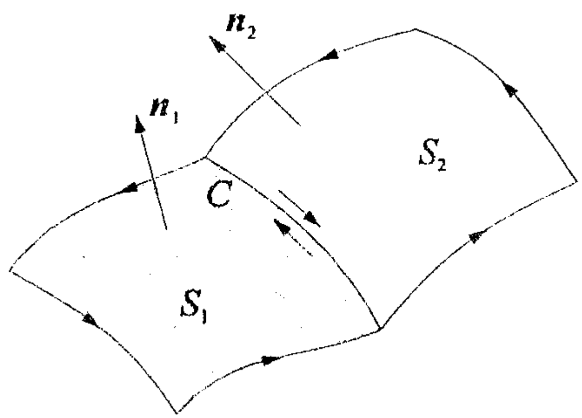
Да бисмо појам оријентације глатке површи проширили на дио по дио глатке површи, потребно је да посматрамо и **оријентацију границе глатке површи у односу на оријентацију површи.**

Ако је граница неке глатке површи S која се може оријентисати једноставна затворена крива $C,$ тада свакој од двије могуће оријентације површи S можемо придружити одговарајућу оријентацију границе C.



Слика 4.8

Када се изабере јединични вектор нормале на површ S, границу површи C треба оријентисати тако да када се гледа са врха вектора нормале, C буде оријентисана у смјеру супротном кретању казаљке на сату. Кажемо да је тада **крива $\boldsymbol{C}$ оријентисана позитивно у односу на оријентацију површи $\boldsymbol{S}$** (Слика 4.8).

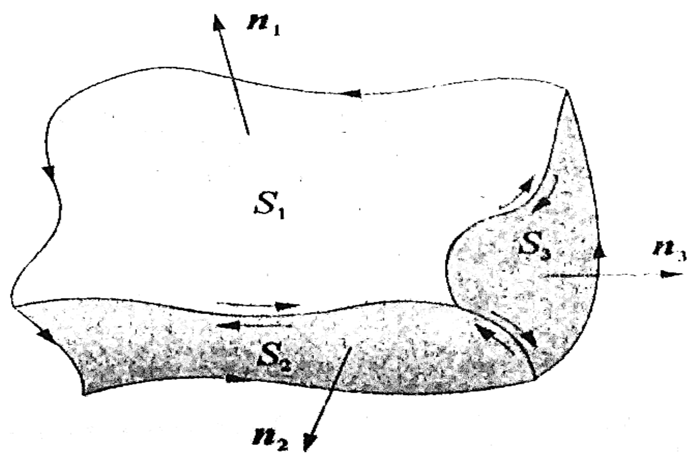


Слика 4.9

Кажемо да се **дио по дио глатка површ S може оријентисати** ако можемо оријентисати сваки њен глатки дио тако да дуж сваке криве C која представља заједничку границу два дијела, нпр. S_1 и S_2, позитивна оријентација криве C у односу на површ S_1 буде супротна позитивној оријентацији криве C у односу на S_2, Слика 4.9.

Свака глатка или дио по дио глатка површ S која представља границу неке тродимензионалне области може се оријентисати.

Једна оријентација се добија избором вектора нормале усмјерених ван области, а друга избором избором вектора нормале усмјерених у област, Слика 4.10.



Слика 4.10

Ако је дио по дио глатка површ S састављена од глатких дијелова $S_1, S_2, \dots, S_n$ који су оријентисани на наприједн наведени начин, тада је

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \iint_{S_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n_1} \, dS + \iint_{S_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n_2} \, dS + \cdots + \iint_{S_n} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_n \, dS,$$

гдје су $\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}, \dots, \boldsymbol{n}_n$ јединични вектори нормале на површи $S_1, S_2, \dots, S_n$.

4.5.2. Свођење површинског интеграла друге врсте на двојни

Површински интеграл друге врсте се своди на двојни, узимајући у обзир оријентацију површи. У ту сврху формулу (4.34) ћемо записати користећи уобичајено ознаке

$$\iint_S F_1 cos\alpha dS = \iint_S F_1 dydz$$
$$\iint_S F_2 cos\beta dS = \iint_S F_2 dxdz$$
$$\iint_S F_3 cos\gamma dS = \iint_S F_3 dxdy.$$

па добијамо

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_S F_1 dydz + F_2 dxdz + F_3 dxdy \,. \tag{4.35}$$ [4]

[4] Формула (4.35) је аналогон одговарајућој формули за криволинијски интеграл друге врсте.

4.5.2. Свођење површинског интеграла друге врсте на двојни

Нека је површ дата експлицитно у облику $z = f(x,y)$ и нека је D пројекција површи у xy −раван. Пошто је $dxdy$ пројекција елемента површи S у xy −раван имамо

$$dxdy = |cos\gamma|dS.$$

Према томе, ако је површ оријентисана тако да је $cos\gamma = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k} > 0$ тада је

$$\iint_S F_3 dxdy = \iint_D F_3(x,y,f(x,y))dxdy$$

а уколико је $cos\gamma = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k} < 0$ тада је

$$\iint_S F_3 dxdy = -\iint_D F_3(x,y,f(x,y))dxdy.$$

Ако је је $cos\gamma = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k} = 0$ тада је

$$\iint_S F_3 dxdy = 0.$$

Примјер 4.13. Израчунати интеграле а) $\iint_S z dx dy$, б) $\iint_S z^2 dx dy$, гдје је S спољашња страна елипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Рјешење: а) Вектор нормале на спољашњој страни елипсоида на горњој половини гради оштар, а на доњој половини тупи угао са вектором $\boldsymbol{k}$. Због тога је

$$\iint_S z dx dy = \iint_{S_1} z dx dy + \iint_{S_2} z dx dy$$

гдје је

$$S_1 : z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}, \qquad S_2 : z = -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Површи S_1и S_2 пројектују се у xy-раван у област D: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$. Пошто је $cos\gamma \geq 0$ на S_1 и $cos\gamma \leq 0$ на S_2 имамо

$$\iint_S z dx dy = c\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} dx dy - c\iint_D \left(-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right) dx dy =$$

$$2c\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} dx dy = \frac{4}{3}abc\pi.$$

б)

$$\iint_S z dx dy = \iint_{S_1} z^2 dx dy + \iint_{S_2} z^2 dx dy =$$

$$c^2 \iint_D (1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}) dx dy - c^2 \iint_D \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dx dy = 0. \square$$

Примјер 4.14. Израчунати проток векторског поља $\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}$ кроз површ S која је граница области из првог октанта ограничене цилиндром

$$x^2 + y^2 = R^2$$

и равнима

$$x = 0, y = 0, z = 0, z = H,$$

оријентисана избором јединичног вектора спољне нормале.

Рјешење: Проток поља $\boldsymbol{F}$ кроз површ S је

$$\Phi = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_S xz dy dz + xy dz dx + yz dx dy.$$

Пошто се површ S састоји од 5 глатких површи имамо

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\sum_{i=1}^{5}\iint_{S_i}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n_i}\,dS$$

гдје је

$$S_1\colon x^2+y^2=R^2, 0\le z\le H, x\ge 0, y\ge 0,$$

$$S_2\colon z=0, x^2+y^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0,$$

$$S_3\colon y=0, 0\le z\le H, x\ge 0,$$

$$S_4\colon x=0, 0\le z\le H, y\ge 0 \text{ и}$$

$$S_4\colon z=H, x^2+y^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0$$

Вектор нормале на S_1 је

$$\boldsymbol{n_1}=\pm\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{R}.$$

Јединични вектор спољне нормале на S_1 гради оштар угао са вектором $\boldsymbol{i}$, **тј.** $\boldsymbol{n_1}\cdot\boldsymbol{i}>0$. Пошто је

$$\boldsymbol{n_1}\cdot\boldsymbol{i}=\pm\frac{x}{R}$$

и $x\ge 0$ на S_1, узимамо вектор нормале $\boldsymbol{n_1}$ са знаком +.

Према томе добијамо површински интеграл прве врсте

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n_1}\, dS = \frac{1}{R} \iint_{S_1} (x^2 z + y^2 x)\, dS.$$

Сводимо површински прве врсте на двојни. Пројектујемо површи S_1 на област D_1 у yz −равани. Тада је D_1 правоугаоник $0 \leq y \leq R, 0 \leq z \leq H$. Пошто је на D_1

$$x = f(y,z) = \sqrt{R^2 - y^2}$$

добијамо

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}}.$$

Сада је

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n_1}\, dS = \frac{1}{R} \iint_{D_1} \left(z(R^2 - y^2) + y^2 \sqrt{R^2 - y^2}\right) \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}}\, dydz =$$

$$\iint_{D_1} \left(z\sqrt{R^2 - y^2} + y^2\right) dydz = \frac{R^2 H^2 \pi}{8} + \frac{R^3 H}{3}.$$

На површи S_2 имамо $\boldsymbol{n_2} = -\boldsymbol{k}$ и добијамо

$$\iint_{S_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n_2}\, dS = -\iint_{S_2} yz\, dS = 0.$$

На површи S_3 имамо $\boldsymbol{n_3} = -\boldsymbol{j}$ и добијамо

$$\iint_{S_3} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n_3}\, dS = -\iint_{S_3} xydzdx = 0.$$

На површи S_4 имамо $\boldsymbol{n_4} = -\boldsymbol{i}$ и добијамо

$$\iint_{S_4} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n_4}\, dS = -\iint_{S_4} xzdydz = 0.$$

На површи S_5 имамо $\boldsymbol{n_5} = \boldsymbol{k}$ и добијамо

$$\iint_{S_5} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n_5}\, dS = \iint_{S_5} yz\, dS = H \iint_{D_5} ydxdy = \frac{R^3 H}{3}.$$

Дакле,

$$\Phi = \frac{R^2 H^2 \pi}{8} + \frac{2R^3 H}{3}. \square$$

4.6. ТЕОРЕМА О ДИВЕРГЕНЦИЈИ

Видјели смо у Примјеру 4.14 да је рачунање површинских интеграла друге врсте по површима које су састављене од више глатких површи често рачунски захтјевно. Доказаћемо **формулу Остроградског** [5] или **Остроградски-Гаус формулу** која под одређеним условима омогућава рачунање површинских интеграла помоћу тројног интеграла, што може да поједностави рачунање површинских интеграла по затвореним површима које су састављене од више глатких површи.

Ова формула даје везу између тројних интеграла по тродимензионалној области и површинског интеграла по граници те области и представља аналогон Гринове теореме која даје везу између двојног интеграла по области и криволинијског инетеграла по граници те области.

Теорема 4.2. (Теорема о дивергенцији) Нека је T затворена ограничена област у простору чија је граница дио по дио глатка површ S и нека је $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ векторска функција која је дефинисана и непрекидно-диференцијабилна у некој области која садржи T. Тада је

$$\iiint_T div\boldsymbol{F}\, dxdydz = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \tag{4.36}$$

гдје је $\boldsymbol{n}$ спољни јединични вектор нормале на површ S.

[5] Михаил Васильевич Остроградский (1801-1861), руски математичар

Доказ: Користећи (4.34), формулу (4.36) можемо записати у облику

$$\iiint_T div\boldsymbol{F}\, dxdydz = \iint_S (F_1 cos\alpha + F_2 cos\beta + F_3 cos\gamma)\, dS \tag{4.37}$$

гдје су α, β и γ углови које вектор $\boldsymbol{n}$ заклапа са векторима $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, респективно. Из (4.37) добијамо да је за доказ формуле (4.36) довољно доказати да вриједе формуле

$$\iiint_T \frac{\partial F_1}{\partial x} dxdydz = \iint_S F_1 cos\alpha\, dS \tag{4.38}$$

$$\iiint_T \frac{\partial F_2}{\partial y} dxdydz = \iint_S F_2 cos\beta\, dS \tag{4.39}$$

$$\iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z} dxdydz = \iint_S F_3 cos\gamma\, dS. \tag{4.40}$$

Доказаћемо формулу за специјалну област T која се може представити у облику

$$T = \{(x, y, z): g(x, y) \leq z \leq h(x, y), (x, y) \in D\} \tag{4.41}$$

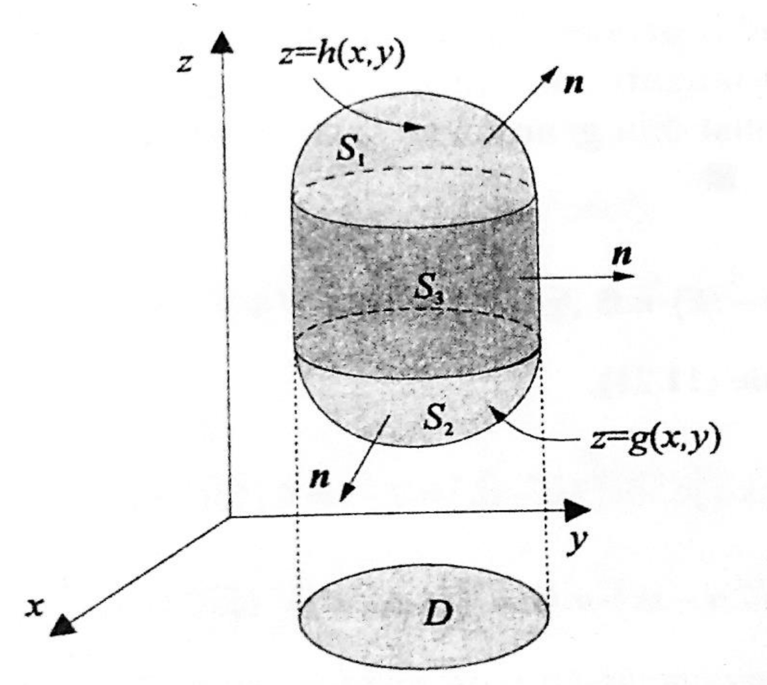
Граница S области T се састоји од горње површи S_1 која је дата експлицитно у облику

$$z = h(x, y),$$

доње површи S_2 која је дата експлицитно у облику

$$z = g(x, y)$$

и од вертикалног дијела S_3 који може да дегенерише у криву, нпр. код сфере (Слика 4.11).



Слика 4.11

За вектор нормале на површи S_1 имамо

$$\boldsymbol{n_1} \cdot \boldsymbol{k} \geq 0,$$

на површ S_2 је

$$\boldsymbol{n_2} \cdot \boldsymbol{k} \leq 0$$

и на површ S_3 је

$$\boldsymbol{n_3} \cdot \boldsymbol{k} = 0.$$

Докажимо сада једнакост (4.40) за област (4.41). Имамо

$$\iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z} dxdydz = \iint_D \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right) dxdy = \iint_D (F_3(x,y,h(x,y)) - F_3(x,y,g(x,y)))dxdy. \tag{4.42}$$

С друге стране, за површински интеграл из (4.40) имамо

$$\iint_S F_3 cos\gamma \, dS = \sum_{i=1}^{3} \iint_{S_i} F_3 cos\gamma \, dS.$$

Пошто је $\boldsymbol{n_3} \cdot \boldsymbol{k} = 0$ добијамо да је интеграл по S_3 једнак нули. Према томе имамо

$$\iint_S F_3 cos\gamma \, dS = + \iint_D F_3(x,y,h(x,y)) \, dxdy - \iint_D F_3(x,y,g(x,y)) \, dxdy$$

односно добијамо (4.42) па је доказана формула (4.40).

На сличан начин, записујући област T преко пројекција на xz, односно yz −раван, доказујемо и формуле (4.38) и (4.39).

Ако се област T може подијелити на коначно много специјалних области, тада се теорема доказује сабирањем резултата који се односе на дијелове области T. Површински интеграли по површима којима је област T подијељена на специјалне области се поништавају због супротне оријентације, тако да остаје само површински интеграл по граници области T.

Доказ за произвољну област, ограничену са дио по дио глатком површи, је сложенији и не наводимо га. □

Формула (4.36) се назива **формула Остроградског или Остроградски-Гаус формула**.

Формула Остроградског се може користити за рачунање запремине. Стављајући нпр. у формулу (4.36) $F_1 = x, F_2 = F_3 = 0$ добијамо

$$\mu(T) = \iint_S x\, dydz.$$

Такође је

$$\mu(T) = \iint_S ydxdz = \iint_S zdxdy.$$

Примјер 4.15. Примјеном теореме о дивергенцији израчунати

$$\iint_S xzdydz + xydzdx + yzdxdy$$

ако је S граница области из првог октанта ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$ и равнима $x = 0, y = 0, z = 0, z = H$ оријентисана избором јединичног вектора спољне нормале (видјети Примјер 4.14).

Рјешење: Имамо

$$\iint_S xzdydz + xydzdx + yzdxdy = \iiint_T (z + x + y)\, dxdydz =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \rho d\rho \int_0^H (z + \rho(cos\varphi + sin\varphi))\, dz = \frac{R^2H^2\pi}{8} + \frac{2R^3H}{3}. \square$$

Сада ћемо показати како се **примјеном теореме о диверегенцији може дефинисати дивергенција векторског поља** независно од избора правоуглог координатног система. Имамо

$$div\boldsymbol{F}(P) = \lim_{d(T)\to 0} \frac{1}{\mu(T)} \iint_{S(T)} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \tag{4.43}$$

гдје је $\mu(T)$ запремина области T, $d(T)$ максимално растојање тачака области T од тачке P и $S(T)$ гранична površ области T. Према томе, **дивергенција је независна од избора правоуглог координатног система.**

ИЗ (4.43) добијамо физичку интерпретацију диверегенције поља. Ако посматрамо стационарно протицање нестишљивог флуида са константном густином $\rho = 1$ и брзином $\boldsymbol{v}$ тада (видјети (4.33)) површински интеграл

$$\iint_{S} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \tag{4.44}$$

представља количину флуида која у јединици времена пролази кроз површ S.

Ако је $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} < 0$ тада флуид кроз површ S улази у T, а ако је $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} > 0$ тада флуид кроз површ S излази из T. Ако је $\mu(T)$ запремина области T тада

$$\frac{1}{\mu(T)} \iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \tag{4.45}$$

представља просјечан проток кроз површ S. Пошто је протицање стационарно и флуид нестишљив, количина флуида која излази из T мора се стално надомјештати. Ако је интеграл (4.45) различит од нуле, то значи да у T постоје тачке у којима флуид настаје или нестаје, односно **извори** или **понори (негативни извори).**

Ако се T стеже у фиксирану тачку P области T, тада добијамо **јачину извора** у P. Користећи (4.43) добијамо да **дивергенција вектора брзине $\boldsymbol{v}$ стационарног протицања нестишљивог флуида представља јачину извора у одговарајућој тачки,** тј. јачина извора у P је

$$div\boldsymbol{v}(P) = \lim_{d(T)\to 0} \frac{1}{\mu(T)} \iint_{S(T)} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, dS. \tag{4.46}$$

Ако је јачина извора у некој тачки једнака нули, кажемо да у тој тачки нема извора.

Из формуле (4.46) добијамо да **у $\boldsymbol{T}$ нема извора ако и само ако је $\boldsymbol{div\,v = 0}$ у $\boldsymbol{T}$**. Тада је и интеграл (4.44) једнак нули. Ако је вриједност интеграла (4.44) позитивна, то значи да у области T постоји извор јер је из области T изашло више флуида него што је у њу ушло. Ако је вриједност интеграла (4.44) негативна, то значи да у области T постоји понор (негативан извор), јер је у област T ушло више флуида него што је из ње изашло (дио флуида се губи).

4.7. СТОКСОВА ТЕОРЕМА

Гринова формула

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C F_1 dx + F_2 dy$$

гдје је D област у $xy -$ равни ограничена позитивно оријентисаном кривом $C,$ може се написати у облику

$$\iint_D (rot\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{k}\, dxdy = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{4.47}$$

гдје је $\boldsymbol{F} = F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j}$. Формула (4.47) трансформише криволинијски интеграл у двојни и обрнуто.

Доказаћемо сада Стоксову теорему [6] која површински интеграл по површи под одређеним условима трансформише у криволинијски интеграл по кривој која представља границу те површи.

[6] George Gabriel Stokes (1819-1903), ирски математичар и физичар

Теорема 4.3. (Стоксова теорема) Нека је S дио по дио глатка површ у простору чија је граница дио по дио глатка једноставна затворена крива C. Нека је $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ непрекидна векторска функција која има непрекидне парцијалне изводе у некој области у простору која садржи површ S. Тада је

$$\iint_S (rot\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{4.48}$$

гдје је $\boldsymbol{n}$ јединични вектор нормале на површ S. Крива C је оријентисана позитивно у односу на оријентацију површи S.

Доказ: Формула (4.48) се може записати у облику

$$\iint_S \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy =$$

$$\oint_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \tag{4.49}$$

Сада ћемо површински интеграл свести на двојни, а затим помоћу Гринове теореме на криволинијски.

Имамо

$$\iint_S (rot\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_D (rot\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{N}\, dudv$$

гдје је D област из uv −равни таква да је $S = \boldsymbol{r}(D)$ и $\boldsymbol{N} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = N_1\boldsymbol{i} + N_2\boldsymbol{j} + N_3\boldsymbol{k}$.

Одавде користећи (4.47) добијамо

$$\iint_D (rot\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{N}\, dudv = \oint_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

гдје је Γ граница области D. Сада из (4.49) добијамо формулу

$$\iint_D \left(\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) N_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) N_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) N_3 \right) dudv =$$

$$\oint_\Gamma F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz. \qquad (4.50)$$

Доказујемо сљедеће три формуле:

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} N_2 - \frac{\partial F_1}{\partial y} N_3\right) dudv = \oint_\Gamma F_1 dx$$
$$\iint_D \left(-\frac{\partial F_2}{\partial z} N_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x} N_3\right) dudv = \oint_\Gamma F_2 dy \tag{4.51}$$
$$\iint_D \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} N_1 - \frac{\partial F_3}{\partial x} N_3\right) dudv = \oint_\Gamma F_3 dz.$$

Формуле (4.51) доказујемо уз претпоставку да се површ S може представити у облику

$$a)\ z = f(x, y), \qquad \text{б})\ y = g(x, z), \qquad v)\ x = h(y, z). \tag{4.52}$$

За доказ прве формуле у (4.51) користимо представљање површи S у облику (4.52) а). Имамо

$$\boldsymbol{r}(x, y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + f(x, y)\boldsymbol{k}, (x, y) \in D,$$

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

Из $\boldsymbol{N}\cdot\ \boldsymbol{k}=1$ добијамо да $\boldsymbol{N}$ гради оштар угао са $\boldsymbol{k}$, па је

$$\iint_D\left(-\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy.$$

Пошто је

$$\frac{\partial F_1(x,y,f(x,y))}{\partial y}=\frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}$$

добијамо

$$\iint_D\left(-\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy=-\iint_D\frac{\partial F_1\big(x,y,f(x,y)\big)}{\partial y}dxdy=\oint_\Gamma F_1dx.$$

На исти начин се доказују и друге двије формуле из (4.51).

Доказали смо резултат за површи облика (4.52). Овај резултат се може искористити за доказ теореме у случају када се површ може подијелити на коначно много површи облика (4.52). Теорема се може доказати и за општије површи али се оне у пракси ријетко јављају па доказ не наводимо. □

Примјер 4.16. Израчунати $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ ако је C кружница $x^2+y^2=4$, $z=-3$ оријентисана у смјеру супротном кретању казаљке на сату ако се гледа из координатног почетка и

$$\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}+xz^3\boldsymbol{j}-zy^3\boldsymbol{k}.$$

Рјешење: За примјену Стоксове теореме узимамо за S круг $x^2+y^2\leq 4$ у равни $z=-3$. Тада је $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}$ па је

$$rot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}=z^3-1$$

и добијамо

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\iint_S (z^3-1)dS=-28\iint_S dS=-112\pi\,.\square$$

4.8. УСЛОВИ НЕЗАВИСНОСТИ КРИВОЛИНИЈСКОГ ИНТЕГРАЛА ОД ПУТАЊЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ

Посматрамо криволинијски интеграл друге врсте

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \tag{4.53}$$

Претпостављамо да су функције F_1, F_2, F_3 дефинисане и непрекидне у области D у простору.

Кажемо да је криволинијски интеграл (4.53) **независан од путање интеграције** из D ако за сваки пар крајњих тачака A и B из D интеграл има исту вриједност за сваку путању C из D која спаја тачке A и B.

У том случају, вриједност криволинијског интеграла зависи само од крајњих тачака A и $B,$ и не зависи од избора криве која спаја те тачке.

Дефиниција 4.9. Израз облика

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \tag{4.54}$$

назива се **диференцијална форма** првог реда са три промјенљиве. Кажемо да је диференцијална форма (4.54) **егзактна** у D ако она представља диференцијал

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

неке функције f у области D, тј. ако је

$$df = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

Дакле, диференцијална форма (4.54) егзактна у D ако и само ако векторска функција

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\boldsymbol{i} + F_2(x, y, z)\boldsymbol{j} + F_3(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

представља градијент неке скаларне функције из D, тј. ако је

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = grad f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Доказаћемо да егзактност дифренцијалне форме представља потребан и довољан услов за независност интеграла од путање интеграције.

Теорема 4.4. Нека су функције $F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)$ дефинисане и непрекидне у некој области у простору D. Криволинијски интеграл друге врсте (4.53) не зависи од путање интеграције ако и само ако је диференцијална форма (4.54) егзактна у D.

Доказ: Претпоставимо да интеграл (4.53) не зависи од путање интеграције и изаберимо произвољну тачку $A(x_0,y_0,z_0)$ из D. Дефинишимо функцију

$$f(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}F_1(t,y,z)dt+\int_{y_0}^{y}F_2(x_0,t,z)dt+\int_{z_0}^{z}F_3(x_0,y_0,t)dt+f_0 \tag{4.55}$$

гдје је f_0 константа и $B(x,y,z)$ тачка из области D. Тада је

$$\frac{\partial f}{\partial x}=F_1(x,y,z),\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=F_2(x,y,z),\qquad \frac{\partial f}{\partial z}=F_3(x,y,z) \tag{4.56}$$

тј.

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=gradf=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

па је диференцијална форма (4.54) егзактна. (Видјети доказ Теореме 2.4. из Скаларна и векторска поља, стр. 65.)

Обрнуто, ако је диференцијална форма (4.54) егзактна, тада за неку функцију f вриједе релације (4.56). Нека је C произвољна путања од A до B у D и нека је

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}, \quad t_0 \le t \le t_1$$

једна њена параметарска репрезентација, при чему је $A = r(t_0)$ и $B = r(t_1)$.Тада је

$$\int_A^B F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_A^B \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \int_{t_0}^{t_1} \frac{df}{dt} dt = \left. f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\right|_{t_0}^{t_1} = f(B) - f(A)$$

што значи да вриједност интеграла зависи само од крајњих тачака а не и од путање C. □

Нека је $\boldsymbol{F} = gradf$. Тада формула

$$\int_A^B F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = f(B) - f(A), \tag{4.57}$$

представља **аналогон Њутн-Лајбницовој формули за одређене интеграле**. Формула (4.57) се примјењује увијек када је криволинијски интеграл независан од путање интеграције.

Карактеризацију независности интеграла од путање интеграције даје и сљедећа теорема.

Теорема 4.5. Нека су функције $F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)$ дефинисане и непрекидне у тродимензионалној области у простору D. Криволинијски интеграл друге врсте (4.53) не зависи од путање интеграције ако и само ако је он једнак нули по свакој једноставној затвореној кривој C из D. □

Испитивање егзактности диференцијалне форме у општем случају није једноставно. Зато ћемо одредити критеријум за испитивање егзактности диференцијалне форме под знаком интеграла у једноструко повезаним областима.

Кажемо да је тродимензионална област D **једноструко повезана** ако за сваку затворену криву C из D постоји дио по дио глатка површ у области D чија је граница крива C. Једноструко повезане области су: цијели простор, унутрашњост сфере или паралелепипеда. Примјер области која није једноструко повезана је торус.

Теорема 4.6. Нека је $\boldsymbol{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\boldsymbol{i} + F_2(x,y,z)\boldsymbol{j} + F_3(x,y,z)\boldsymbol{k}$ и нека су функције F_1, F_2, F_3 непрекидно-диференцијабилне функције у некој области у простору D. Ако криволинијски интеграл

$$\oint_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \tag{4.58}$$

не зависи од путање интеграције C из D тада је

$$rot\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}. \tag{4.59}$$

Ако је D једноструко повезана област и ако у D важи (4.59) тада интеграл (4.53) не зависи од путање из D, тј. диференцијална форма (4.54) је егзактна у D. □

Према томе, ако су $F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)$ непрекидно-диференцијабилне функције у једноструко повезаној области D у простору и ако је $rot\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$, тада је диференцијална форма

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

егзактна у D. Услов да је D једноструко повезана област не може се изоставити. [7]

[7] Ако је нпр. $F_1 = -\frac{y}{x^2+y^2}, F_2 = \frac{x}{x^2+y^2}, F_3 = 0$ и D двоструко повезана област $D: \frac{1}{2} < x^2 + y^2 < \frac{3}{2}$, тада је $rot\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$. Ако би интеграл $\oint_C F_1 dx + F_2 dy$ био независан од путање интеграције тада би он био једнак нули по свакој затвореној кривој из D. Међутим, ако за C узмемо јединичну кружницу оријентисану супротно кретању казаљке на сату, добијамо да је $\oint_C F_1 dx + F_2 dy = 2\pi$.

Ако је поље $\boldsymbol{F}$ потенцијално у области D у простору, тада је

$$\boldsymbol{F} = gradf \text{ и } rot\boldsymbol{F} = rot(gradf) = \mathbf{0}$$

у D, па из Теореме 4.6 добијамо да интеграл

$$\int_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

не зависи од путање C из D.

Одавде и из Теореме 4.5 добијамо да је интеграл потенцијалног поља једнак нули по свакој једноставној затвореној кривој C из D. Дакле, рад који се врши при помјерању материјалне тачке по произвољној затвореној кривој у потенцијалном пољу силе једнак је нули и механичка енергија се не троши.

Примјер 4.17. Доказати да интеграл

$$\int_{(0,-1,-1)}^{(\pi,3,2)} cosxdx + zdy + ydz$$

не зависи од путање интеграције а затим га израчунати.

Рјешење: $\boldsymbol{F}(x,y,z) = cosx\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$, $rot\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ па на основу Теорме 4.6 интеграл не зависи од путање која спаја тачке $(0,-1,-1)$ и $(\pi, 3,2)$. Потенцијал поља $\boldsymbol{F}$ је

$$f(x,y,z) = \int_0^x costdt + \int_0^y zdt + \int_0^z 0dt + c = sinx + yz + c$$

па је

$$\int_{(0,-1,-1)}^{(\pi,3,2)} cosxdx + zdy + ydz = f(\pi, 3,2) - f(0,-1,-1) = 5. \square$$