УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 3- ПРЕДАВАЊА

Академска 2017/2018

ТЕМА 1: ВЕКТОРСКА АНАЛИЗА

1. **Векторске функције**
2. **Скаларна и векторска поља**

ЛИТЕРАТУРА: **Момир В. Ћелић, Математика II,** Машински факултет, Бања Лука, 1997[1]

Наставник: Биљана Војводић

[1] У припреми предавања коришћена је и књига **Математика, Милош Томић** (Свјетлост, Сарајево, 1988)

1. ВЕКТОРСКЕ ФУНКЦИЈЕ

1.1. ГРАНИЧНА ВРИЈЕДНОСТ И НЕПРЕКИДНОСТ ВЕКТОРСКЕ ФУНКЦИЈЕ

Нека је O фиксирана тачка тродимензионалног векторског простора E, V скуп свих радијус-вектора тачака простора E које имају почетак у тачки O и $S = (O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ десни правоугли координатни систем у E.

- ✓ Кажемо да је функција
$$\boldsymbol{a}: T \to V,$$
где је $T \subseteq \mathbb{R}$, **векторска функција** скаларног аргумента.

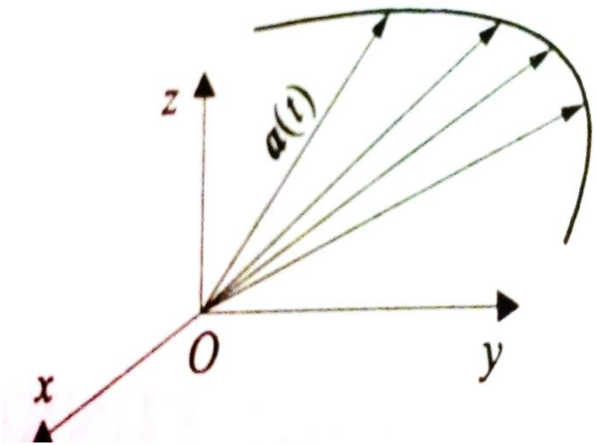
- ✓ За функцију $f: T \to \mathbb{R}$ кажемо да је **скаларна функција.**

Векторска функција се задаје помоћу три скаларне функције које представљају њене координате: $a_1 = a_1(t)$, $a_2 = a_2(t)$, $a_3 = a_3(t), t \in T$, односно

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{t}) = a_1(t)\boldsymbol{i} + a_2(t)\boldsymbol{j} + a_3(t)\boldsymbol{k} = \big(a_1(t), a_2(t), a_3(t)\big), t \in T.$$

- ✓ Уколико је $T \subseteq \mathbb{R}^{\mathbf{n}}, n > 1$, тада је векторска функција $\boldsymbol{a}: T \to V$ векторска функција n аргумената $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t_1, t_2, \dots, t_n)$.

- ✓ **Ходограф** векторске функције $\boldsymbol{a}(t), t \in T$, је геометријско мјесто врхова свих вектора $\boldsymbol{a}(t), t \in T$ чији се почетак налази у O.



- ✓ Појам ходографа је уопштење појма графика скаларне функције.

Нека је векторска функција $\boldsymbol{a}(t)$ скаларног аргумента t дефинисана у некој околини тачке t_0, осим евентуално у самој тачки t_0.

Дефиниција 1.1. Кажемо да је тачка $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{V}$ гранична вриједност векторске функције $\boldsymbol{a}(t)$ у тачки t_0 ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такав да за свако $t \neq t_0$ за које је $|t - t_0| < \delta$ вриједи

$$|\boldsymbol{a}(t) - \boldsymbol{A}| < \varepsilon.$$[2]

Пишемо

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{A}.$$

[2] $|\boldsymbol{a}|$ је дужина (модуо) вектора $\boldsymbol{a}$

Нека је

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{t}) = a_1(t)\boldsymbol{i} + a_2(t)\boldsymbol{j} + a_3(t)\boldsymbol{k} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k}.$$

Пошто је

$$|\boldsymbol{a}(t) - \boldsymbol{A}|^2 = (a_1(t) - A_1)^2 + (a_2(t) - A_2)^2 + (a_3(t) - A_3)^2$$

добијамо да је

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{A} \text{ ако и само ако је } \lim_{t\to t_0} a_i(t) = A_i, i = 1,2,3.$$

Дакле,

$$\lim_{t\to t_0}(a_1(t)\boldsymbol{i} + a_2(t)\boldsymbol{j} + a_3(t)\boldsymbol{k}) = \lim_{t\to t_0} a_1(t)\boldsymbol{i} + \lim_{t\to t_0} a_2(t)\boldsymbol{j} + \lim_{t\to t_0} a_3(t)\boldsymbol{k} \tag{1.1}$$

па се одређивање граничне вриједности векторске функције своди на одређивање граничних вриједности њених координата.

Примјер 1.1. Израчунати граничну вриједност векторске функције

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{sint}{t-\pi}\boldsymbol{i} + \frac{1+cost}{t}\boldsymbol{j} + \frac{t}{\pi}\boldsymbol{k}$$

у тачки $t = \pi$.

Рјешење: Користећи (1.1) добијамо

$$\lim_{t\to\pi} \boldsymbol{a}(t) = \lim_{t\to\pi}\frac{sint}{t-\pi}\boldsymbol{i} + \lim_{t\to\pi}\frac{1+cost}{t}\boldsymbol{j} + \lim_{t\to\pi}\frac{t}{\pi}\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}. \square$$

Нека је је векторска функција $\boldsymbol{a}(t)$ дефинисана у околини тачке t_0.

Дефиниција 1.2. Кажемо да је векторска функција $\boldsymbol{a}(t)$ **непрекидна** у тачки t_0 ако је

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}(t_0).$$

Векторска функција $\boldsymbol{a}(t)$ је **непрекидна на $\boldsymbol{T}$** ако је она непрекидна у свим тачкама скупа T.

На основу (1.1) слиједи да је векторска функција $\boldsymbol{a}(t)$ непрекидна у тачки t_0 ако и само ако су њене координате $a_i(t), i = 1,2,3$ непрекидне у тачки t_0.

1.2. ИЗВОД ВЕКТОРСКЕ ФУНКЦИЈЕ

Нека је векторска функција $\boldsymbol{a}(t)$ дефинисана у некој околини тачке t.

Дефиниција 1.3. Кажемо да је векторска функција $\boldsymbol{a}(t)$ **диференцијабилна** у тачки t ако постоји гранична вриједност

$$\boldsymbol{a}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t) - \boldsymbol{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{a}(t)}{\Delta t}.$$

Вектор $\boldsymbol{a}'(t)$ се назива **извод** векторске функције $\boldsymbol{a}(t)$ у тачки t. Користи и ознака $\frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt}$.

Пошто је

$$\frac{\Delta \boldsymbol{a}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta a_1(t)}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta a_2(t)}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta a_3(t)}{\Delta t}\boldsymbol{k}$$

добијамо да су координате вектора $\boldsymbol{a}'(t)$ изводи скаларних функција $a_i(t), i = 1,2,3$, тј.

$$\boldsymbol{a}'(t) = a_1{}'(t)\boldsymbol{i} + a_2{}'(t)\boldsymbol{j} + a_3{}'(t)\boldsymbol{k} \tag{1.2}$$

- ✓ Према томе, векторска функција $\boldsymbol{a}(t)$ је диференцијабилна ако и само ако су њене координате диференцијабилне и рачунање извода векторске функције се своди на рачунање извода њених координата.

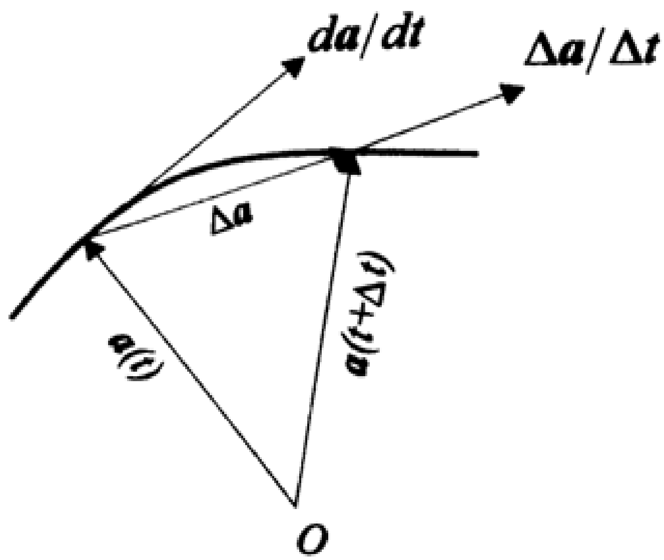
Примјер 1.2. Израчунати извод функције

$$\boldsymbol{a}(t) = 3cost\boldsymbol{i} + 4sint\boldsymbol{j} + 2te^{t}\boldsymbol{k}.$$

Рјешење: Користећи (1.2) добијамо

$$\boldsymbol{a}'(t) = -3sint\boldsymbol{i} + 4cost\boldsymbol{j} + 2(t+1)e^{t}\boldsymbol{k}. \square$$

Извод векторске функције $\boldsymbol{a}(t)$ је вектор $\boldsymbol{a}'(t)$ који има правац тангенте на ходограф те векторске функције у тачки која одговара вектору $\boldsymbol{a}(t)$.



✓ Ако је векторска **функције** $\boldsymbol{a}(t)$ диференцијабилна у тачки t, тада се вектор

$$d\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'(t)dt$$

гдје је $dt = \Delta t$ прираштај аргумента t, назива **диференцијал** векторске функције $\boldsymbol{a}(t)$ у тачки t.

✓ **Правила за диференцирање векторских функција**

1. $\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{0}$ — $\boldsymbol{c}$ је константни вектор

2. $(\alpha \boldsymbol{a})' = \alpha \boldsymbol{a}'$ — α је скалар

3. $(m\boldsymbol{a})' = m'\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{a}'$ — $m = m(t)$ скаларна функција

4. $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})' = \boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}'$

5. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})' = \boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}'$

6. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})' = (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}')$

7. $\left(\boldsymbol{a}\big(u(t)\big)\right)' = \boldsymbol{a}'(u)u'(t)$

✓ Извод векторске функције $\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$ назива се **други извод** (или извод другог реда) векторске функције $\boldsymbol{a}(t)$ и означава се са $\boldsymbol{a}''(t)$ или $\frac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2}$.

✓ Аналогно се дефинише **извод $\boldsymbol{n}$ −тог реда**:

$$\boldsymbol{a}^{(\boldsymbol{n})}(t)=\frac{d^n\boldsymbol{a}}{dt^n}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}\boldsymbol{a}}{dt^{n-1}}\right).$$

✓ Ако постоји извод n −тог реда векторске функције $\boldsymbol{a}(t)$, тада се израз

$$d^n\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^{(\boldsymbol{n})}(t)dt^n$$

назива **диференцијал $\boldsymbol{n}$ −тог реда** те функције.

✓ Ако је $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t_1,t_2,\dots,t_n)$ векторска функција скаларних аргумената $t_1,t_2,\dots,t_n$, тада се могу дефинисати парцијални изводи векторске функције $\boldsymbol{a}$ у односу на аргументе $t_1,t_2,\dots,t_n$:

$$\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial t_l}=\frac{\partial a_1}{\partial t_l}\boldsymbol{i}+\frac{\partial a_2}{\partial t_l}\boldsymbol{j}+\frac{\partial a_3}{\partial t_l}\boldsymbol{k},\qquad l=1,2,\dots n.$$

Аналогно се дефинишу парцијални изводи вишег реда.

Примјер 1.3. Одредити прве парцијалне изводе по x, y, z векторске функције

$$\boldsymbol{a}(x,y,z) = e^{x}\boldsymbol{i} + xe^{y}\boldsymbol{j} + e^{xz}\boldsymbol{k}.$$

Рјешење:

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x} = e^{x}\boldsymbol{i} + e^{y}\boldsymbol{j} + ze^{xz}\boldsymbol{k},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y} = xe^{y}\boldsymbol{j},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z} = xe^{xz}\boldsymbol{k}.$$

Примјер 1.4. Доказати да ако је модуо $|\boldsymbol{a}|$ векторске функције $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$ константан, да су тада вектори $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}'$ ортогонални.

Рјешење: Пошто је модуо $|\boldsymbol{a}|$ векторске функције константан имамо $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^{2} = \boldsymbol{c}$. Одавде диференцирањем и примјеном правила 4. за диференцирање скаларног производа добијамо

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})' = \boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{0}$$

па су вектори $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}'$ ортогонални.

1.3. ИНТЕГРАЛ ВЕКТОРСКЕ ФУНКЦИЈЕ

За векторске функције се, као и за скаларне, могу дефинисати одређени и неодређени интеграли.

1.3.1. Неодређени интеграл

- ✓ Кажемо да је векторска функција $\boldsymbol{A}(t)$ примитивна функција векторске функције $\boldsymbol{a}(t)$ на интервалу T ако је
$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \boldsymbol{a}(t), t \in T.$$
- ✓ Скуп свих примитивних функција функције $\boldsymbol{a}(t)$ назива се неодређени интеграл те векторске функције и означава се са
$$\int \boldsymbol{a}(t)dt.$$
- ✓ Ако је $\boldsymbol{A}(t)$ једна примитивна функција векторске функције $\boldsymbol{a}(t)$, тада је
$$\int \boldsymbol{a}(t)dt = \boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{c},$$
  гдје је $\boldsymbol{c}$ произвољан константни вектор.

Из дефиниције неодређеног интеграла векторске функције добијамо да вриједи:

1. $\int \alpha \boldsymbol{a}(t)dt = \alpha \int \boldsymbol{a}(t)dt,\ \alpha \neq 0$
2. $\int (\boldsymbol{a}(t) + \boldsymbol{b}(t))dt = \int \boldsymbol{a}(t)dt + \int \boldsymbol{b}(t)dt.$

✓ Ако је

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}) = A_1(t)\boldsymbol{i} + A_2(t)\boldsymbol{j} + A_3(t)\boldsymbol{k}$$

примитивна функција векторске функције

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{t}) = a_1(t)\boldsymbol{i} + a_2(t)\boldsymbol{j} + a_3(t)\boldsymbol{k},$$

тада су функције $A_i(t)$ примитивне функције функција $a_i(t), i = 1,2,3.$ Према томе

$$\int \boldsymbol{a}(t)dt = \int a_1(t)dt\ \boldsymbol{i} + \int a_2(t)dt\ \boldsymbol{j} + \int a_3(t)dt\ \boldsymbol{k}, \tag{1.3}$$

односно интеграција векторске функције се своди на интеграцију њених координата.

Примјер 1.5. Израчунати неодређени интеграл векторске функције

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{t}{1+t^2}\boldsymbol{i} + te^{t^2}\boldsymbol{j} + cost\boldsymbol{k}.$$

Рјешење:

$$\int \boldsymbol{a}(t)dt = \int \frac{t}{1+t^2}dt\ \boldsymbol{i} + \int te^{t^2}dt\ \boldsymbol{j} + \int costdt\boldsymbol{k} =$$

$$\frac{1}{2}ln(1+t^2)\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}e^{t^2}\boldsymbol{j} + sint\boldsymbol{k} + \boldsymbol{c}$$

1.3.2. Одређени интеграл

Нека је векторска функција $\boldsymbol{a}(t)$ дефинисана на интервалу $\alpha \leq t \leq \beta$. Подијелимо тај интервал на n дијелова тачкама

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

Нека је

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i = 1,2, \dots n, \quad \lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta t_i\}.$$

Изаберимо на сваком од интервала $t_{i-1} \leq t \leq t_i, i = 1,2, \dots n,$ произвољну тачку τ_i и формирајмо суму

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}(\tau_i) \Delta t_i.$$

Ова сума се назива **интегрална сума** векторске функције $\boldsymbol{a}(t)$ на интервалу $[\alpha, \beta]$ која одговора датој подјели тог интервала и датом избору тачака $\tau_i, i = 1,2, \dots n$.

Ако постоји гранична вриједност $\boldsymbol{I}$ интегралне суме $\boldsymbol{\sigma}$ када $\lambda \to 0$, независно од подјеле интервала $[\alpha, \beta]$ и избора тачака $\tau_i, i = 1,2, \dots n$, тада ту граничну вриједност називамо **одређени интеграл** векторске функције $\boldsymbol{a}(t)$ на интервалу $[\alpha, \beta]$ и означавамо је са

$$\boldsymbol{I} = \int_{\alpha}^{\beta} \boldsymbol{a}(t) dt.$$

Тада кажемо да је векторска функција $\boldsymbol{a}(t)$ **интеграбилна** на интервалу $[\alpha,\beta]$. Дакле,

$$\int_{\alpha}^{\beta}\boldsymbol{a}(t)dt=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}(\tau_i)\Delta t_i.$$

- ✓ Одређени интеграл векторске функције је константни вектор.

- ✓ Ако је $\boldsymbol{A}(t)$ једна примитивна функција векторске функције $\boldsymbol{a}(t)$, тада је

$$\int_{\alpha}^{\beta}\boldsymbol{a}(t)dt=\boldsymbol{A}(\beta)-\boldsymbol{A}(\alpha).$$

Помоћу ове формуле успоставља се веза између одређеног и неодређеног интеграла векторске функције. Ако је $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{t})=a_1(t)\boldsymbol{i}+a_2(t)\boldsymbol{j}+a_3(t)\boldsymbol{k}$ тада је

$$\int_{\alpha}^{\beta}\boldsymbol{a}(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta}a_1(t)dt\,\boldsymbol{i}+\int_{\alpha}^{\beta}a_2(t)dt\,\boldsymbol{j}+\int_{\alpha}^{\beta}a_3(t)dt\,\boldsymbol{k}. \tag{1.4}$$

Примјер 1.6. Израчунати интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{a}(t)dt, \quad \boldsymbol{a}(t) = sin^2 t cost \boldsymbol{i} + cos^2 t \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

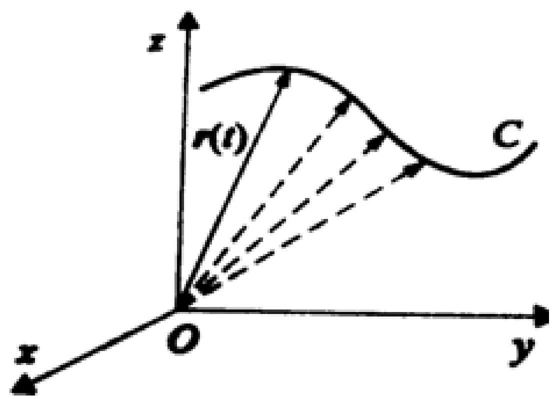
Рјешење:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{a}(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 t costdt\ \boldsymbol{i} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 tdt \boldsymbol{j} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \boldsymbol{k} =$$

$$\frac{sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\ \boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\ \left(t + \frac{1}{2} sin2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\ \boldsymbol{j} + \frac{\pi}{2}\boldsymbol{k} = \frac{1}{3}\boldsymbol{i} + \frac{\pi}{4}\boldsymbol{j} + \frac{\pi}{2}\boldsymbol{k}$$

1.4. КРИВЕ У ПРОСТОРУ

- ✓ Ходограф непрекидне векторске функције дефинисане на неком интервалу $T \subseteq \mathbb{R}$ назива се **крива.**



- ✓ Ако је крива C ходограф векторске функције

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}, \quad a \leq t \leq b, \tag{1.5}$$

тада се та векторска функција назива **репрезентација криве** C.

- Ако је $r(t)$ тачка са радијус-вектором $\boldsymbol{r}(t)$, тада се крива C може представити у облику

$$C = \{r(t) : a \leq t \leq b\}.$$

- Тачка $r(t)$ има координате $(x(t), y(t), z(t))$ па се крива C може представити у облику

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad a \leq t \leq b. \tag{1.6}$$

- Представљање криве C у облику (1.5) или (1.6) назива се и **параметраска репрезентација (параметризација)** криве C, при чему је t параметар те репрезентације.

- Параметарска репрезентација кривих често се користи у механици, гдје крива представља путању (трајекторију) материјалне тачке која у тренутку t пролази кроз положај $r(t)$.

- Крива у простору се може представити и на други начин, на примјер једначинама

$$F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0$$

где свака од ових једначина представља површ, а крива је пресјек тих површи.

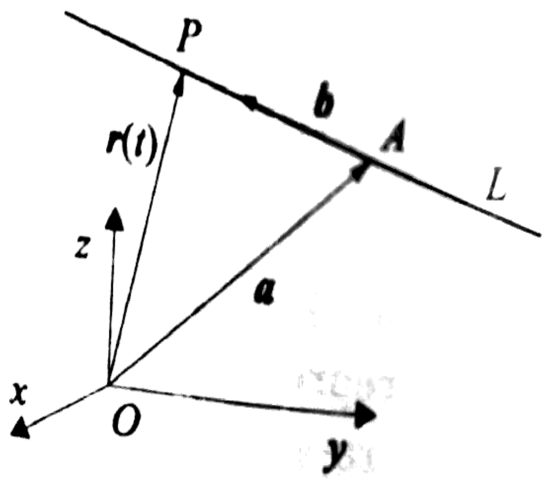
- Крива која се налази у некој равни назива се **раванска крива.**

График непрекидне функције $y = f(x), a \leq x \leq b$ је раванска крива. Она има параметарску репрезентацију

$$x = t, y = f(t), \qquad a \leq t \leq b.$$

Примјер 1.7. Написати једначину праве L која пролази кроз тачку A у правцу вектора $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Рјешење:



Ако је $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ радијус-вектор тачке A, тада је

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}, \quad -\infty < t < \infty$$

радијус-вектор произвољне тачке P са L, односно

$$\boldsymbol{r}(t) = (a_1 + tb_1)\boldsymbol{i} + (a_2 + tb_2)\boldsymbol{j} + (a_3 + tb_3)\boldsymbol{k}. \tag{1.7}$$

Ово је векторска, односно параметарска репрезентација праве L. Ту праву можемо параметарски представити и у облику

$$x(t) = a_1 + tb_1, y(t) = a_2 + tb_2,\ z(t) = a_3 + tb_3,\ -\infty < t < \infty. \tag{1.8}$$

Елиминацијом параметра t из (1.8) добијамо једначину праве L у **симетричном облику**

$$\frac{x - a_1}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2} = \frac{z - a_3}{b_3}. \square \tag{1.9}$$

Примјер 1.8. Одредити параметарску репрезентацију праве која пролази кроз тачке $A(1,2,-1), B(2,-3,4)$.

Рјешење: $\boldsymbol{b} = (1,-5,5), \boldsymbol{a} = (1,2,-1)$ па из (1.7) добијамо

$$\boldsymbol{r}(t) = (1+t)\boldsymbol{i} + (2-5t)\boldsymbol{j} + (-1+5t)\boldsymbol{k}, \qquad -\infty < t < \infty. \square$$

Примјер 1.9. За реалне бројеве $a > 0, b > 0$ векторска функција

$$\boldsymbol{r}(t) = acost\boldsymbol{i} + bsint\boldsymbol{j}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

представља елипсу у xy −равни, са центром у координатном почетку и полуосама a и b. Из једначина

$$x = acost, y = bsint, z = 0, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

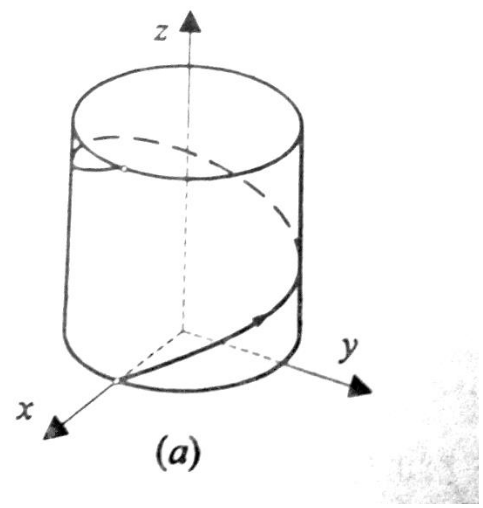
добијамо

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad z = 0.$$

Примјер 1.10. Крива представљена векторском функцијом

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\boldsymbol{i} + a\sin t\boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k}, \qquad a > 0, c \neq 0, \qquad -\infty < t < \infty$$

назива се **кружна завојница**.



Она се налази на цилиндру $x^2 + y^2 = a^2$. □

Примјер 1.11. Одредити параметарску репрезентацију криве

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad x^2 + y^2 = ax, \qquad z \geq 0.$$

Рјешење: Крива C је пресјек полусфере и цилиндра. Из једначине цилиндра

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

добијамо

$$x - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} cost, \qquad y = \frac{a}{2} sint, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

односно

$$x = \frac{a}{2}(1 + cost), \qquad y = \frac{a}{2} sint, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Из једначине сфере за $z \geq 0$ имамо

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}(1 + cost)^2 - \frac{a^2}{4} sin^2 t} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}(1 + cos2t)} =$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{2}(1 - cost)} = \sqrt{a^2 sin^2 \frac{t}{2}} = a \left| sin \frac{t}{2} \right| = asin \frac{t}{2}.$$

Дакле, параметраска репрезентација криве C је

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{a}{2}(1 + cost)\boldsymbol{i} + \frac{a}{2} sint\boldsymbol{j} + asin\frac{t}{2}\boldsymbol{k}, \ \ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Уочимо да уколико уведемо нови параметар $u = \frac{t}{2}$ добијамо параметарску репрезентацију криве C

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(u) = acos^2 u\boldsymbol{i} + 2asinucosu\boldsymbol{j} + asinu\boldsymbol{k}, \ \ 0 \leq u \leq \pi. \square$$

- ✓ Непрекидно пресликавање (1.5) којим је представљена крива C не мора бити обострано јендозначно. Тачке криве C у које се пресликава више тачака са интервала $a \leq t \leq b$ називају се **вишеструке тачке**. То су тачке у којима крива саму себе пресијеца или додирује.

- ✓ Крива која нема вишеструких тачака назива се **једноставна крива.** Кружна завојница из Примјера 1.10 је једноставна крива.

- ✓ Тачка $r(a)$ се назива почетак, а тачка $r(b)$ крај криве $C = \{r(t)\colon a \leq t \leq b\}$. Ако се почетак криве C поклапа са њеним крајем, тј, ако је $r(a) = r(b)$ кажемо да је крива C **затворена крива**.

- ✓ Затворена крива за коју је $r(t) \neq r(a) = r(b)$, $a < t < b$, назива се **једноставна затворена крива.**

Примјер 1.12. Кружница полупречника r са центром у координатном почетку је једноставна затворена крива. Може се представити параметарски у облику

$$C\colon x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

1.5. ТАНГЕНТА, ОРИЈЕНТАЦИЈА И ДУЖИНА КРИВЕ

1.5.1. Тангента криве

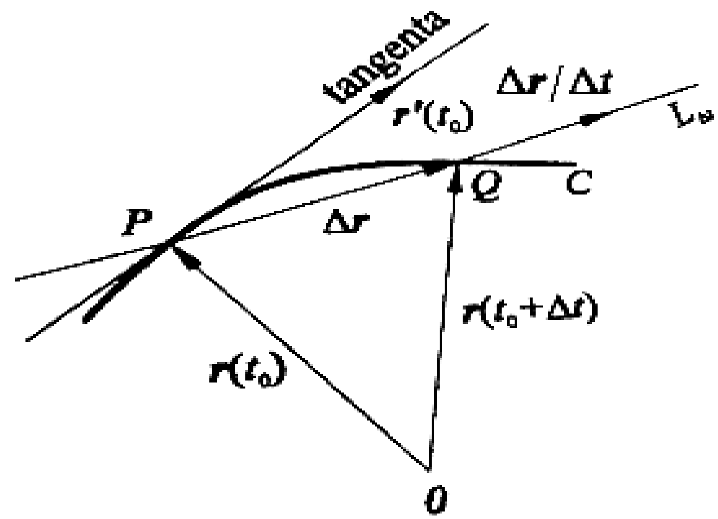
Нека је крива C представљена векторском функцијом

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t),\ a \le t \le b \tag{1.10}$$

и нека су P, Q тачке те криве које одговарају параметрима t_0 и $t_0 + \Delta t$. Права која пролази кроз тачке P и Q назива се сјечица криве C, коју ћемо означити са $L_{\Delta t}$. Тангента криве C у тачки P представља гранични положај сјечице $L_{\Delta t}$ када $\Delta t \to 0$, тј. када Q тежи P дуж криве C.

- ✓ Претпоставимо да је функција (1.10) диференцијабилна у t_0 и да је $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq \boldsymbol{0}$.
- ✓ Вектор $\Delta\boldsymbol{r} = \Delta(t_0 + \Delta t) - \Delta(t_0)$ има правац сјечице $L_{\Delta t}$, па и вектор $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ има правац те сјечице.
- ✓ Векторска функција је диференцијабилна у t_0 и

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \boldsymbol{r}'(t_0) \neq \boldsymbol{0}.$$



✓ Дакле, све сјечице које пролазе кроз тачку P када $\Delta t \to 0$, теже правој која пролази кроз тачку P у правцу вектора $\boldsymbol{r}'(t_0)$. Та права представља тангенту на криву C у тачки P и пошто је $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq \boldsymbol{0}$, та права је једнозначно одређена. Према томе, вектор $\boldsymbol{r}'(t_0)$ има правац тангенте на криву C у тачки P. Вектор

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{r}'(t_0)}{|\boldsymbol{r}'(t_0)|}, \quad \boldsymbol{r}'(t_0) \neq \boldsymbol{0}$$

представља једнични вектор који има правац тангенте на криву C у тачки $P = r(t_0)$ па се назива **јединични тангентни вектор**.

✓ Параметарска репрезентација тангенте у тачки $P = \boldsymbol{r}(t_0)$ је

$$\boldsymbol{q}(u) = \boldsymbol{r}(t_0) + u\boldsymbol{r}'(t_0), -\infty < u < \infty, \tag{1.11}$$

односно

$$x = x(t_0) + x'(t_0)u, y = y(t_0) + y'(t_0)u, \; z = z(t_0) + z'(t_0)u, \quad -\infty < u < \infty. \tag{1.12}$$

✓ Елиминацијом параметра u добијамо тзв. **симетрични облик једначине тангенте**

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}. \tag{1.13}$$

Примјер 1.13. Одредити јединични тангентни вектор и једначину тангенту на криву

$$\boldsymbol{r}(t) = 3cost\boldsymbol{i} + 3sint\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k} \text{ у тачки } P(0,3,2\pi).$$

Рјешење: Из $3cost = 0, 3sint = 3, 4t = 2\pi$ добијамо $t = \frac{\pi}{2}$. Даље је

$$\boldsymbol{r}'(t) = -3sint\boldsymbol{i} + 3cost\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{r}'(t_0)}{|\boldsymbol{r}'(t_0)|} = \frac{-3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k}}{5}.$$

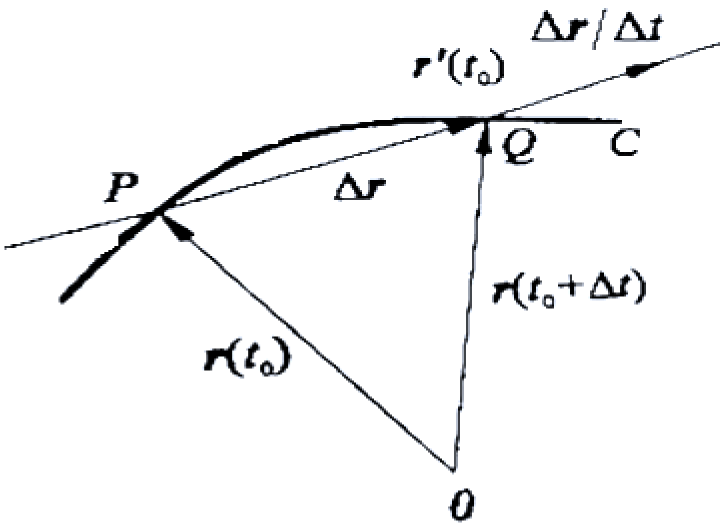
Једаначина тангенте у параметарском облику је

$$x = -3u, y = 3, z = 2\pi + 4u, -\infty < u < \infty,$$

односно у симетричном облику

$$\frac{x}{-3} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-2\pi}{4}\,. \square$$

1.5.2. Оријентација криве



- ✓ Ако је $\Delta t > 0$, вектор $\Delta \boldsymbol{r}$ је усмјерен од тачке са мањом до тачке са већом вриједношћу параметра t, и кажемо да вектор $\Delta \boldsymbol{r}$ одређује смјер у којем параметар на кривој расте.

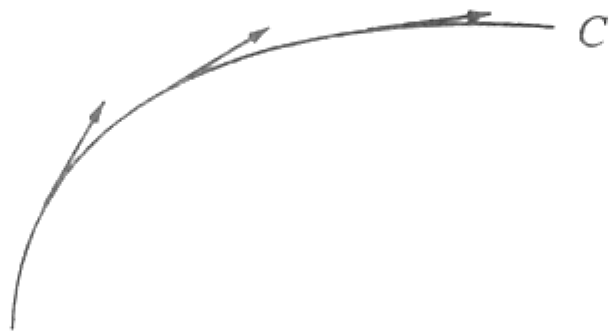
- ✓ У том случају вектор $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ има исти смјер као и $\Delta \boldsymbol{r}$, тј. смјер у којем параметар на кривој расте.

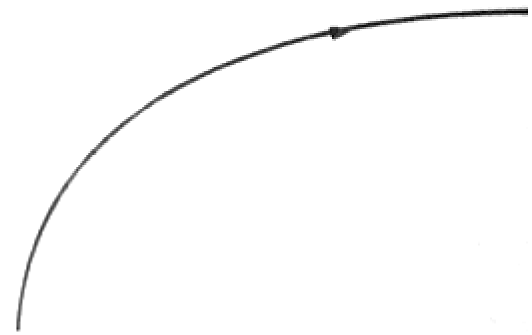
- ✓ Ако је $\Delta t < 0$, вектор $\Delta \boldsymbol{r}$ је усмјерен од тачке са већом до тачке са мањом вриједношћу параметра t, и кажемо да вектор $\Delta \boldsymbol{r}$ одређује смјер у којем параметар на кривој опада. У том случају вектор $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ има супротан смјер у односу на $\Delta \boldsymbol{r}$, па $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ опет показује смјер у којем параметар расте.

- ✓ Према томе вектор $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ увијек показује смјер у којем параметар на кривој расте (**позитиван смјер**), па и вектори $\boldsymbol{r}'(t)$ и $\boldsymbol{t}$ показују позитиван смјер.

- ✓ Кажемо да је крива **позитивно оријентисана** ако је она оријентисана у смјеру раста параметра.

- ✓ Дакле, криву C је могуће оријентисати на два начина: вектору $\boldsymbol{t}$ одговара **позитивна оријентација**, а вектору $(-\boldsymbol{t})$ одговара **негативна оријентација** криве.





1.5.3. Глатке криве

Нека је крива C представљена векторском функцијом

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \qquad a \leq t \leq b$$

која је диференцијабилна на интервалу $[a, b]$.

- ✓ Тачка $r(t)$ криве C у којој је $\boldsymbol{r}'(t) \neq \boldsymbol{0}$ назива се **регуларна тачка**, док је тачка у којој је $\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{0}$ **сингуларна тачка.**

- ✓ Пошто је

$$|\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}$$

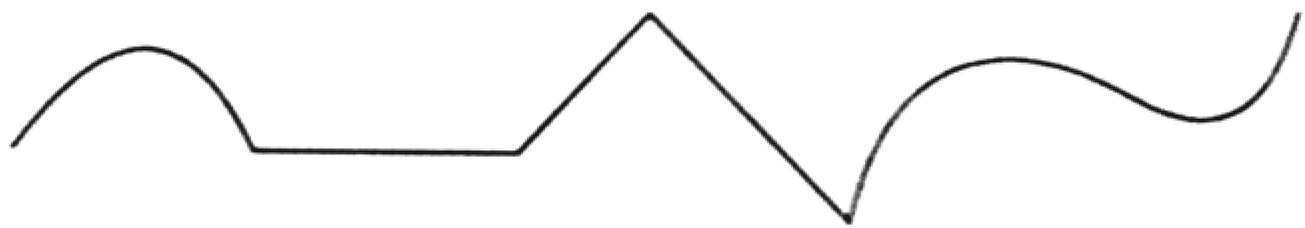
добијамо да је тачка $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ регуларна ако и само ако је

$$\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2 > 0,$$

тј. ако је бар један од извода $x'(t), y'(t), z'(t)$ различит од нуле.

- Кажемо да је крива C **глатка** ако се она може представити помоћу непрекидно-диференцијабилне векторске функције $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), a \leq t \leq b$ за коју је $\boldsymbol{r}'(t) \neq \boldsymbol{0}$ у свакој тачки t. То значи да глатка крива нема сингуларних тачака па у свакој тачки глатке криве постоји тангента.

- Крива састављена од коначног броја глатких кривих назива се **дио по дио глатка крива**. Дио по дио глатка крива нема тангенту у највише коначно много тачака. Те тачке дијеле криву на глатке лукове.



1.5.4. Дужина криве

Нека је крива C представљена векторском функцијом

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \qquad a \leq t \leq b$$

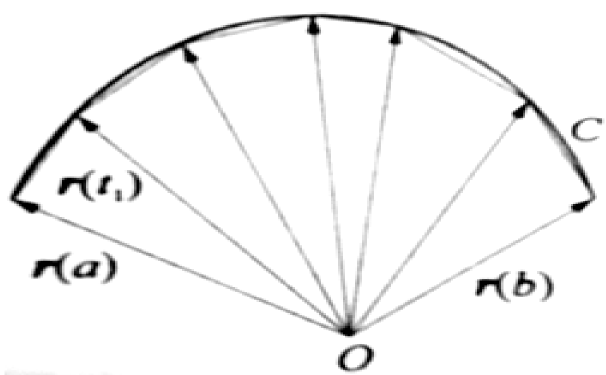
која је диференцијабилна на интервалу $[a, b]$. Подијелимо интервал $a \leq t \leq b$ на n дијелова тачкама

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

и формирајмо суму

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})|.$$

l_n представља дужину изломљене линије уписане у криву C са тјеменима чији су радијус-вектори редом $\boldsymbol{r}(t_0), \ldots, \boldsymbol{r}(t_n)$.



- ✓ Претпостављамо да је подјела интервала таква да максимална од дужина $|\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})|$ тежи нули када $n \to \infty$.
- ✓ Ако је бројни низ $\{l_n\}$ конвергентан, кажемо да је крива C **ректификабилна.**

- ✓ Граничну вриједност

$$l = \lim_{n\to\infty} l_n$$

зовемо **дужина криве.**

- ✓ Ако је векторска функција непрекидно-диференцијабилна, показује се да је тада крива C ректификабилна и да је њена дужина једнака

$$l = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt \tag{1.14}$$

при чему дужина криве не зависи од параметарске репрезентације.

- ✓ Уколико је

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}, \quad a \le t \le b$$

тада је

$$|\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}$$

па из (1.14) добијамо

$$l = \int_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\, dt \tag{1.15}$$

Примјер 1.14. Израчунати дужину лука криве

$$\boldsymbol{r}(t) = e^t cost\boldsymbol{i} + e^t sint\boldsymbol{j}$$

од $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$.

Рјешење: $l = \sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$.

- ✓ Уколико је C график непрекидно-диференцијабилне функције $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, њему одговара параметарска репрезентација

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + f(t)\boldsymbol{j}, \quad a \leq t \leq b,$$

па је из (1.15) дужина тог графика једнака

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(t)\right)^2}\, dt. \tag{1.16}$$

1.5.5. Природна параметризација криве

Ако у формули (1.14) гдје је $\boldsymbol{r}(t)$ непрекидно-диференцијабилна векторска функција, замијенимо фиксну горњу границу b промјенљивом границом t, добијамо интеграл

$$s(t) = \int_a^t |\boldsymbol{r}'(u)|\, du \tag{1.17}$$

Број $s(t_0)$ представља дужину лука криве између тачака $\boldsymbol{r}(a)$ и $\boldsymbol{r}(t_0)$. Из (1.17) добијамо да је

$$s'(t) = |\boldsymbol{r}'(t)| > 0$$

па је $s(t)$ строго растућа и непрекидно-диференцијабилна функција (јер је $\boldsymbol{r}'(t)$ по претпоставци непрекидна функција). Због тога је и њена инверзна функција $t = t(s)$ такође строго растућа и непрекидно-диференцијабилна функција. Смјеном

$$t = t(s)$$

долазимо до нове параметарске репрезентације криве C

$$\boldsymbol{q}(s) = \boldsymbol{r}\big(t(s)\big), \;\; 0 \le s \le l \tag{1.18}$$

Параметарска репрезентација криве C у којој се као параметар јавља дужина луке s назива се **природна параметризација** криве C.

Из (1.18) добијамо

$$\frac{d\boldsymbol{q}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|} = \frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|}$$

па је

$$|\boldsymbol{q}'(s)| = 1.$$

Вектор $\boldsymbol{q}'(s)$ је тангентни вектор криве C и то **јединични тангентни вектор**

$$\boldsymbol{t}(s) = \boldsymbol{q}'(s).$$

Примјер 1.15. Одредити природну параметризацију кружне завојнице

$$\boldsymbol{r}(t) = acost\boldsymbol{i} + asint\boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k}, \qquad a > 0, c \neq 0.$$

Рјешење:

$$\boldsymbol{r}'(t) = -asint\boldsymbol{i} + acost\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}, \qquad |\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{a^2 + c^2},$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + c^2}\, du = \sqrt{a^2 + c^2}\, t.$$

Одавде је $t = \frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}}$ па добијамо

$$\boldsymbol{q}(s) = acos\frac{s}{\sqrt{a^2 + c^2}}\boldsymbol{i} + asin\frac{s}{\sqrt{a^2 + c^2}}\boldsymbol{j} + c\frac{s}{\sqrt{a^2 + c^2}}\boldsymbol{k}. \tag{1.19}$$

Примјер 1.16. Природна параметризација кружнице са центром у координатном почетку и полупречника a је

$$\boldsymbol{q}(s) = a\cos\frac{s}{a}\boldsymbol{i} + a\sin\frac{s}{a}\boldsymbol{j}, \qquad 0 \leq s \leq 2\pi a.$$

Позитивна оријентација ове кружнице која одговара расту параметра s је **оријентација кружнице у смјеру супротном кретању казаљке на сату**. Оријентација кружнице у смјеру кретања казаљке на сату је **негативна оријентација**.

Параметризацију кружнице можемо добити и из природне параметризације кружне завојнице (1.19) за $c = 0$.

1.6. КРИВИНА И ТОРЗИЈА КРИВЕ

Нека је C крива у простору и нека је је $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ њена природна параметризација. Претпоставимо да је векторска функција $\boldsymbol{r}(s)$ два пута диференцијабилна. Показали смо у поглављу 1.5.5. да је

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{t}$$

јединични тангентни вектор криве C.

- Број

$$\kappa(s) = \left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right| \tag{1.20}$$

  назива се **кривина криве** C у тачки $\boldsymbol{r}(s)$.

- Пошто κ представља интензитет брзине промјене јединичног тангентног вектора криве C у односу на дужину лука s, κ је **мјера одступања криве $\boldsymbol{C}$ од њене тангенте** у свакој тачки криве C.

- **Полупречник кривине** у тачки $r(s)$ се дефинише са

$$R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}. \tag{1.21}$$

Примјер 1.17. Нека је C кружница са центром у координатном почетку полупречника a. Показали смо у Примјеру 1.16 да је њена природна параметризација

$$\boldsymbol{r}(s) = a cos\frac{s}{a}\boldsymbol{i} + a sin\frac{s}{a}\boldsymbol{j}, \qquad 0 \leq s \leq 2\pi a.$$

Одавде добијамо

$$\boldsymbol{r}'(s) = -sin\frac{s}{a}\boldsymbol{i} + cos\frac{s}{a}\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{r}''(s) = -\frac{1}{a}cos\frac{s}{a}\boldsymbol{i} + \frac{1}{a}sin\frac{s}{a}\boldsymbol{j}$$

па је

$$\kappa(s) = \left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right| = \frac{1}{a}$$

и

$$R(s) = a.$$

Дакле, кривина кружнице полупречника a је константна и једнака реципрочној вриједности полупречника, док је полупречник кривине једнак њеном полупречнику, што је и разлог за увођење појма *полупречник кривине*. □

- ✓ Ако умјесто природне параметризације криве C узмемо неку другу параметризацију $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ криве C, тада је формула за израчунавање кривине криве

$$\kappa(t) = \frac{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}, \boldsymbol{r}'(t) \neq 0. \tag{1.22}$$

- ✓ Глатка крива има кривину у свакој тачки јер нема сингуларних тачака и $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$.

Примјер 1.18. Израчунати кривину кружне завојнице

$$\boldsymbol{r}(t) = acost\boldsymbol{i} + asint\boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k}, \qquad a > 0, c \neq 0, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Рјешење:

$$\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -asint & acost & c \\ -acost & asint & 0 \end{vmatrix} = -casint\boldsymbol{i} - cacost\boldsymbol{j} + a^2\boldsymbol{k},$$

па је

$$\kappa(t) = \frac{a\sqrt{a^2 + c^2}}{(\sqrt{a^2 + c^2})^3} = \frac{a}{a^2 + c^2}.$$

Овај резултат смо могли добити и директно, из природне параметризације кружне завојнице (1.19). □

✓ Ако је $\kappa(s) \neq 0$, вектор

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} \tag{1.23}$$

представља јединични вектор који има правац и смјер као и вектор $\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$ (јер је $\kappa(s) > 0$) .

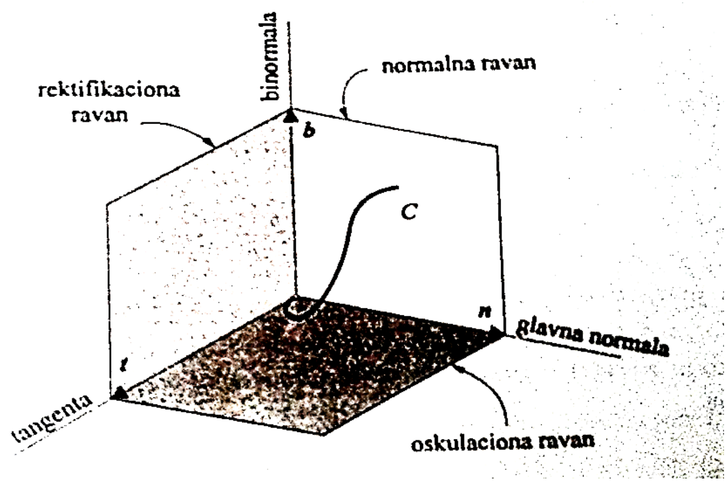
✓ Показали смо у Примјеру 1.4 да ако је модуо $|\boldsymbol{a}|$ векторске функције $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$ константан, да су тада вектори $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}'$ ортогонални. Користећи овај резултат и чињеницу да је $\boldsymbol{t}$ јединични вектор, добијамо да је вектор $\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$ ортогоналан на вектор $\boldsymbol{t}$. Дакле, и вектор $\boldsymbol{n}$ је ортогоналан на вектор $\boldsymbol{t}$. Вектор $\boldsymbol{n}$ се назива **јединични вектор главне нормале** криве C.

✓ Вектор

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n} \tag{1.24}$$

се назива **јединични вектор бинормале** криве C.

- Вектори $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b}$ чине триједар десне оријентације у тачки криве C којој одговара параметар s. Праве које пролазе кроз ту тачку у правцу вектора $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b}$ називају се **тангента, нормала** и **бинормала** криве C, респективно.



- Тангента и нормала одређују раван која се зове **оскулаторна раван**
- Нормала и бинормала одређују раван која се зове **нормална раван**
- Тангента и бинормала одређују раван која се зове **ректификациона раван.**

- Ако је C раванска крива, онда се оскулаторна раван у свакој тачки криве поклапа са равни у којој се крива налази. Пошто је јединични вектор бинормале ортогоналан на оскулаторну раван, он је у случају раванске криве константан вектор. Ако C није раванска крива, онда се оскулаторна раван у општем случају мијења од тачке до тачке, па је и јединични вектор бинормале промјенљив вектор.

Претпоставимо да C није раванска крива. Како је $|\boldsymbol{b}(s)| = 1$ (видјети Примјер 1.4) добијамо да је вектор $\boldsymbol{b}$ ортогоналан на вектор $\boldsymbol{b}'$.

Из $\boldsymbol{t}(s) \cdot \boldsymbol{b}(s) = 0$ диференцирањем добијамо

$$\boldsymbol{t}'(s) \cdot \boldsymbol{b}(s) + \boldsymbol{t}(s) \cdot \boldsymbol{b}'(s) = 0. \tag{1.25}$$

Пошто је вектор $\boldsymbol{t}'(s)$ колинеаран са $\boldsymbol{n}$, а $\boldsymbol{n}$ је ортогоналан на $\boldsymbol{b}$, добијамо да је и $\boldsymbol{t}'(s)$ ортогоналан на $\boldsymbol{b}$, тј.

$$\boldsymbol{t}'(s) \cdot \boldsymbol{b}(s) = 0. \tag{1.26}$$

Према томе из (1.25) и (1.26) добијамо

$$\boldsymbol{t}(s) \cdot \boldsymbol{b}'(s) = 0. \tag{1.27}$$

Из (1.27) имамо да је $\boldsymbol{b}' \perp \boldsymbol{t}$ а такође је и $\boldsymbol{b}' \perp \boldsymbol{b}$, па је вектор $\boldsymbol{b}'$ колинеаран са вектором $\boldsymbol{n}$, тј. $\boldsymbol{b}' = \alpha\boldsymbol{n}$, α је скалар. Уобичајена је ознака $\alpha = -\tau$ па је

$$\boldsymbol{b}'(s) = -\tau(s)\boldsymbol{n}(s). \tag{1.28}$$

- ✓ Скаларна функција $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(s)$ у (1.28) се назива **торзија** криве C.

✓ Скаларним множењем у (1.28) са $\boldsymbol{n}$ добијамо

$$\tau(s) = -\boldsymbol{n}(s) \cdot \boldsymbol{b}'(s). \tag{1.29}$$

✓ Скаларна функција

$$\sigma(s) = \frac{1}{\tau(s)} \tag{1.30}$$

назива се **полупречник торзије.**

✓ Ако је $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ природна параметризација криве C, лако се покаже да је

$$\tau(s) = \frac{1}{\kappa^2(s)}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}, \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}, \frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right). \tag{1.31}$$

✓ Ако је $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ произвољна параметризација криве C, тада је

$$\tau(t) = \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{|(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'')|^2}. \tag{1.32}$$

✓ Дакле, да би постојала торзија криве, векторска функција мора бити три пута диференцијабилна и кривина мора бити различита од нуле у свакој тачки.

- ✓ Пошто је код раванске криве вектор бинормале константан, добијамо да је $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{0}$ па је дакле **торзија раванске криве једнака нули.** Важи и обрнуто: **ако је торзија криве једнака нули, онда је она раванска крива.**

Примјер 1.19. Израчунати торзију кружне завојнице

$$\boldsymbol{r}(t) = a cos t\boldsymbol{i} + a sin t\boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k}, \qquad a > 0, c \neq 0, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Рјешење: Користићемо природну параметризацију кружне завојнице (1.19) и формулу за торзију (1.29). Имамо

$$\kappa(s) = \frac{a}{a^2 + c^2}, \quad \boldsymbol{n}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{t}'(s) = -cos\frac{s}{\sqrt{a^2 + c^2}}\boldsymbol{i} - sin\frac{s}{\sqrt{a^2 + c^2}}\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}(s) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} sin\frac{s}{\sqrt{a^2 + c^2}}\boldsymbol{i} - \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} cos\frac{s}{\sqrt{a^2 + c^2}}\boldsymbol{j} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{b}'(s) = \frac{c}{a^2 + c^2} cos\frac{s}{\sqrt{a^2 + c^2}}\boldsymbol{i} + \frac{c}{a^2 + c^2} sin\frac{s}{\sqrt{a^2 + c^2}}\boldsymbol{j},$$

па је

$$\tau(s) = -\boldsymbol{n}(s) \cdot \boldsymbol{b}'(s) = \frac{c}{a^2 + c^2}.$$

Дакле, **завојница има константну торзију.** Полупречник торзије је

$$\sigma(s) = \frac{1}{\tau(s)} = \frac{a^2 + c^2}{c}.$$

- Како су јединични вектори $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b}$ ортогонални, они су линеарно независни, сваки вектор у простору се може представити као њихова линеарна комбинација. Доказаћемо формуле за изражавање вектора $\boldsymbol{t}', \boldsymbol{n}'$ и $\boldsymbol{b}'$ као линеарних комбинација вектори $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b}$.

- Доказати **Френеове формуле:**

$$\boldsymbol{t}' = \kappa \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{n}' = -\kappa \boldsymbol{t} + \tau \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{b}' = -\tau \boldsymbol{n}. \tag{1.30}$$

Доказ: Прва формула се добија из формуле $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$. Трећа формула је уствари формула $\boldsymbol{b}'(s) = -\tau \boldsymbol{n}(s)$. Докажимо другу формулу.

Из

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{t}$$

имамо

$$\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{t} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{t}' = -\tau \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{t} + \kappa \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n} = (-\tau)(-\boldsymbol{b}) + \kappa(-\boldsymbol{t}) = \tau \boldsymbol{b} - \kappa \boldsymbol{t}. \square$$

- Интеграцијом Френеових формула може се показати да непрекидне функције $\kappa = \kappa(s) > 0$ и $\tau = \tau(s)$ одређују криву једнозначно, до на положај у простору.

Примјер 1.20. Одредити кривину и полупречник кривине криве ако је позната њена параметарска репрезентација $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + 2t^3\boldsymbol{j}$.

Рјешење:

$$\boldsymbol{r}'(t) = 2t\boldsymbol{i} + 6t^2\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{r}''(t) = 2\boldsymbol{i} + 12t\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2t & 6t^2 & 0 \\ 2 & 12t & 0 \end{vmatrix} = 12t^2\boldsymbol{k},$$

$$\kappa(t) = \frac{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3} = \frac{12t^2}{8\left(\sqrt{t^2 + 9t^4}\right)^3} = \frac{3}{2|t|\left(\sqrt{1 + 9t^2}\right)^3}, t \neq 0$$

$$R(t) = \frac{1}{\kappa(s)} = \frac{2}{3}|t|\left(\sqrt{1 + 9t^2}\right)^3.$$

Примјер 1.21. Одредити торзију и полупречник торзије криве ако је позната њена параметарска репрезентација $\boldsymbol{r}(t) = e^t cost\boldsymbol{i} + e^t sint\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}, t = 0$.

Рјешење: $\boldsymbol{r}'(t) = e^t(cost - sint)\boldsymbol{i} + e^t(sint + cost)\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r}'(0) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{r}''(t) = -2sinte^t\boldsymbol{i} + 2coste^t\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{r}''(0) = 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}'''(t) = -2e^t(sint + cost)\boldsymbol{i} + 2e^t(cost - sint)\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{r}'''(0) = -2\,\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

$$\tau(t) = \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{|(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'')|^2} = \frac{1}{3}, \quad \sigma(t) = 3.$$

Примјер 1.22. Одредити торзију криве $x = \frac{2t+1}{t-1}, y = \frac{t^2}{t-1}, z = t + 2$ па објаснити добијени резултат.

Рјешење:

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{2t+1}{t-1}\boldsymbol{i} + \frac{t^2}{t-1}\boldsymbol{j} + (t+2)\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{r}'(t) = \frac{-3}{(t-1)^2}\boldsymbol{i} + \frac{t^2 - 2t}{(t-1)^2}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}''(t) = \frac{6}{(t-1)^3}\boldsymbol{i} + \frac{2}{(t-1)^3}\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{r}'''(t) = -\frac{18}{(t-1)^4}\boldsymbol{i} - \frac{6}{(t-1)^4}\boldsymbol{j},$$

$$(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''') = 0.$$

Пошто је торзија једнака нули, закључујемо да је крива раванска. Лако се показује да крива лежи у равни $x - 3y + 3z = 5$.

2. СКАЛАРНА И ВЕКТОРСКА ПОЉА

2.1. ПОЈАМ СКАЛАРНОГ И ВЕКТОРСКОГ ПОЉА

- ✓ Дио простора у којем се дешава нека физичка појава назива се **физичко поље**.

- ✓ Уколико се физичка појава карактерише скаларном величином, то поље се назива **скаларно поље**, а уколико се карактерише векторском величином назива се **векторско поље.**

- ✓ Скаларна поља: температура, атмосферски притисак

- ✓ Векторска поља: гравитационо поље, брзина флуида

- ✓ Поље (скаларно или векторско) је **стационарно** ако зависи само од положаја тачке у простору, а не зависи од времена. Ако поље зависи од времена онда кажемо да је **нестационарно.**

- ✓ Скаларно поље f може се представити помоћу скаларне функције из R^3 у R коју такође означавамо са f. Вриједност скалараног поља f у тачки P, $f(P)$, означавамо и са $f(x, y, z)$ гдје су (x, y, z) координате тачке P.

- ✓ Ако је у скупу D дефинисана векторска функција, кажемо да је на скупу D задато векторско поље. D је најчешће крива, површ или област у простору. У правоуглом координатном систему векторско поље $\boldsymbol{a}$ се може представити помоћу векторске функције
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(P) = \boldsymbol{a}(x, y, z) = a_1(x, y, z)\boldsymbol{i} + a_2(x, y, z)\boldsymbol{j} + a_3(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

Скаларна поља је могуће представити геометријски помоћу ниво-површи.

Дефиниција 2.1. Скуп тачака у простору у којима скаларно поље f има исту вриједност назива се **ниво-површ** скаларног поља f. Једначина ниво-површи скаларног поља f је

$$f(x, y, z) = c = const.$$

Ако је скаларно поље f дефинисано на скупу тачака неке равни, онда умјесто ниво-површи имамо **ниво-линије**. Једначина ниво-линије је

$$f(x, y) = c = const.$$

- ✓ Ако је f поље температуре, притиска, надморске висине, онда се одговарајуће ниво-линије зову **изотерме, изобаре, изохипсе,** респективно**.**

Примјер 2.1. Одредити ниво-површи скаларног поља

а) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$,

б) $f(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$

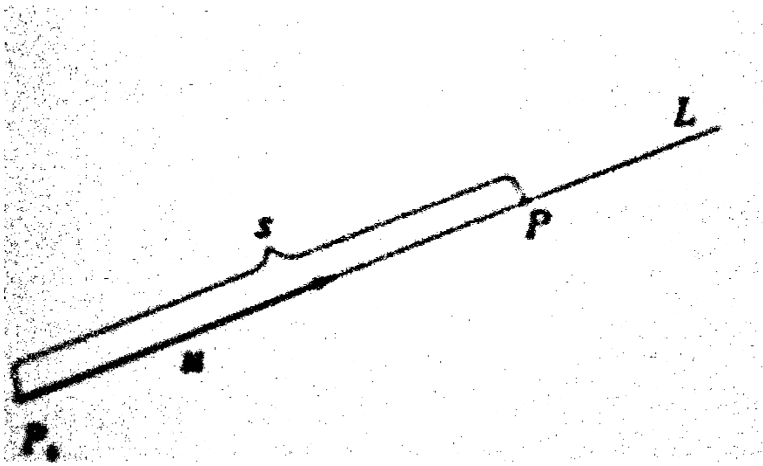
Рјешење: а) $x^2 + y^2 + z^2 = c, c \geq 0$.

б) $z - \sqrt{x^2 + y^2} = c \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = z - c \Rightarrow x^2 + y^2 = (z - c)^2, z \geq c$.

Ниво-површи су конуси.

2.2. ИЗВОД СКАЛАРНОГ ПОЉА У ДАТОМ ПРАВЦУ. ГРАДИЈЕНТ СКАЛАРНОГ ПОЉА.

Нека је скаларно поље дефинисано на тродимензионалној области D. Фиксирајмо тачку $P_0 \in D$ и јединични вектор $\boldsymbol{u}$. Нека је L полуправа која полази из тачке P_0 у правцу вектора $\boldsymbol{u}$, и нека је P тачка те полуправе на удаљености s од тачке P_0.



Дефиниција 2.2. Ако постоји гранична вриједност

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(P) - f(P_0)}{s}$$

онда се она назива **извод скаларног поља** f у тачки P_0 у правцу вектора $\boldsymbol{u}$ и означава се са $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}$ или $\frac{\partial f}{\partial s}$.

Изводе поља f у тачки P_0 можемо одредити у произвољно много различитих праваца. Показаћемо да се сваки од тих извода може изразити помоћу парцијалних извода функције f у тачки $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Ако је $\boldsymbol{r_0} = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}$ радијус-вектор тачке P_0, тада полуправу L можемо представити помоћу векторске функције

$$\boldsymbol{r}(s) = x(s)\boldsymbol{i} + y(s)\boldsymbol{j} + z(s)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{r_0} + s\boldsymbol{u}, \quad s \geq 0. \tag{2.2}$$

Нека је $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$, гдје је $u_1 = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{u}$, $u_2 = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{u}$, $u_3 = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u}$. Из (2.2) добијамо

$$x(s) = x_0 + su_1, \quad y(s) = y_0 + su_2, \quad z(s) = z_0 + su_3. \tag{2.3}$$

Пошто је $P_0 = r(0)$, $P = r(s)$ добијамо

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}} = \lim_{s \to 0} \frac{f\big(x(s), y(s), z(s)\big) - f\big(x(0), y(0), z(0)\big))}{s}$$

што је заправо извод сложене функције $f\big(x(s), y(s), z(s)\big)$ по s у тачки $s = 0$, тј.

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}} = \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{s=0}.$$

Из формуле за извод сложене функције добијамо

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x} \cdot \frac{dx(0)}{ds} + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} \cdot \frac{dy(0)}{ds} + \frac{\partial f(P_0)}{\partial z} \cdot \frac{dz(0)}{ds}.$$

Пошто је из (2.3)

$$\frac{dx(0)}{ds} = u_1, \quad \frac{dy(0)}{ds} = u_2, \qquad \frac{dz(0)}{ds} = u_3$$

добијамо

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} u_2 + \frac{\partial f(P_0)}{\partial z} u_3 = \left(\frac{\partial f(P_0)}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial f(P_0)}{\partial z} \boldsymbol{k} \right) \cdot \boldsymbol{u}. \tag{2.4}$$

Дефиниција 2.3. Вектор

$$gradf = \frac{\partial f}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \boldsymbol{k} \tag{2.5}$$

зовемо **градијент** скаларног поља f.

Коришћењем градијентног вектора из (2.5), формулу (2.4) можемо писати у облику

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}} = gradf(P_0) \cdot \boldsymbol{u} \tag{2.6}$$

✓ Уколико је правац одређен вектором $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ произвољне дужине, тада је

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = gradf(P_0) \cdot \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \tag{2.7}$$

Дефиниција 2.4. Диференцијални оператор

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{2.8}$$

зовемо **Хамилтонов диференцијални оператор**. [3]

Користећи Хамилтонов оператор (2.8), формулу (2.5) можемо писати у облику

$$grad f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{2.9}$$

Теорема 2.1. Нека су f и g диференцијабилне скаларне функције. Тада је

1. $\nabla c = \mathbf{0}, \ \ c = const.$
2. $\nabla(\lambda f + \mu g) = \lambda \nabla f + \mu \nabla g$
3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
4. $\nabla(f^n) = nf^{n-1}\nabla(f)$
5. $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}, g \neq 0. \square$

[3] William Rowan Hamilton (1805 –1865) ирски физичар, астроном и математичар

Примјер 2.2. Одредити извод скаларног поља $f = x^2 + y^2 + z^2$ у тачки $P(1,0,1)$ у правцу вектора $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

Рјешење: Имамо

$$grad f = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}, \ \ grad f(P) = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}.$$

Даље је

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \boldsymbol{v}} = grad f(P) \cdot \frac{-\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}}{\sqrt{3}} = -\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Пошто је $\frac{\partial f(P)}{\partial \boldsymbol{v}} < 0$, поље f опада у правцу вектора $\boldsymbol{v}$.

Формула (2.7) се може записати у облику

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = |grad f| \cdot cos\gamma,$$

гдје је γ угао између вектора $grad f$ и $\boldsymbol{v}$. Дакле, извод поља f у правцу вектора $\boldsymbol{v}$ је једнак пројекцији вектора $grad f$ на праву одређену вектором $\boldsymbol{v}$. Та пројекција је максимална и једнака $|grad f|$ ако је $\gamma = 0$. Тако вектор $grad f \neq 0$ показује правац у којем се скаларно поље најбрже мијења, а његов интензитет представља максималну брзину промјене. Смјер вектора $grad f$ представља смјер раста поља f.

✓ **Геометријска интерпретација градијента.**

Нека је скаларано поље представљено помоћу скаларне функције $f(x,y,z)$ која је непрекидно диференцијабилна. Претпоставимо да са свако c једначина

$$f(x,y,z) = c$$

представља површ у простору. Дата фамилија површи одређује једнопараметраску фамилију површи и то су ниво-површи поља f. Ако је крива C дата помоћу векторске функције

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}, \quad a \leq t \leq b$$

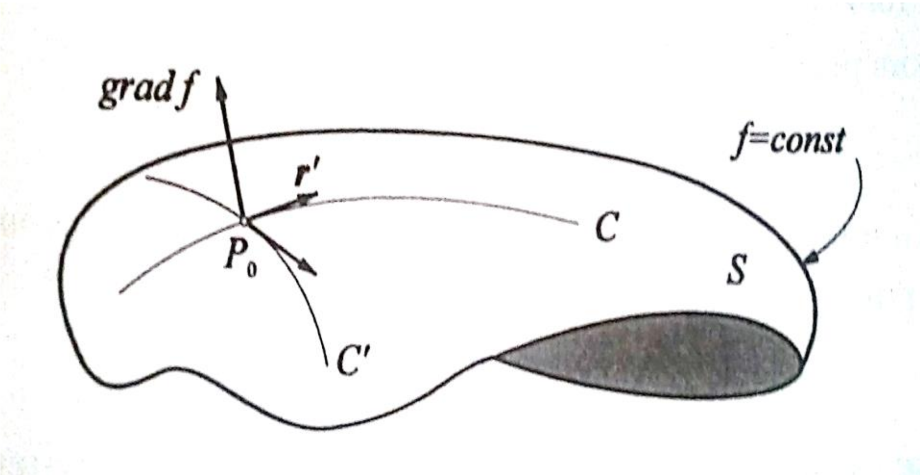
и ако се она налази на ниво-површи поља f, тада је за неко c

$$f\big(x(t), y(t), z(t)\big) = c.$$

Одавде диференцирањем добијамо

$$\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z' = gradf \cdot \boldsymbol{r}' = 0,$$

при чему је $\boldsymbol{r}'$ тангентни вектор на криву C. Уколико је крива C глатка и ако вектор $gradf$ није нула вектор, закључујемо да је вектор $gradf(P_0)$ ортогоналан на тангентни вектор криве C у тачки P_0. Аналогно је вектор $gradf(P_0)$ ортогоналан на тангентни вектор сваке глатке криве која пролази кроз P_0. Сви ти тангентни вектори се налазе у једној равни коју називамо тангентна раван површи S у тачки P_0. **Према томе, вектор $\boldsymbol{gradf}(\boldsymbol{P_0})$ има правац нормале на површ $\boldsymbol{S}$ у тачки $\boldsymbol{P_0}$.**



- ✓ Вектор

$$\boldsymbol{n}(P_0) = \frac{grad f(P_0)}{|grad f(P_0)|}$$

представља **јединични вектор нормале** на ниво-површ поља f у тачки P_0.

- ✓ Јединични вектор нормале је и вектор $-\boldsymbol{n}(P_0)$.

Примјер 2.3. Одредити јединични вектор нормале на површ $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ у тачки $P(1,0,1)$.

Рјешење: Ова површ се може схватити као ниво-површ $f = 0$ поља $f = z^2 - 4(x^2 + y^2)$. Према томе, $grad f = -8x\boldsymbol{i} - 8y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$, $grad f(P) = -8\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}$ и

$$\boldsymbol{n}(P) = \frac{-8\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}}{2\sqrt{17}} = \frac{-4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{17}}.$$

- ✓ У физици се често јављају векторска поља представљена помоћу векторских функција које се могу добити као градијенти неких скаларних функција. Таква поља се називају потенцијална поља а одговарајуће скаларне функције се називају потенцијали тог поља.

Дефиниција 2.5. Векторско поље $\boldsymbol{a}$ је **потенцијално** ако постоји скаларна функција f таква да је

$$\boldsymbol{a} = gradf.$$

Скаларна функција f је **потенцијал** поља $\boldsymbol{a}$.

- ✓ За потенцијално поље се користи и термин **конзервативно поље**.

Примјер 2.3. а) Одредити $gradf$ ако је $f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

б) Одредити скаларну функцију чији је градијент вектор $x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$**.**

в) Одрдити извод поља $f = 3x^2 - 2xy + y^2z^2$ у тачки $P(0,-1,1)$ у правцу вектора

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

г) Одредити јединични вектор нормале на површ $z = x^2 + y^2$ у тачки $P(1,2,5)$.

д) Одредити јединични вектор нормале на криву $y = 1 - x^2$ у тачки $P(1,0)$.

2.3. ДИВЕРЕГЕНЦИЈА ВЕКТОРСКОГ ПОЉА

Нека је

$$\boldsymbol{a}(x,y,z) = a_1(x,y,z)\boldsymbol{i} + a_2(x,y,z)\boldsymbol{j} + a_3(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

диференцијабилна векторска функција.

Дефиниција 2.6. Функција

$$div\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} \tag{2.10}$$

назива се **диверегенција** векторског поља $\boldsymbol{a}$.

- ✓ Користећи Хамилтонов оператор ∇ из (2.8) дивергенцију можемо записати и у облику

$$div\boldsymbol{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \cdot (a_1\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}.$$

- ✓ Дивергенција векторског поља је скаларно поље.

Примјер 2.4. За векторско поље $\boldsymbol{a} = x^3y\boldsymbol{i} + y^2z\boldsymbol{j} + xyz\boldsymbol{k}$ је $div\boldsymbol{a} = 3x^2y + 2yz + xy$.

Теорема 2.2. Нека је f диференцијабилна скаларна функција и $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ диференцијабилне векторске функција. Тада је

1. $div\boldsymbol{c} = 0,\ \ \boldsymbol{c}$ константно векторско поље
2. $div(\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v}) = \lambda div\boldsymbol{u} + \mu div\boldsymbol{v}$
3. $div(f\boldsymbol{u}) = gradf \cdot \boldsymbol{u} + f div\boldsymbol{u}.$ □

Дефиниција 2.7. Диференцијални оператор

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.11}$$

зовемо **Лапласов диференцијални оператор.** [4]

- ✓ Ако је $f(x, y, z)$ два пута диференцијабилна скаларна функција, тада је

$$div(gradf) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f. \tag{2.12}$$

Дефиниција 2.8. Кажемо да је векторско поље $\boldsymbol{a}$ **соленоидално** у области D ако је $div\boldsymbol{a} = 0$ у D.

[4] Pierre-Simon Laplace (1749 –1827) француски математичар, физичар и астроном

2.4. РОТОР ВЕКТОРСКОГ ПОЉА

Нека је

$$\boldsymbol{a}(x,y,z) = a_1(x,y,z)\boldsymbol{i} + a_2(x,y,z)\boldsymbol{j} + a_3(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

диференцијабилна векторска функција.

Дефиниција 2.9. Векторска функција

$$rot\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{2.13}$$

назива се **ротор (ротација)** векторског поља дефинисаног векторском функцијом $\boldsymbol{a}$.

- ✓ Помоћу Хамилтоновог оператора формулу (2.13) можемо записати у облику

$$rot\boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}. \tag{2.14}$$

Примјер 2.5. За векторско поље $\boldsymbol{a} = yz\boldsymbol{i} + 3xz\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ имамо

$$rot\boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & 3xz & z \end{vmatrix} = -3x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}.$$

- ✓ Ако је $rot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$**,** кажемо да је поље **безвртложно.** У противном кажемо да је поље **вртложно.**

Теорема 2.3. Нека је f диференцијабилна скаларна функција и $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ диференцијабилне векторске функције. Тада је

1. $rot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{c}$ константно векторско поље
2. $rot(\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v}) = \lambda rot\boldsymbol{u} + \mu rot\boldsymbol{v}$
3. $rot(f\boldsymbol{u}) = gradf \times \boldsymbol{u} + frot\boldsymbol{u}$
4. $rot(gradf) = \boldsymbol{0}$ [5]
5. $div(rot\boldsymbol{u}) = 0.$ □

[5] Градијентна поља описују безвртложна кретања, тј. кретања без ротације.

Теорема 2.4. Нека је $\boldsymbol{a}$ диференцијабилна векторска функција у области D. Тада вриједи:

1. Векторско поље $\boldsymbol{a}$ је потенцијално ако и само ако је $rot\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, тј. ако и само ако је поље $\boldsymbol{a}$ безвртложно.

2. Векторско поље $\boldsymbol{a}$ је соленоидално ако и само ако постоји два пута диференцијабилно поље $\boldsymbol{u}$ такво да је $\boldsymbol{a} = rot\boldsymbol{u}$.

Доказ:

1. Ако је поље $\boldsymbol{a}$ потенцијално, онда постоји скаларна функција f таква да је $\boldsymbol{a} = gradf$. Из особине 4. у Теореми 2.3. добијамо $rot\boldsymbol{a} = rot(gradf) = \mathbf{0}$.

Претпоставимо сада да је $rot\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$. Тада је

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} = \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = 0. \tag{2.15}$$

Одредимо сада скаларну функцију $f(x, y, z)$ за коју је $\boldsymbol{a} = gradf$. Добијамо систем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a_1(x, y, z) \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = a_2(x, y, z) \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = a_3(x, y, z). \tag{2.18}$$

Из прве једначине система, (2.16), добијамо

$$f(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} a_1(t, y, z)dt + \varphi(y, z) \tag{2.19}$$

гдје је је (x_0, y_0, z_0) фиксирана тачка у D и (x, y, z) произвољна тачка у D. Диференцирањем по y, односно по z у (2.19), добијамо

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial a_1}{\partial y}(t, y, z)dt + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial a_1}{\partial z}(t, y, z)dt + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{2.21}$$

Пошто је из (2.15) $\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x}$ и $\frac{\partial a_1}{\partial z} = \frac{\partial a_3}{\partial x}$ из (2.20)-(2.21) добијамо

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial a_2}{\partial t}(t, y, z)dt + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = a_2(x, y, z) - a_2(x_0, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial a_3}{\partial t}(t,y,z)dt + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = a_3(x,y,z) - a_3(x_0,y,z) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{2.23}$$

Изједначавајући $\frac{\partial f}{\partial y}$ из (2.20) и (2.22) и $\frac{\partial f}{\partial z}$ из (2.21) и (2.23), добијамо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = a_2(x_0,y,z) \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = a_3(x_0,y,z) \tag{2.25}$$

Сада из (2.24) добијамо

$$\varphi(y,z) = \int_{y_0}^{y} a_2(x_0,t,z)dt + g(z). \tag{2.26}$$

Диференцирањем по z у (2.26) добијамо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial a_2}{\partial z}(x_0,t,z)dt + g'(z) \tag{2.27}$$

Пошто је из (2.15) $\frac{\partial a_2}{\partial z} = \frac{\partial a_3}{\partial y}$ из (2.27) добијамо

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial a_3}{\partial t}(x_0, t, z)dt + g'(z) = a_3(x_0, y, z) - a_3(x_0, y_0, z) + g'(z) \tag{2.28}$$

Изједначавајући $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ из (2.28) и из (2.25) добијамо

$$a_3(x_0, y, z) = a_3(x_0, y, z) - a_3(x_0, y_0, z) + g'(z)$$

тј.

$$g'(z) = a_3(x_0, y_0, z) \tag{2.29}$$

Из (2.29) добијамо

$$g(z) = \int_{z_0}^{z} a_3(x_0, y_0, t)dt + c \tag{2.30}$$

Дакле,

$$\varphi(y, z) = \int_{y_0}^{y} a_2(x_0, t, z)dt + \int_{z_0}^{z} a_3(x_0, y_0, t)dt + c$$

односно

$$f(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} a_1(t,y,z)dt + \int_{y_0}^{y} a_2(x_0,t,z)dt + \int_{z_0}^{z} a_3(x_0,y_0,t)dt + c \qquad (2.31)$$

Функција (2.31) је скаларни потенцијал поља $\boldsymbol{a}$.

3.Ако је $\boldsymbol{a} = rot\boldsymbol{u}$, тада на основу особине 2. у Теореми 2.3. имамо $div(rot\boldsymbol{u}) = 0$, па је поље $\boldsymbol{a}$ соленоидално. Претпоставимо сада да је поље $\boldsymbol{a}$ соленоидално тј. да је $div\boldsymbol{a} = 0$. Пошто је дивергенција једнака нули имамо

$$\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} = 0. \qquad (2.32)$$

Конструисаћемо поље $\boldsymbol{u}$ за које је $\boldsymbol{a} = rot\boldsymbol{u}$. Одавде добијамо

$$\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} = a_1(x,y,z)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} = a_2(x,y,z)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = a_3(x,y,z) \qquad (2.33)$$

Користећи особине 2. и 4. из Теореме 2.3. добијамо да ако је ротор функције $\boldsymbol{u}$ једнак $\boldsymbol{a}$, да је тада и ротор функције $\boldsymbol{u}+grad f$ такође једнак $\boldsymbol{a}$, гдје је f произвољна диференцијабилна скаларна функција. То значи да можемо претпоставити да векторска функција $\boldsymbol{u}$ има једну од координата једнаку нули. Претпоставимо да је $u_3(x,y,z)=0$. Тада из (2.33) добијамо

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_2}{\partial z}=-a_1(x,y,z),\\ \frac{\partial u_1}{\partial z}=a_2(x,y,z),\\ \frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial y}=a_3(x,y,z)\end{gathered}\tag{2.34}$$

Из прве двије једначине система (2.34) добијамо

$$u_2(x,y,z)=-\int_{z_0}^{z}a_1\,(x,y,t)dt+\omega(x,y),$$
$$u_1(x,y,z)=\int_{z_0}^{z}a_2\,(x,y,t)dt+\theta(x,y).$$

гдје је је (x_0,y_0,z_0) фиксирана тачка у D и (x,y,z) произвољна тачка у D. Одавде добијамо

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial y}=-\int_{z_0}^{z}\frac{\partial a_1}{\partial x}(x,y,t)dt+\frac{\partial\omega}{\partial x}-\int_{z_0}^{z}\frac{\partial a_2}{\partial y}(x,y,t)dt-\frac{\partial\theta}{\partial y}=$$

$$= -\int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x}(x,y,t) + \frac{\partial a_2}{\partial y}(x,y,t)\right)dt + \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \theta}{\partial y} \tag{2.34}$$

Користећи (2.32) из (2.34) добијамо

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial a_3}{\partial t}(x,y,t)dt + \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \theta}{\partial y} = a_3(x,y,z) - a_3(x,y,z_0) + \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \theta}{\partial y} \tag{2.36}$$

Изједначавајући $\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}$ из (2.34) и из (2.35) добијамо

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \theta}{\partial y} = a_3(x,y,z_0) \tag{2.37}$$

Функције ω и θ морају да испуњавају само услов (2.37) па можмо узети $\theta(x,y) = 0$ и

$$\omega(x,y) = \int_{x_0}^{x} a_3\,(t,y,z_0)dt. \tag{2.38}$$

Према томе, за функцију $\boldsymbol{u}$

$$u_1(x,y,z) = \int_{z_0}^{z} a_2\,(x,y,t)dt$$

$$u_2(x,y,z) = -\int_{z_0}^{z} a_1\,(x,y,t)dt + \int_{x_0}^{x} a_3\,(t,y,z_0)dt,$$

$$u_3(x, y, z) = 0$$

вриједи $\boldsymbol{a} = rot\boldsymbol{u}$ па смо конструисли поље чији је ротор поље $\boldsymbol{a}$ и теорема је доказана. □